Vom Fragen und vom Staunen in der Mathematik

1

Norbert Hungerbühler

Zusammenfassung

Antworten auf die Frage, welches mathematische Handwerkszeug die Lehrkräfte von morgen brauchen, können und müssen auf ganz verschiedenen Ebenen ansetzen. Lehrkräfte von morgen werden Jugendliche von morgen unterrichten, die ihrerseits übermorgen unsere Gesellschaft prägen werden: Welche Unterrichtsinhalte werden dann relevant sein? Wie hoch muss das fachliche Niveau der Lehrkräfte sein? Welchen Anteil soll die mathematische Fachausbildung im Vergleich zu den didaktischen, pädagogischen und berufspraktischen Elementen der Lehramtsausbildung haben? Aber vor allem: Welcher Blick auf die Mathematik soll bei der Lehrerinnen- und Lehrerausbildung vermittelt werden? Lernenden aller Schulstufen, von der Primar- bis zur Hochschule, stellt sich die Mathematik oftmals als starres, fertiges Lehrgebäude dar, das bereits alle Fragen und Antworten abgearbeitet hat. Die Mathematik ist jedoch eine zutiefst fragende Wissenschaft. So waren es in der Geschichte der Mathematik immer wieder einfache aber eben tiefe Fragen, welche das Fach einen entscheidenden Schritt vorangebracht haben. In der Schule und im Studium werden die Fragen jedoch in der Regel von der Lehrkraft einfach vorgegeben. Echte mathematische Fragen stellen sich die Lernenden daher kaum je selber.

N. Hungerbühler (✉)
Departement Mathematik, ETH Zürich, Zürich, Schweiz
E-mail: norbert.hungerbuehler@math.ethz.ch

S. Halverscheid et al. (Hrsg.), *Bedarfsgerechte fachmathematische Lehramtsausbildung,*
Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-34067-4_1

Im Gegensatz zum Problemlösen wird in der Ausbildung die Fähigkeit, selber kreative, interessante Fragen zu entwickeln, wenig oder gar nicht geübt. Dies ist ein schmerzliches Defizit, denn erst die Fragen machen die Mathematik lebendig und interessant. Kennt man die Seite der Fragen besser, so sind die Antworten umso staunenswerter. Erleben künftige Lehrkräfte diesen Aspekt der Mathematik in ihrer Ausbildung, so sind sie auch eher in der Lage, ihn in die Schule zu tragen und das Fach den Schülerinnen und Schülern als kreatives und schöpferisches Tun zu vermitteln. Was macht nun eine gute mathematische Frage aus? Wie kann man den Blick für interessante Fragen schärfen? Wie kann man das Fragenstellen üben?

1.1 Vom Staunen

Das Staunen gehört zu den grundlegenden menschlichen Lebens- und Wesensäußerungen. Der amerikanische Psychologe Paul Ekman[1] nennt denn auch das Staunen in seiner Liste der sieben Grundemotionen (Abb. 1.1).

Diese Gefühlsregungen zeigen sich insbesondere im Gesicht, und bereits einfachste Darstellungen dieser Emotionen mit wenigen Strichen werden von unserem Gehirn erkannt. Dies liegt daran, dass die Grundemotionen genetisch festgelegt und daher insbesondere unabhängig vom Kulturkreis sind. Im Gegensatz dazu sind bestimmte Gesten, wie etwa Kopfnicken oder Kopfschütteln, erlernt und werden in verschiedenen Kulturen unterschiedlich interpretiert. Bereits Charles Darwin beobachtete Emotionen auch bei Tieren und beschrieb sie 1872 in seinem Werk *Expression of the Emotions in Man and Animals.* Darwin vermutete, dass Emotionen (also auch das Staunen) existieren, weil sie in der Evolution einen Vorteil mit sich bringen. Heute verwendet die forensische Psychologie, basierend auf den Arbeiten von Paul Ekman, Mikroexpressionen, um in Verhören Aussagen von Verdächtigen und Zeugen zu bewerten und insbesondere Falschaussagen zu entlarven.

Neben der groben Einteilung in Abb. 1.1 kennt die psychologische Forschung weitere Emotionen sowie Mischungen, Varianten und feinste Abstufungen. So füllt der Begriff des Staunens ein ganzes Spektrum von Ausprägungen: Bestaunen, Überraschung, Verblüffung, Befremden, Verwunderung, Verwirrung, Erschrecken, Bestürzung, ungläubiges Staunen etc. Entsprechend wird Staunen von unterschiedlichen Emotionen wie Bewunderung, Ehrfurcht,

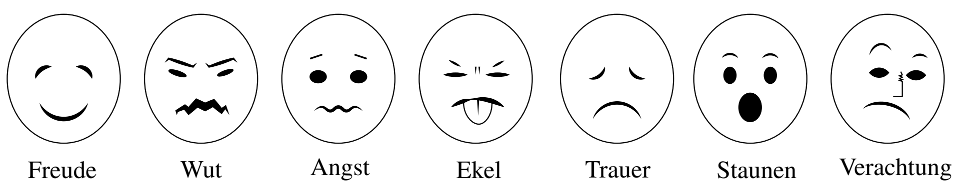


Abb. 1.1 Sieben Grundemotionen

[1] Er ist das Vorbild für den fiktiven Charakter Cal Lightman in der Krimiserie *Lie to Me.*

Respekt, Verehrung, Irritation, Argwohn oder gar Angst begleitet. In eigentlichen Emotionsdiagrammen können Gefühle kartiert, in Beziehung gesetzt oder einander gegenübergestellt werden.

Das Staunen wird oft begleitet von einem Aha-Erlebnis und in der Folge von einem sprunghaften Erkenntnisgewinn oder einem signifikanten Lernzuwachs. Ein klassisches Beispiel ist die berühmte Episode von Archimedes in der Wanne bei der Entdeckung des nach ihm benannten Gesetzes des statischen Auftriebs eines Körpers in einem Medium. Jeder, der das Argument hinter diesem Gesetz das erste Mal innerlich nachvollzieht, ist von der Einfachheit und Tragweite der Idee hingerissen und versteht, warum Archimedes vor Freude „Heureka!" rufend nackt aus dem Bad auf die Straße sprang. So spielen denn auch die psychologischen Aspekte des Staunens in der Kreativitätstheorie eine tragende Rolle (siehe zum Beispiel Gruber 1981 oder Runco 2014).

Überraschend ist, dass schon bei neugeborenen Babys Staunen im Zusammenhang mit *Zahlen* beobachtbar ist. Dieses Phänomen wurde bereits in Antell und Keating 1983 dokumentiert: Drei bis vier Tage alten Babys wurden jeweils zwei Karten mit einer übereinstimmenden kleinen Anzahl von Punkten gezeigt. Zeigte man nach dieser Gewöhnungsphase zwei Karten mit einer unterschiedlichen Anzahl von Punkten, konnte man bei den Babys deutliche Anzeichen von Erstaunen beobachten (angehaltener Atem, aufgerissene Augen). Ähnliche Experimente wurden seither wiederholt durchgeführt, und inzwischen hat sich die Erkenntnis gefestigt, dass Neugeborene bei geeigneten Versuchsanordnungen die Zahlen bis fünf unterscheiden können (siehe zum Beispiel Lakoff und Núñez 2000 oder Xu und Spelke 2000).

1.1.1 Warum ist Staunen relevant für das Lernen?

Erfahrungen, die mit starken Gefühlsregungen einhergehen, bleiben uns besonders nachhaltig in Erinnerung. Diese Verknüpfung kann für erfolgreiches Lernen ausgenutzt werden. Wikipedia charakterisiert Staunen wie folgt und beruft sich dabei auf Schulte-Janzen 2002 und Berlyne 1974:

> Es wird begleitet von einem neurobiologischen Zustand der Erregung, einem inneren Unruhezustand, der sich motivationsfördernd auswirkt, bisher Unbekanntes zu erforschen und zu lernen. Das bereitgestellte Erregungspotential ermöglicht, das innere Gleichgewicht wiederherzustellen, das durch die Konfrontation mit dem „unpassenden" Neuen verloren ging. Das entspricht dem Staunen als Auslöser für einen „Konflikt durch Überraschung" nach Berlyne 1960. Staunen ist der Neugier verwandt.
>
> Durch Staunen initiiertes Lernen ist somit von innen heraus/intrinsisch motiviert, weil der Mensch inneres Gleichgewicht anstrebt. (Wikipedia 2020)

Diese didaktische affektive Komponente des Staunens und der damit verknüpften Fragen spiegelt sich auch in der Theorie der interessedichten Situationen wider (siehe Bikner-Ahsbahs und Halverscheid 2014). Die mathematikdidaktische Fragestellung in diesem Kontext lautet, welche Strukturen Fragen haben müssen, um nachhaltiges Interesse zu erzeugen. Die Antwort ist, dass diese Fragen zu mathematischen Strukturen führen müssen: Werden bei der Bearbeitung der Fragen diese Strukturen entwickelt, können im Unterricht interessedichte, mit Staunen verbundene Situationen entstehen.

Damit ist Staunen ein fast ideales Vehikel, um in der Schule und im Studium das Lernen zu befördern. Das Staunen ist aus denselben Erwägungen auch ein wichtiger Motor der Forschung. Dies erkannten schon die frühen Philosophen.

1.1.2 Staunen in der Philosophie

In Platons Dialog *Theaitetos* spricht Sokrates mit Theodoros von Kyrene und dessen begabtem Schüler Theaitetos. Theodoros ist bekannt für seine Wurzelschnecke (Abb. 1.2a): Er hat nachgewiesen, dass die Wurzeln der Zahlen 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17 irrational sind. Theaitetos wiederum hat bewiesen, dass es in drei Dimensionen nur fünf Platonische Körper gibt (Abb. 1.2b). Theaitetos berichtet seinen zwei Begleitern, dass er die Aussage über irrationale Wurzeln auf alle Nichtquadratzahlen verallgemeinern und auf kubische Wurzeln übertragen konnte. Sokrates lobt ihn für diese Erkenntnis. Im weiteren Dialog verunsichert Sokrates aber Theaitetos, indem er ihm zeigt, dass der Wahrnehmung durch unsere Sinne nicht im gleichen Maße sichere Erkenntnis entspringen kann, wie dies in der Ideenwelt der Mathematik der Fall ist:

> Theaitetos: *Bei den Göttern, Sokrates, ich staune über die Maßen, wie das denn eigentlich ist, und manchmal wird mir geradezu schwindlig, wenn ich es betrachte.*

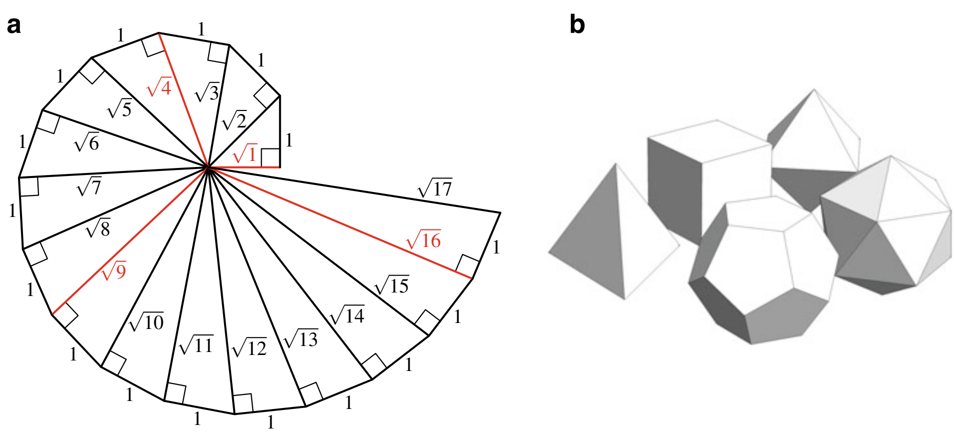


Abb. 1.2 Wurzelschnecke **(a)** und Plantonische Körper **(b)**

> Sokrates: *Mein lieber Freund, Theodoros scheint mir in der Beurteilung deiner Natur nicht weit daneben zu treffen. Das Staunen ist die Einstellung eines Mannes, der die Weisheit wahrhaft liebt, ja es gibt keinen anderen Anfang der Philosophie als diesen. Und wer gesagt hat, Iris sei die Tochter des Thaumas, der versteht sich nicht schlecht auf die Genealogie.* (Aus Platon 2018, Seite 22.)

Sokrates bezieht sich dabei auf die *Theogonie:* In seinem Epos über die Entstehung der Götter beschreibt Hesiod nämlich, wie Thaumas die Tochter des Okeanos, Elektra, heimführte und sie ihm die windstürmende Iris gebar. Thaumas (Θαύμας) ist ein Meeresgott und verkörpert die Wunder der Meere. In seinem Namen klingt das griechische Wort thauma (ϑαῦμα), Wunder, an. Iris (Ἶρις) ist die Personifikation des Regenbogens und gilt als Botin zwischen der Welt der Götter und der Welt der Menschen. Und der Regenbogen versetzte die Menschen jener Zeiten genauso in Staunen wie die Wunder der Meere.

Platon ersetzt die traditionell eher admirative Auffassung des Staunens durch eine dynamische aktive Haltung, die jemand einnimmt, wenn ihm etwas Besonderes und Bemerkenswertes widerfährt. Auch Aristoteles greift dies in der *Metaphysik* und in der *Rhetorik* auf: Ursache des Staunens sind Ereignisse, die der Erwartung oder Erfahrung widersprechen. Der Staunende sucht im scheinbar Paradoxen nach Kohärenz und Verstehen. Die Aufgabe der Philosophie sieht Aristoteles in der kritischen Betrachtung von *scheinbar Selbstverständlichem* und dem Gegenüberstellen von Meinung (doxa δόξα) und Wahrheiten (aletheia αλήϑεια).

An dieser Stelle tritt nun ein wichtiger Punkt deutlich hervor: Staunen bedeutet nicht nur ein passives Bestaunen von offensichtlich Spektakulärem, sondern es zeigt sich in der Auseinandersetzung mit dem Alltäglichen, dem schon tausendmal Gesehenen. Indem man es kritisch hinterfragt, ergibt sich erst das aktive und fragende Staunen, das zu weiterem Forschen und schließlich neuen Erkenntnissen Anlass gibt. Die Dissonanz zwischen *doxa* und *aletheia* fördert das Streben nach Wissen: Das Staunen erzeugt Neugier, innere Bewegung, Anspannung und die Motivation, Neues zu lernen. Wer nicht fragt, nimmt die Welt hin, wie sie ist – er staunt nicht. Wer nicht staunt, hat keinen Anlass zu fragen. Einstein formulierte recht drastisch: „Wer […] nicht mehr staunen kann, der ist sozusagen tot und sein Auge erloschen" (aus Einstein 1953, Seite 16).

Heute ist das Staunen durch die dauernde Reizüberflutung und Informationsfülle und die daraus folgende Abstumpfung in Gefahr. Wenn das allgegenwärtige Handy jederzeit die neusten spektakulären Internet Challenges und Videos bereithält, warum sollte es dann für Schülerinnen und Schüler noch interessant sein, dass sich die Höhen in einem Dreieck in einem Punkt schneiden? Und warum sollte der Satz von Milman-Pettis Staunen hervorrufen, nämlich dass gleichmäßig konvexe Räume reflexiv sind?

Nach seiner Ankunft in Südamerika schrieb Alexander von Humboldt an seinen zwei Jahre älteren Bruder Wilhelm daheim in Berlin: „Bonpland versichert, dass er von Sinnen kommen werde, wenn die Wunder nicht bald aufhören" (aus Klencke 1876, Seite 85). Dies geschah angesichts der Pracht und Fülle des Dschungels am Orinoco. In der Mathematik sind wir von einer ebensolchen Fülle und Pracht umgeben, nur muss man seinen Blick schärfen und die richtigen Fragen stellen, um sie wahrzunehmen und zu bestaunen.

Wie bringen wir also das Fragen und das Staunen zurück in die Schulzimmer? Die Gestaltung des Unterrichts liegt in der Hand der Lehrerinnen und Lehrer: Zeigen wir ihnen den Wert des Fragens und des Staunens, so können sie dies im Unterricht weitergeben. Damit kommt der Lehrerinnen- und Lehrerausbildung eine Schlüsselrolle zu. Betrachten wir die obige Frage in etwas weiterem Rahmen und werfen einen Blick auf die Ausbildung von Lehrkräften der Sekundarstufe II.

1.2 Welches mathematische Handwerkszeug brauchen die Lehrkräfte von morgen?

Antworten auf die Frage, welches mathematische Handwerkszeug die Lehrkräfte von morgen brauchen, können und müssen auf ganz verschiedenen Ebenen ansetzen. Lehrkräfte von morgen werden Jugendliche von morgen unterrichten, die ihrerseits übermorgen unsere Gesellschaft prägen werden: Welche Unterrichtsinhalte werden dann relevant sein? Wie hoch muss das fachliche Niveau der Lehrkräfte sein? Welchen Anteil soll die mathematische Fachausbildung im Vergleich zu den didaktischen, pädagogischen und berufspraktischen Elementen der Lehramtsausbildung haben? Aber vor allem: Welcher Blick auf die Mathematik soll bei der Lehrerinnen- und Lehrerausbildung vermittelt werden?

1.2.1 Niveau der fachlichen Ausbildung

1908 erschien in Göttingen die *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus.* In diesem dreibändigen Werk spannt Felix Klein den Bogen von der Arithmetik, Algebra und Analysis bis hin zur Geometrie und schließlich zur Präzisions- und Approximationsmathematik. Allein das Inhaltsverzeichnis liest sich wie eine Speisekarte bei Bocuse. In jeder Zeile zeigt sich die meisterliche Handschrift eines führenden Mathematikers. Die Idee, dass Lehrkräfte den Stoff wissenschaftlich weit über das Schulniveau hinaus beherrschen müssen, um eine echte Vision des Fachs, dessen Denkweise und Bedeutung sowie seine innig verknüpften Inhalte im Unterricht vermitteln zu können, ist heute so aktuell wie damals.

Wer Mathematik auf gymnasialem Niveau unterrichten und den Schülerinnen und Schülern nicht nur den Stoff, sondern eine moderne Perspektive des Fachs vermitteln will, muss das Zentralfeuer der Mathematik gesehen haben und in Theorie und Anwendungen sattelfest sein. Insbesondere ist eine hohe Fachkompetenz erforderlich. Selbst scheinbar einfache Begriffe und Fragen der Mathematik sind nicht immer leicht zu verstehen: Was ist eine natürliche Zahl (Peano-Axiome)? Was ist eine reelle Zahl (Nichtstandardmodelle)? Warum kann man einen Winkel mit Zirkel und Lineal in zwei gleiche Teile teilen, nicht aber in drei (Galois-Theorie)? Was ist Wahrscheinlichkeit (Kolmogorow-Axiome)? Gibt es mehr Punkte in der Ebene als auf der Geraden (Cantorsche Mengenlehre)? Warum kann man eine Kugel K in fünf Teile zerlegen und diese Teile durch Verschieben und Drehen in zwei gleich große

Kopien von K verwandeln (Banach-Tarski-Paradoxon)? Was ist ein Beweis (Gödel)? Was ist Krümmung (Riemann)? Ist eine geschlossene Kurve, die in jeder Richtung denselben Durchmesser hat, ein Kreis (Orbiforme)? Wie funktioniert Computertomographie (Radon-Transformation)? Ist die Folge der Obersummen bei einer monotonen Funktion fallend? Welche Kegelschnitte sind ähnlich zueinander? Warum ist Kompaktheit ein so fundamentaler topologischer Begriff? Was ist ein Konfidenzintervall *genau?*

In der Schweiz verfügen Lehrkräfte der Sekundarstufe II über einen universitären Master im Fach, welches sie unterrichten. Das Spektrum reicht dabei vom Nebenfach (mindestens 60 ECTS-Punkte auf Bachelor- und 30-ECTS Punkte auf Masterstufe) bis zur Habilitation. Im ersten Fall können Probleme auftreten, Unterrichtsinhalte fachlich richtig darzustellen, im zweiten Fall fällt es nicht immer leicht, Unterrichtsinhalte stufengerecht zu vermitteln. Die Ausbildung der Lehrkräfte muss sich dieser Problematik annehmen.

Bezogen auf das Niveau der fachlichen Ausbildung von Lehrkräften regte Erich Ch. Wittmann an, Promotionen im Bereich der Elementarisierung von mathematischen Inhalten zu ermöglichen[2]. Seine Behandlung des dritten Hilbertschen Problems untermauert nachhaltig die Machbarkeit und Bedeutung seines Vorschlags (Wittmann 2012). Dass auch weiterhin aktuelle Forschung mit dieser Ausrichtung möglich ist, zeigt das Beispiel des Satzes von Poncelet (Abb. 1.3):

Theorem 1.1. *Seien C_0 und C_1 Kegelschnitte und P ein Polygon mit n Ecken auf C_0, dessen Seiten tangential an C_1 sind. Dann ist jeder Punkt auf C_0, von dem aus zwei Tangenten an C_1 existieren, die Ecke eines ebensolchen Polygons.*

Manche Sätze erscheinen im Rahmen einer abstrakten Theorie, obwohl die Aussagen auch elementar zugänglich wären. Im Fall des Schließungssatzes von Poncelet, der in der projektiven Geometrie beheimatet ist, existieren zahlreiche Beweise, die sich unter anderem auf Abelsche Integrale, Maßtheorie oder elliptischen Funktionen abstützen. Erst vor Kurzem wurde in Halbeisen und Hungerbühler 2015 gezeigt, dass der Satz von Poncelet eine einfache kombinatorische Konsequenz des Satzes von Pascal über Sechsecke ist.

1.2.2 Welche Unterrichtsinhalte sollen im Gymnasium vermittelt werden?

Felix Klein forderte (Klein 1924, Seite 5)

- die Erziehung zur Gewohnheit funktionalen Denkens,
- eine Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens,
- die Einführung der Infinitesimalrechnung als unverzichtbares Unterrichtsthema.

---

[2] Vortrag von Erich Ch. Wittmann am 8. Dezember 2009 an der RWTH Aachen und private Korrespondenz.

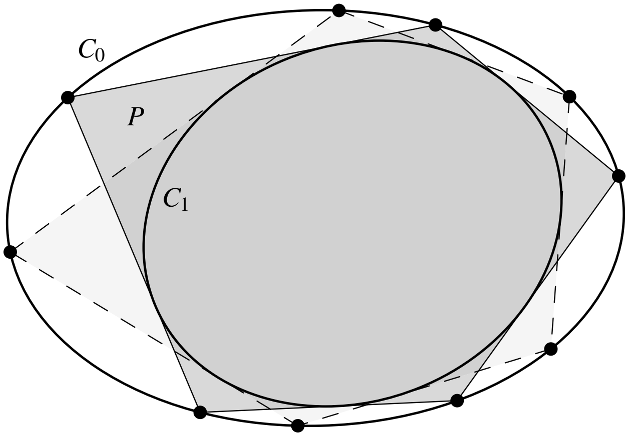


Abb. 1.3 Illustration zum Satz von Poncelet: Schließt sich das Polygon in *einer* Position, so schließt es sich in *jeder* Position.

Alle drei Punkte wurden in der Folge realisiert. Nach der Abschaffung der darstellenden Geometrie beklagen Hochschulen heute jedoch einen zunehmenden Mangel an Raumvorstellung bei den Studierenden. So konnten 2010 nur 36 % der neueintretenden ETH-Studierenden die Frage beantworten, wie viele Ecken ein ebener Schnitt durch einen Würfel maximal haben kann (bei den gegebenen Antwortoptionen *3, 4, 6, 8* und *etwas anderes*). Daneben bekommt die Statistik, die für zahlreiche Studienfächer immer wichtiger wird, vielerorts zu wenig Gewicht. Auch mathematische Modellierung fristet eher ein Schattendasein, obwohl bereits einfachste Anwendungen von Differentialgleichungen in der Schule aufzeigen können, wie vielfältig die Anwendungen der Analysis in allen quantitativ arbeitenden Wissenschaften sind. Im Zuge der Schulzeitverkürzung in allen deutschsprachigen Ländern und durch den Wegfall von Mathematikstunden wurde nicht selten die Geometrie drastisch gekürzt. Da elementare Geometrie auch im Fachstudium kaum vorkommt und in der Lehrdiplomausbildung lediglich unter dem Aspekt der Fachdidaktik behandelt wird, besteht die Gefahr, dass in wenigen Generationen grundlegende Kenntnisse in klassischer Geometrie verloren gehen. Dies ist beklagenswert, denn die Geometrie ist seit jeher eine weit offene Eingangspforte zur Mathematik (Abb. 1.4).

1.2.3 Professionswissen

Welchen Anteil sollen die einzelnen Elemente der Lehramtsausbildung haben?

- Fachwissenschaft
- Fachdidaktik

Abb. 1.4 ἀγεωμέτρητος μηδεὶς εἰσίτω (let no one untrained in geometry enter). So lautete das Motto über dem Eingang zur Platonischen Akademie gemäß Elias' Kommentar zu Aristoteles' *Kategorien.* Das Bild zeigt Raffaels Fresko *La scuola di Atene.* (Wikimedia Commons, public domain)

- Berufspraxis
- Pädagogik
- Lehr- und Lernforschung
- Allgemeine Didaktik

In der Praxis beobachtet man folgende Probleme:

- Die allgemeinen Erziehungswissenschaften knüpfen oft wenig ans Fach an.
- Die Fachwissenschaft kümmert sich wenig um didaktische Fragen.
- In den unteren Schulstufen hinkt die Fachausbildung in den MINT-Fächern der pädagogischen Ausbildung hinterher.

Eine bessere Zusammenarbeit zwischen pädagogisch-didaktischer und fachwissenschaftlicher Ausbildung ist anzustreben.

1.2.4 Das Bild der Mathematik in der Schule

Die Mathematik ist eine der ältesten Wissenschaften der Menschheit, mit geradezu atemberaubenden Fortschritten. Daraus ergibt sich eine deutliche Folgerung für den Unterricht: *Die enorme Bedeutung des Faches (etwa im Hinblick auf sein Erklärungspotenzial, seine Art der Erkenntnisgewinnung, seine Einbettung in die Wissenschaftsgeschichte oder auf verschiedene Anwendungen) ist im Unterricht auszuloten und deutlich zu machen*[3].

[3] nach Armin Barth, private Korrespondenz.

Mathematik ist eine in der Geschichte der Menschheit einzigartige und konkurrenzlose Methode zur Erkenntnisgewinnung und zur Vermehrung des Wissens. Ihre Erkenntnisse sind unvergänglich, universell und prägen unser Leben. *Dies muss im Unterricht spürbar werden.*

1.3 Ein Blick zurück in die Geschichte

Werfen wir einen Blick auf die Zeitleiste in Abb. 1.5, in der willkürlich einige wenige Meilensteine der Mathematikgeschichte markiert sind. Auch wenn nur wenige Eckpunkte

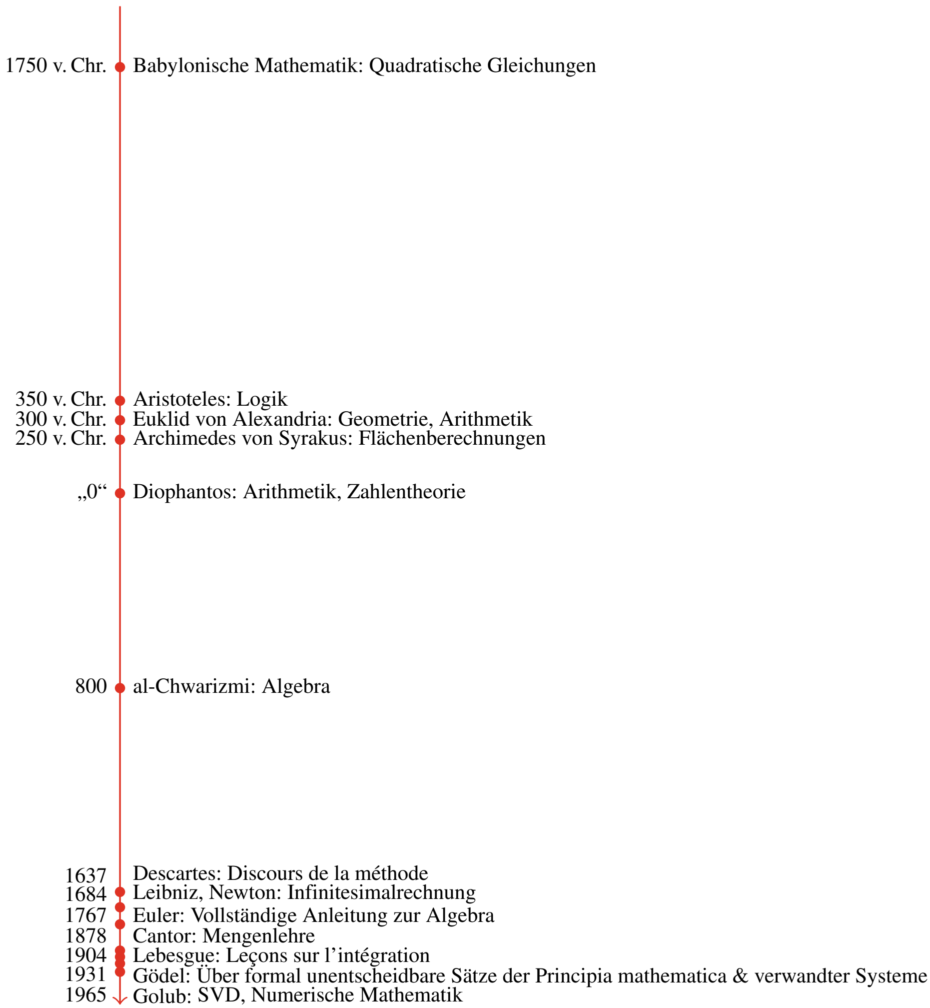


Abb. 1.5 Zeitleiste mit Meilensteinen der Mathematikgeschichte

herausgegriffen wurden, wird doch schon in der bewusst so dargestellten optischen Verdichtung klar, dass der Entwicklung eine enorme Beschleunigung zugrunde liegt. Das mag einmal damit zusammenhängen, dass heute weit mehr Menschen in der Mathematik forschen als zu früheren Zeiten. Dennoch ist es verblüffend, wie lang die elementare Algebra zu ihrer Entwicklung brauchte und wie unglaublich rasch, ja geradezu explosiv, die Entwicklung der weitaus anspruchsvolleren Analysis schließlich erfolgte.

Können wir aus diesen ungleichen Zeiträumen etwas lernen? Haeckel 1866 stellte für die Biologie im Rahmen seiner Rekapitulationstheorie das biogenetische Grundgesetz auf: *Die Ontogenese rekapituliert die Phylogenese.* Das heißt, dass die vorgeburtliche Entwicklung eines Lebewesens (Ontogenese, der Zeitraum zwischen Befruchtung und Geburt), jene Entwicklung der eigenen Stammesgeschichte (Phylogenese) in enorm kurzer Zeit wiederholt. Die Theorie beruht auf der Beobachtung, dass sich Embryonen verschiedener Tierarten in frühen Entwicklungsstadien stark gleichen. Die Embryonen entwickeln stammesgeschichtliche Merkmale, die vor der Geburt wieder verschwinden (beispielsweise Kiemenbogen, Schwanz und Lanugobehaarung).

Das Prinzip lässt sich in gewisser Weise auch auf die Mathematik übertragen: *Das Individuum vollzieht in der Schullaufbahn die Genese der Mathematik nach.* Dabei gilt: Schwierige Etappen der Geschichte sind auch für das Individuum schwierig. Dies zeigt sich exemplarisch am vielschichtigen Begriff der Variable (siehe zum Beispiel Malle und Fischer 1985 oder Malle 1993). Die Zeitleiste in Abb. 1.5 illustriert, wie lang es dauerte, bis die elementare Algebra auf dem Tisch lag. Entsprechend schwer tun sich manche Schülerinnen und Schüler mit dem Gebrauch von Variablen. Erschwerend kommt hinzu, dass Lehrkräfte in ihrer eigenen Biographie den Übergang von der Arithmetik zur Algebra schon längst vollzogen und die damit verbundenen Schwierigkeiten nicht mehr präsent haben. Für erfolgreichen Unterricht ist aber das Wissen der Lehrkraft um Misskonzepte ganz zentral.

Das Clement-Rosnick-Phänomen (Rosnick und Clement 1980) zeigt zudem deutlich, dass viele Menschen die Schule, ja sogar die Universität verlassen, ohne je die eigentlich sanften Höhen der elementaren Algebra erklommen zu haben.

Andererseits machen viele Schülerinnen und Schüler anschließend den Weg durch die Infinitesimalrechnung erstaunlich schnell und leicht, ganz ähnlich wie sich auch die geschichtliche Entwicklung in hohem Tempo vollzog.

Ein anderes Beispiel liefert die lineare Algebra: Historisch dauerte es erstaunlich lang, bis lineare Phänomene im Rahmen von Matrizen, Vektorräumen und linearen Abbildungen formuliert und unter einem gemeinsamen Dach verhandelt werden konnten. Und auch heute noch widmet man in fast jedem mathematisch-naturwissenschaftlichen Studium der linearen Algebra eine ganze Jahresvorlesung.

Felix Klein fasste es einst so zusammen:

> Dieses Grundgesetz, denke ich, sollte auch der mathematische Unterricht, wie jeder Unterricht überhaupt, wenigstens im allgemeinen befolgen: *Er sollte, an die natürliche Veranlagung der Jugend anknüpfend, sie langsam auf demselben Wege zu höheren Dingen und schließlich auch*

zu abstrakten Formulierungen führen, auf dem sich die ganze Menschheit aus ihrem naiven Urzustand zur höheren Erkenntnis emporgerungen hat. (Klein 1924, Seite 290)

Dabei sollen in der Schule freilich nicht alle Irrungen und Wirrungen der Geschichte nachvollzogen werden, sondern, wie von Toeplitz (1949) propagiert, die Genese, das Wie und Warum der Begriffe. Dieser Ansatz verdeutlicht sich in Wagenscheins Dreischritt des genetischen Lehrens und Lernens: genetisch – sokratisch – exemplarisch (Wagenschein 1968).

Im Vergleich zur Mathematik ist die Mathematikdidaktik als Entwicklungs- und Forschungsgebiet noch blutjung. Es ist schwieriger, die Fortschritte der Mathematikdidaktik sichtbar zu machen als die allgegenwärtigen Errungenschaften der Mathematik. Mathematik zu lernen, ist nach wie vor anstrengend. Auch heute noch gilt, was Euklid zu Ptolemaios I. Soter einst sagte: „Es gibt keinen Königsweg zur Mathematik" (Steck, Schönberger und Abderhalden 1945, Seite 68).

Dennoch hat die Mathematikdidaktik unbestreitbare und tiefgreifende Erkenntnisse hervorgebracht. Wir wissen heute *viel* besser über die Mechanismen menschlichen Lernens Bescheid als noch vor einem Jahrhundert. Dies belegt auch die enorm umfangreiche Literatur, die sich mit diesen Themen befasst.

1.3.1 Wie sieht die heutige Realität aus?

Wenn Mathematik so einzigartig und spannend ist und wir so viel über das Lehren und Lernen wissen, warum bekommen wir Rückmeldungen wie diese von Schülerinnen und Schülern?

- In Mathe war ich nie gut.
- Mathe ist langweilig.
- Matheunterricht ist der einzige Ort im Universum, wo jemand 388,47 Melonen kauft.
- Mathe – das sind nur langweilige Formeln.
- Mathe ist längst fertig, da gibt es nichts Neues.
- Das werd ich eh nie wieder brauchen.
- Mathe – da kann ich doch nur Lehrer werden.
- Mathe ist was für Nerds und Überflieger.
- Mathe ist unnütz.
- Wozu Mathe büffeln, wenn ich mit Sport kompensieren kann?

Der Mathematikunterricht in der Schule und Studium läuft in der Regel so ab, dass *die Lehrkraft eine Frage oder ein Problem vorgibt.* Dieses vorgelegte Problem wird dann behandelt. Geübt werden schwerpunktmäßig Wissens- und Kompetenzaufbau sowie Problemlösefähigkeiten. Aber vor dem Problemlösen steht eine andere Frage, der nicht immer die Aufmerksamkeit geschenkt wird, die sie verdient: *Woher kommen die Fragen und Probleme* *eigentlich?* Wird diese Frage nicht gestellt, erhalten die Lernenden mit der Zeit den Eindruck, dass alle Fragen und Probleme (und ihre Lösungen) schon da sind, dass eine finstere Macht im Universum über alle mathematischen Fragen und Antworten verfügt und diese eigentlich nur dazu da sind, die Unterrichtsstunden zu füllen. Es gibt zwar sehr gute Ansätze, gerade auch in der Didaktik des Unterrichts auf den unteren Schulstufen, bei denen dieses Muster durchbrochen wird, indem Schülerinnen und Schüler dazu ermuntert werden, selber Aufgaben zu erfinden und Fragen zu formulieren. Auch beim Problemlösen legt die moderne Didaktik Wert darauf, dass Schülerinnen und Schüler erkennen, dass die richtigen Fragen den Weg zur Lösung weisen. Diese Ansätze bleiben aber oft in einem recht engen Korsett oder sind auf ein bestimmtes Ziel ausgerichtet.

Echte mathematische Fragen stellen sich die Lernenden kaum je selber. Sie sind vielfach gar nicht in der Lage, kreativ eine eigene, interessante mathematische Frage zu erfinden. Fragen stellen wird weder in der Schule noch im Studium noch in der Lehrerbildung geübt. Dies ist ein schmerzliches Defizit.

An der ETH wurde folgender Versuch durchgeführt: 20 Studierenden im Lehrdiplom wurden Bilder alter mathematischer Modelle vorgelegt (Abb. 1.6). Die Studierenden wurden daraufhin beauftragt, zu einem der Modelle ein Thema für eine Semesterarbeit zu formulieren. Das Resultat war durchaus ernüchternd.

Es ist gewiss richtig und wichtig, dass die Mathematik sich mit dem Lösen von Problemen befasst. In der didaktischen Forschung gibt es dementsprechend eine reichhaltige Literatur zum Problemlösen. Aber: *Die eigentliche Triebfeder der Mathematik sind nicht Lösungen von Problemen, sondern gute Fragen. Eine gute mathematische Frage ist oft entscheidender als ihre Lösung.* Ein Blick zurück in die Geschichte der Mathematik mag dies im Folgenden an einigen ausgewählen Beispielen illustrieren.

1.3.2 Fragen und Staunen als Triebfedern der Mathematik

Für die Mathematikentwicklung bedeutsame Fragen waren nicht selten aus heutiger Sicht von fast rührender Naivität, und kaum jemand zog zu ihrer Zeit die scheinbar offensichtliche

Abb. 1.6 Modelle, dokumentiert im Digitalen Archiv Mathematischer Modelle, TU Dresden. (ETHZ-MATH-MOD-0001, ETHZ-MATH-MOD-0004, ETHZ-MATH-MOD-0006, ETHZ-MATH-MOD-0023, ETHZ-MATH-MOD-0029, CC0, Björn Allemann, ETH-Bibliothek)

Antwort in Zweifel. Umso größer war das Erstaunen der Fachwelt, als die überraschenden Resultate bekannt wurden.

Beispiel (Stammbach 2018a) Am 29. November 1873 schrieb Cantor an Dedekind in einem Brief

> […] so ist die Frage einfach die, ob sich die natürlichen Zahlen den reellen Zahlen so zuordnen lassen, dass zu jedem Individuum des einen Inbegriffes ein und nur eines des anderen gehört?

Und bereits am 5. Januar 1874 folgte die nächste Frage:

> Lässt sich eine Fläche (etwa ein Quadrat mit Einschluss der Begrenzung) auf eine Linie (etwa eine gerade Strecke mit Einschluss der Endpunkte) eindeutig beziehen, so dass zu jedem Puncte der Fläche ein Punct der Linie und umgekehrt zu jedem Puncte der Linie ein Punct der Fläche gehört?

Bei der Betrachtung dieser Fragen entwickelte Cantor in der Folge die Mengenlehre.

Beispiel (Stammbach 2018b) Am 2. Juli 1877 fragte Dedekind:

> […] ob sich Teilmengen von euklidischen Räumen unterschiedlicher Dimension bijektiv und bistetig aufeinander abbilden lassen.

1911 entwickelte Brouwer bei der Beantwortung dieser Frage die Grundlagen der algebraischen Topologie.

Beispiel Manche berühmt gewordene Fragen zogen sich durch die Jahrhunderte:

- Wie kann man einen allgemeinen Winkel mit Zirkel und Lineal dritteln?
- Das Delische Problem: Wie lässt sich die Kantenlänge eines Würfels vom Volumen 2 mit Zirkel und Lineal konstruieren?
- Wie lassen sich die Lösungen von Polynomgleichungen vom Grad > 4 durch Wurzeln ausdrücken?

Die falschen Fragen verhinderten jahrhundertelang den mathematischen Fortschritt. Nachdem man sich vom *Wie?* schließlich zum *Warum geht das nicht?* durchgerungen hatte, führten diese Fragen zur Galois-Theorie (Wolfart 2011).

Beispiel (Lebesgue 1901) Henri Lebesgue ging in seiner Arbeit in den *Comptes Rendus* vom 29. April 1901 folgender Frage nach:

> Welche Funktionen besitzen eine Stammfunktion?

Die Betrachtung dieser Frage führte ihn zum Lebesgue-Integral.

Beispiel Lange Zeit bewegte auch diese Frage die Gemüter:

> Folgt das Parallelenaxiom aus den übrigen Axiomen der euklidischen Geometrie?

Die Existenz einer Parallelen folgt recht leicht aus den übrigen Axiomen, aber die Eindeutigkeit der Parallelen ist von ihnen unabhängig: Die obige Frage führte zur Entdeckung der hyperbolischen Geometrie (Hilbert 1987).

Beispiel Zenon quälte beim Paradoxon des fliegenden Pfeils die Frage:

> Was ist Bewegung?

Diese Frage führte Newton schließlich zur Infinitesimalrechnung, und Zenons Pfeil-Paradoxon hat wohl auch die Nichtstandardanalysis inspiriert (Koch 2017).

Beispiel Johann Bernoulli fragte in *Acta Eruditorum* im Juni 1696 (Bernoulli Anno MDCXCVI, Seite 269):

> Auf welcher Bahn gleitet ein Massenpunkt unter dem Einfluss der Schwerkraft reibungsfrei möglichst schnell von A nach B?

Diese Frage nach der Brachistochrone wurde zur Geburtsstunde der Variationsrechnung.

Beispiel Ralph Merkles Frage, bekannt als Merkles Puzzle (Merkle 1982), lautete:

> Können zwei Personen in aller Öffentlichkeit ein Geheimnis austauschen?

Diese Frage wurde von Whitfield Diffie und Martin Hellman 1976 (und schon vorher vom britischen Nachrichtendienst) gelöst (Diffie und Hellman 1976) und bildet die Grundlage der modernen Public-Key-Kryptographie.

Gute mathematische Fragen müssen durchaus nicht so weltbewegend sein wie die obigen Beispiele. Aber was ist denn überhaupt eine gute Frage?

- Sie ergibt sich häufig daraus, dass man einen vertrauten Gegenstand aus einem neuen Blickwinkel betrachtet.
- Sie zeichnet sich dadurch aus, dass sie im ersten Moment verblüfft und im zweiten Moment zum Nachdenken anregt.
- Sie hat eine überraschende Antwort und einen hübschen Lösungsgedanken.
- Sie hat das Potential, die Betrachterin und den Betrachter staunen zu lassen.

Gute Fragen tragen in sich also ähnliche Qualitäten wie gute Aufgaben.

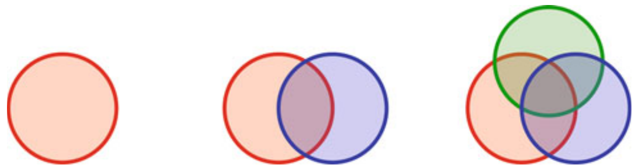


Abb. 1.7 Venn-Diagramme für eine, zwei und drei Mengen

Ludwig Wittgenstein bemerkte, dass gewisse Begriffe nicht hinreichend erfasst werden können, ohne dass sich der Verstand beim Versuch einer Definition Beulen holt (Wittgenstein 1977). Deshalb soll auch hier anhand einiger Beispiele illustriert werden, was eine gute mathematische Frage ausmacht:

Beispiel Wie zeichnet man Venn-Diagramme?

Um die elementaren Mengenoperationen, wie Vereinigung, Durchschnitt, Komplement, symmetrische Differenz etc., zu visualisieren, hat John Venn (1834–1923), ein englischer Mathematiker und anglikanischer Geistlicher, die heute nach ihm benannten Diagramme untersucht. Ursprünglich hat diese Diagramme bereits Leonhard Euler eingeführt.

Unter dem Schlagwort *Neue Mathematik* wurde in den 1960er und 1970er Jahren in zahllosen Ländern der Mathematikunterricht in der Schule reformiert. Dabei machte der traditionelle Rechenunterricht einer Beschäftigung mit abstrakten Strukturen Platz[4]. Insbesondere zog die (elementare) Mengenlehre in die Schulstuben ein. Seither kennt jedes Kind die Venn-Diagramme, wenngleich die Reform nach wenigen Jahren aus guten Gründen weitgehend rückgängig gemacht worden war.

Für $n = 1, 2, 3$ Mengen ergeben sich die bekannten Bilder, wie in Abb. 1.7 dargestellt. Versucht man, für $n = 4$ Mengen das Muster naiv fortzusetzen, erkennt man rasch durch Nachzählen, dass man auf diese Weise nur 14 statt $2^4 = 16$ Gebiete erhält: Die Mengen $A_1 \cap A_3 \setminus (A_2 \cup A_4)$ und $A_2 \cap A_4 \setminus (A_1 \cup A_3)$ fehlen (siehe Abb. 1.8a).

Mit Kreisen lässt sich kein Venn-Diagramm mit $n > 3$ Mengen realisieren. Lässt man konvexe Mengen zu, findet man leicht noch ein achsensymmetrisches Venn-Diagramm für vier Mengen (Abb. 1.8b). Venn gab auch ein sehr schönes Rezept an, wie Diagramme für eine beliebige Anzahl n von Mengen gezeichnet werden können. Diese Diagramme weisen dann allerdings keine Symmetrie mehr auf. 1963 fand David W. Henderson als College-Student den folgenden Satz:

Theorem 1.2 (Henderson 1963) *Bei einem Venn-Diagramm mit Rotationssymmetrie für n Mengen ist n notwendigerweise eine Primzahl.*

---

[4] So gab etwa der Boubakist Jean Dieudonné 1959 auf einer Internationalen Konferenz der OEEC (heute OECD) im Kloster Royaumont in Asnières-sur-Oise die Parole „Nieder mit Euklid – Tod den Dreiecken!“ aus (Organisation for European Economic Co-operation 1961).

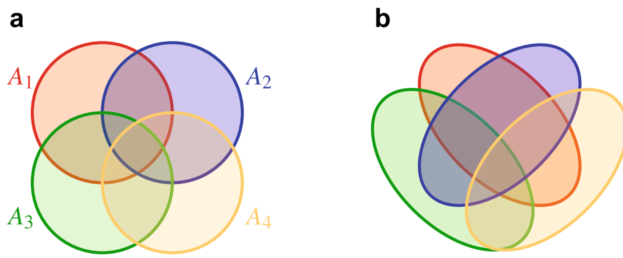


Abb. 1.8 Das Diagramm **(a)** erfasst nicht alle möglichen Relationen von vier Mengen, das Diagramm **(b)** hingegen schon.

Der Beweis von Henderson ist einfach, elegant und kurz. Allzu verführerisch vielleicht, denn bis ihn jemand kritisch hinterfragte, dauerte es über ein Jahrzehnt. Tatsächlich bemerkte erst 1975 Branko Grünbaum, dass Hendersons Beweis eine Lücke aufwies, die sich nicht reparieren ließ: Grünbaum 1975 gab nämlich ein Venn-Diagramm mit Rotationssymmetrie für vier Mengen an, und vier ist definitiv keine Primzahl (Abb. 1.9a). Hendersons Satz ist nur korrekt, wenn man verlangt, dass alle Schnittmengen zusammenhängend sind (Wagon und Webb 2008). Und erst Griggs, Killian und Savage 2004 entdeckten, dass tatsächlich für jede Primzahl n ein rotationssymmetrisches Venn-Diagramm mit dieser Anzahl von Mengen existiert. Für fünf Mengen lässt sich ein entsprechendes Venn-Diagramm noch mit Ellipsen realisieren (Abb. 1.9b). Für größere Primzahlen muss man allerdings zu nicht konvexen Mengen greifen. Für die ganze, wahrlich staunenswerte Geschichte der Venn-Diagramme verweisen wir auf Edwards 2004.

Beispiel Gibt es ein homogenes Stehaufmännchen?

Ein Stehaufmännchen ist ein konvexer Körper mit nur einer stabilen und einer labilen Gleichgewichtslage. Diese Eigenschaft wird in der Praxis üblicherweise erreicht, indem

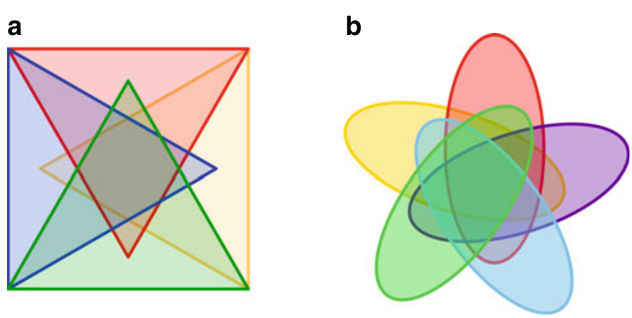
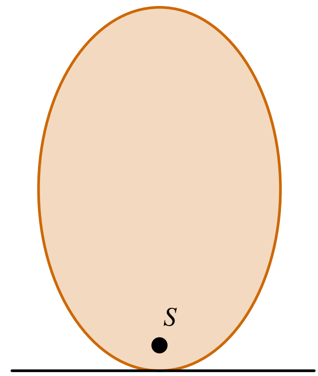


Abb. 1.9 **(a)** Grünbaums Gegenbeispiel, **(b)** ein rotationssymmetrisches Venn-Diagramm für fünf Mengen

Abb. 1.10 Ein klassisches Stehaufmännchen mit einer innen montierten Metallkugel



eine schwere Metallkugel im Inneren des Körpers den Schwerpunkt S in die Nähe des Randes rückt (Abb. 1.10). Eine interessante Frage ist nun: Geht das auch ohne diesen Trick? In zwei Dimensionen lässt sich diese Frage noch recht einfach untersuchen: Hier gilt der folgende erstaunliche Satz:

Theorem 1.3 (Domokos, Papadopulos und Ruina 1994). *Jede konvexe Kurve hat bezüglich ihres natürlichen Flächenschwerpunktes mindestens zwei stabile Gleichgewichtspunkte. Das heißt, es gibt kein ebenes Stehaufmännchen bezüglich des natürlichen Flächenschwerpunktes.*

Der Satz ist nicht schwer zu beweisen, wenn man den Ursprung eines Polarkoordinatensystems im Flächenschwerpunkt platziert.

Aber wie sieht es in drei Dimensionen aus? Die Frage war lange Zeit offen. 1995 vermutete der russische Mathematiker Vladimir Arnold, dass es dreidimensionale homogene Stehaufmännchen geben könnte. Gefunden wurde ein solcher Körper aber erst 2006, und zwar von den beiden ungarischen Mathematikern Gábor Domokos und Péter Várkonyi (Várkonyi und Domokos 2006). Sie tauften diesen sensationellen Körper *Gömböc*[5] (Abb. 1.11a): Erstaunlicherweise findet man eine derartige Form mit der für diese Tierart äußerst sinnigen Funktion bei der indischen Sternschildkröte (Abb. 1.11b): Purzelt sie auf ebener Fläche auf den Rücken, rollt sie nach kurzem Wackeln wieder auf die Füße.

Beispiel Was tun Polaren, deren Pol auf einem Kegelschnitt liegen?

Betrachten wir dieses Beispiel einer interessanten Frage aus der klassischen Geometrie. Hier gilt der wunderschöne Hauptsatz der Polarentheorie von Philippe de La Hire aus dem Jahr 1685 (Abb. 1.12a).

[5] Der Name leitet sich vom ungarischen Wort *gömb* für „Kugel“ ab. Zudem verwendet man auf ungarisch *gömböc* für „Presswurst“ oder „Knödel“.

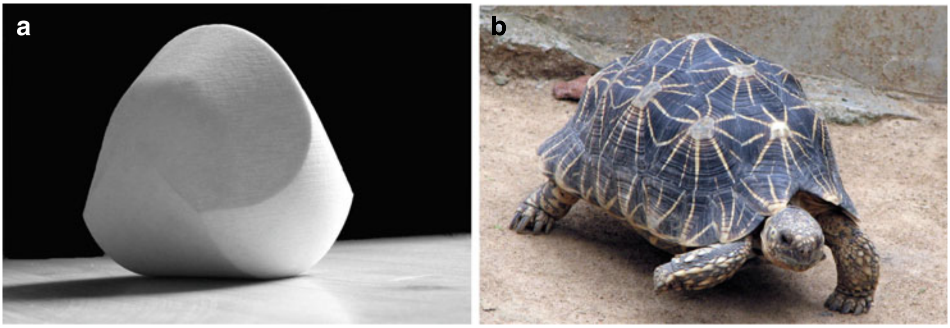


Abb. 1.11 (**a**) Gömböc. (**b**) Sternschildkröte. (a: Wikimedia Commons, public domain, Gábor Domokos. b: Wikimedia Commons, CC0, Deepugn)

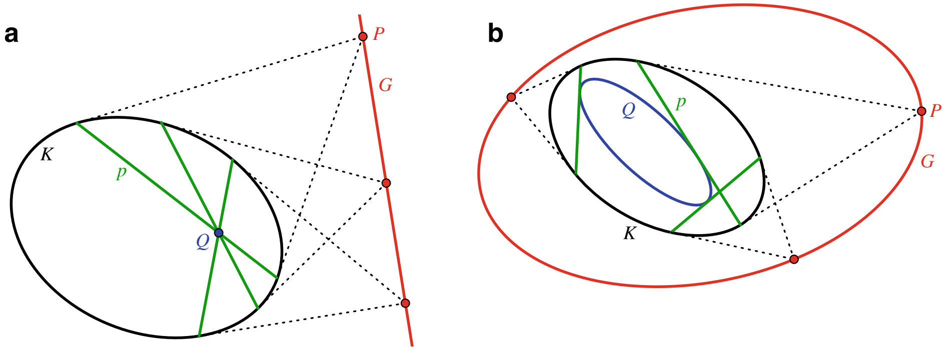


Abb. 1.12 Der Satz von de La Hire (**a**) und seine Verallgemeinerung (**b**)

Theorem 1.4 *Bewegt sich ein Punkt P entlang einer Geraden G, so gehen die Polaren p von P bezüglich eines Kegelschnitts K alle durch einen Punkt, nämlich durch den Pol Q von G bezüglich K.*

Eine interessante Frage ergibt sich nun wie folgt: Die Gerade G ist ein entarteter Kegelschnitt. Was tun die Polaren p, wenn P entlang eines nicht entarteten Kegelschnitts läuft?

Theorem 1.5 (Halbeisen und Hungerbühler 2016) *Die Polaren p eines beliebigen Punktes P auf einem Kegelschnitt G bezüglich eines Kegelschnitts K sind tangential zu einem weiteren Kegelschnitt Q (Abb. 1.12b). Stellt man die Kegelschnitte projektiv mittels 3×3-Matrizen dar, so gilt: $Q = GK^{-1}G$.*

Hier verwendet man projektive Koordinaten $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, sodass für eine 3×3-Matrix G die Kegelschnittgleichung $\langle x, Gx \rangle = 0$ lautet. Die spitzen Klammern bedeuten das euklidische

Skalarprodukt. In diesem Formalismus ist der Beweis des Theorems in wenigen Zeilen erbracht; ein rein geometrischer Beweis ist noch nicht bekannt.

Beispiel Wann ist ein Stück Papier flach faltbar?

Diese durchaus alltagstaugliche Frage stellt sich im Zusammenhang mit dem Falten von Papier oder Pappe. Gerade die Industrie ist sehr erfinderisch, wenn es darum geht, Verpackungen zu entwerfen, die sich vor oder nach Gebrauch flach zusammenfalten lassen, zum Beispiel eine typische Supermarkttüte aus Papier oder eine Pommestüte.

Bei der Supermarkttüte stellt sich die Frage, wie lokal gefaltet werden muss, damit die gefaltete Tüte flach ist. Obwohl diese Fragen im Zusammenhang mit Origami gewiss schon sehr alt sind, hat sich die Mathematik ihrer erst seit wenigen Jahrzehnten angenommen. Die bahnbrechenden Arbeiten sind nicht leicht aufzufinden, da sie oft nicht in mathematischen Zeitschriften erschienen sind, sondern etwa in *Top Origami,* der japanischen Version von *Origami for the Connoisseur* oder im *British Origami Magazine.* Eine zentrale Aussage der Origami-Mathematik lautet:

Theorem 1.6 *Seien M die Anzahl Bergfalten und V die Anzahl Talfalten, die in einem Punkt zusammenlaufen (Abb. 1.13). Dann ist das Papier dort flach faltbar genau dann, wenn*

1. *sich M und V genau um 2 unterscheiden, d. h. $|M - V| = 2$ (Abb. 1.13a), und*
2. *die alternierende Winkelsumme null ist: $\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \ldots + \alpha_{2n-1} - \alpha_{2n} = 0$ (Abb. 1.13b).*

Die Aussage über die Winkel geht auf Kawasaki 1989 und Justin 1994 zurück. Sie wurde jedoch schon früher in allgemeinerem differentialgeometrischem Rahmen von Robertson 1977/1978 beweisen. Der zweite Teil des Satzes wurde unabhängig Jun Maekawa (in Kasahara und Takahama 1987, Seite 29), Justin (1986) und Murata 1966 entdeckt. Die Beweise sind verblüffend einfach. Wir ermuntern die Leserschaft, es einmal selbst zu versuchen.

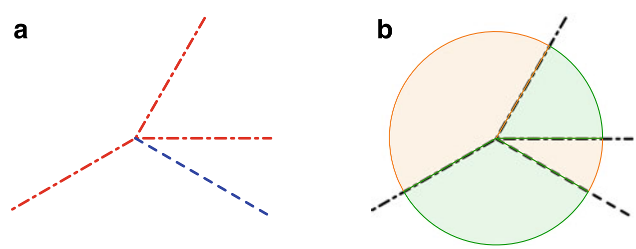


Abb. 1.13 **(a)** Illustration zu Theorem 1.6.1. **(b)** Illustration zu Theorem 1.6.2. Talfalten sind gestrichelt, Bergfalten strichpunktiert dargestellt.

Beispiel Wie löst man eine quadratische Gleichung?

Die Lösung der quadratische Gleichung gehört seit Menschengedenken zum gymnasialen Kerngeschäft. Generationen von Schülerinnen und Schülern haben zusammen mit ihren Lehrkräften die Mitternachtsformel verinnerlicht. Es wird berichtet, dass die Mitternachtsformel so heißt, weil von den Schülerinnen und Schülern erwartet wird, dass sie die Formel sogar noch auswendig hersagen können müssen, wenn sie nachts aus dem Schlaf gerissen werden. Nun ist das Auswendiglernen der natürliche Feind des Verstehens. Wohl aus diesem Grund empfahl Hermann Weyl seinen Studentinnen und Studenten, diese Formel zu „ent-lernen".

Man findet quadratische Gleichungen und deren Lösungen auf der Keilschrifttafel BM 13901, die heute im Britischen Museum verwahrt wird. Sie wird auf das 18. vorchristliche Jahrhundert datiert. Auch die griechische, frühe indische und arabische Mathematik war in der Lage, quadratische Gleichungen zu lösen. Dabei stand jedoch immer die einzelne Gleichung mit konkreten numerischen Koeffizienten im Vordergrund, und die Lösung wurde als Algorithmus verbal beschrieben. Die Lösungsformel in ihrer heutigen Gestalt, ausgedrückt durch die Koeffizienten der Gleichung, erschien erstmals in Descartes' *Discours de la méthode* (Descartes 1637, Seite 303).

Nachdem die quadratische Gleichung nun bereits jahrtausendelang ausgelutscht wurde, was könnte es da heute noch für interessante Fragen geben?

Ausgehend von der allgemeinen Normalform

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{C}, \; a \neq 0, \tag{1.1}$$

gelangt man durch quadratisches Ergänzen[6] zur Mitternachtsformel

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

In der Schule geht man gelegentlich von der vereinfachten Normalform aus:

$$x^2 - 2px + q = 0, \quad p, q \in \mathbb{C}$$

Dadurch vereinfacht sich die Lösungsformel zu

$$x_{1,2} = p \pm \sqrt{p^2 - q}.$$

Weit weniger bekannt ist die Lösungsformel

$$x_{1,2} = \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

[6] Das funktioniert übrigens in einem Körper der Charakteristik 2 nicht, denn dort gilt $(x + \alpha)^2 = x^2 + \alpha^2$: Wie löst man dort die quadratische Gleichung?

für die quadratische Gleichung der Form (1.1). Diese Formel hat den Vorteil, dass sie auch im Fall $a = 0$, d. h., wenn die quadratische zu einer linearen Gleichung degeneriert, eine korrekte Lösung liefert (zumindest im Fall $b \neq 0$). Aus diesem Grund wird diese Lösungsformel gern in numerischen Verfahren eingesetzt, wie etwa in Mullers Algorithmus zur Bestimmung von Nullstellen mittels Approximation der Funktion durch quadratischen Funktionen (Muller 1956). Auch die folgende Lösungsformel ist in Gebrauch:

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}\tan\alpha, \quad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}\cot\alpha, \quad \text{mit } \tan 2\alpha = \frac{2\sqrt{-ac}}{b} \tag{1.2}$$

(Für $ac > 0$ gibt es eine entsprechende Formel mit hyperbolischen Funktionen.) Auf den ersten Blick scheint es unvernünftig, trigonometrische Funktionen für die Lösung einer quadratischen Gleichung einzusetzen. Man bedenke allerdings, dass für die Lösung von Gleichungen dritten und vierten Grades trigonometrische Funktionen unausweichlich werden. Für Gleichungen fünften Grades sind dann sogar elliptische Modulfunktionen, die Jacobische Thetafunktion oder hypergeometrische Funktionen nötig. Zudem sind die Formeln (1.2) in der Numerik beliebt, weil sie numerisch stabil sind, im Gegensatz zur Formel (1.1), bei der verheerende Auslöschungseffekte auftreten können (Forsythe 1970).

Geht man von der homogenisierten quadratischen Gleichung

$$x^2 - 4ux + 4v^2 = 0, \quad u, v \in \mathbb{C}$$

aus, ergibt sich eine besonders symmetrische Lösungsformel (Hungerbühler 2020):

$$x_{1,2} = (\sqrt{u+v} \pm \sqrt{u-v})^2$$

1.4 Plädoyer für eine Kultur des Fragens

Die Erfahrung zeigt, dass viele Studierende vollkommen baff sind, wenn man von ihnen verlangt, für eine Semesterarbeit selber eine Frage zu einem Thema zu erfinden. Manche reagieren sogar ein wenig gereizt („Ich muss ja schon die Arbeit schreiben, nun soll ich auch noch das Thema selber überlegen?“), weil dieses Vorgehen so gar nicht dem gewohnten *contrat didactique* entspricht: Die Lehrerin oder der Lehrer stellt die Frage, und ich antworte.

Es braucht dann gelegentlich ein wenig Überzeugungsarbeit mit Erklärungen und Beispielen, aber Studierende, die sich darauf einlassen, sind bald Feuer und Flamme, wenn sie merken, wie anregend das eigene Fragen ist. Macht man im Rahmen von Seminaren oder Vorlesungen Übungen zum Fragenstellen, so führt dies bei nicht wenigen Studierenden zu einem eigentlichen Kreativitätsschub und zu Freude am Forschen.

1.4.1 Fragen stellen kann und soll man üben

Eine Lehrperson kann für sich das mathematisch kreative Fragen üben, indem sie den jeweils aktuellen Unterrichtsgegenstand hinterfragt. Einige Beispiele:

- Die Winkelhalbierenden im Dreieck schneiden sich in einem Punkt. Was tun sie im Viereck?
- Behandelt werden die Fermat-Torricelli-Punkte im Dreieck. Der innere Fermat-Punkt minimiert bei Dreiecken, deren Winkel alle kleiner als 120° sind, die Summe der Abstände zu den Ecken. Hat auch der äußere Fermat-Torricelli-Punkt eine Extremaleigenschaft?
- Abbildungen, welche den Abstand erhalten, sind Kongruenzabbildungen. Gilt das auch für Abbildungen, welche nur den Abstand 1 erhalten?

In der Ausbildung von Lehrpersonen, aber auch im Fachstudium oder in der Schule können eigentliche Fragenseminare eingerichtet werden: Nachdem man historisch bedeutsamen Fragen und den durch sie eingeleiteten Entwicklungen nachgespürt hat, denken sich die Studierenden der Seminargruppe (oder, in angepasstem Rahmen, die Schülerinnen und Schüler einer Klasse) eigene Fragen aus. Diese Fragen entstehen selten spontan während der Veranstaltung. Sie reifen vielmehr über Tage oder gar Wochen dazwischen. Die vorgeschlagenen Fragen werden dann in der Präsenzveranstaltung im Hinblick auf die in Abschn. 1.3.2 aufgestellten Kriterien diskutiert und verglichen. In der Schule kann eine solche Frage im Unterricht dann gegebenenfalls auch zum Ausgangspunkt für *inquiry-based learning* sein. Klassischerweise geht man dabei im Mathematikunterricht eher von einem praktischen Problem aus, bei dessen Bearbeitung forschend Lernfortschritt erzielt wird (siehe zum Beispiel Dewey 1938 oder Artigue und Blomhøj 2013). In einem Fragenseminar geht es aber nicht in erster Linie darum, die Fragen zu beantworten, sondern um einen Wechsel der Perspektive, hin zu einer Kultur, bei der Studierende oder angehende Lehrkräfte zu dem Punkt gelangen, an dem sie selber Fragen zu stellen beginnen und deren Qualität und Potential einschätzen können.

Richard Feynman schlug übrigens vor, immer ein Duzend gute Fragen im Kopf herumzutragen und mit jeder neu erlernten Technik abzugleichen: Früher oder später landet man einen Treffer und kann eine dieser Fragen beantworten (Rota 1997, Seite 202).

1.4.2 Den Blick für Fragen schärfen

Es gibt einige Standardtechniken, die auch einer ungeübten Person erlauben, sich an interessante Fragen heranzutasten. Betrachtet man einen mathematischen Gegenstand oder eine Aussage, frage man sich:

- Gilt auch die Umkehrung? Wenn nicht, unter welchen zusätzlichen Bedingungen? Ein Beispiel: Ein Kreis hat in jeder Richtung denselben Durchmesser. Ist umgekehrt eine konvexe Kurve mit dieser Eigenschaft ein Kreis? Die Antwort ist bekanntlich nein, solche Kurven konstanter Breite heißen *Gleichdicks*. Ein Beispiel ist das Reuleaux-Dreieck.
- Lässt sich die Aussage verallgemeinern?
- Gibt es einen interessanten Spezialfall?
- Braucht man wirklich alle Voraussetzungen im Beweis? Werden alle Eigenschaften von einem verwendeten Begriff im Beweis gebraucht? Wenn nicht: Verallgemeinere den Begriff durch Weglassen der nicht gebrauchten Eigenschaften. Welche Eigenschaften hat dieser neue Begriff?
- Wie lautet die Aussage in höheren, tieferen Dimensionen? Was passiert bei anderen Parameterwerten?
- Wie verändert sich ein Problem durch Hinzunahme oder Weglassen von Bedingungen?
- Lässt sich ein Begriff in eine andere Theorie übertragen? Gelten dort analoge Aussagen?

1.4.3 Der Trick mit dem Gauß-Trick

Wir schließen mit einem Beispiel einer spannenden Frage, die ganz konkret im Unterricht eines Lehrdiplomstudierenden entstand: In der Schulstunde wurde der Gauß-Trick zur Berechnung von $s(n) = \sum_{k=1}^{n} k$ in der üblichen Weise behandelt:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & 1 & + & 2 & + & 3 & + \ldots + & n & = & s(n) \\
 & & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + \ldots + & 1 & = & s(n) \\
\hline
n(n+1) & = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + \ldots + & (n+1) & = & 2s(n) \\
\hline
\end{array}
$$

Im Gespräch entstand die Idee zur Frage: *Lässt sich auch die Summe $q(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2$ der Quadrate der natürlichen Zahlen von 1 bis n mit einem Gauß-Trick berechnen?* Die Idee zur Beantwortung ist bestechend und staunenswert. Man schreibt die Summe $q(n)$ in Form eines Dreiecks (links in der Darstellung unten), indem man $k^2 = k + k + \ldots + k$ in k Summanden in die Zeile k des Dreiecks schreibt. Dann wird das Dreieck um 120° gedreht und zum ersten Dreieck addiert und anschließend noch einmal um 120° gedreht und wieder addiert (siehe Darstellung unten). Wenn man die Einträge in den drei Dreiecken in Zeile i, Position j addiert, ergibt sich jedesmal die Summe $2n + 1$ (man legt die drei Dreiecke sozusagen übereinander):

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & & n & & n \\
2+2 & & \ldots & & \ldots \\
3+3+3 & + & n+\ldots+3 & + & 3+\ldots+n \\
\ldots & & n+\ldots+3+2 & & 2+3+\ldots+n \\
n+n+n+\ldots+n & & n+\ldots+3+2+1 & & 1+2+3+\ldots+n
\end{array}
$$

Da es im Dreieck $s(n)$ Positionen gibt, erhält man $s(n)(2n + 1)$ als Gesamtsumme, also $3q(n) = (2n + 1)s(n)$ und somit $q(n) = \frac{1}{6}(2n + 1)n(n + 1)$. Großartig, nicht?!

Einer Hydra gleich ergibt sich just die nächste Frage: Lässt sich mit dieser Technik auch die Summe der n-ten Potenzen der natürlichen Zahlen von 1 bis n bestimmen? Die Antwort kann in Laumer 2016 nachgelesen werden.

Literatur

Antell, S. E., & Keating, D. P. (1983). Perception of numerical invariance by neonates. *Child Development, 54*, 695–701.

Artigue, M., & Blomhøj, M. (2013). *Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. ZDM, 45*(6), 797–810.

Berlyne, D. E. (1960). *Conflict, arousal, and curiosity*. McGraw-Hill series in psychology. McGraw-Hill, XII, 350 S.

Berlyne, D. E. (1974). *Konflikt, Erregung, Neugier. Zur Psychologie der kognitiven Motivation* (1. Aufl., 405 S.). Konzepte der Humanwissenschaften. Klett.

Bernoulli, J. Supplementum defectus geometrie cartesiana circa inventionem locorum. *Acta Eruditorum*, Calendis Junii: 264–269, Anno M DC XCVI.

Bikner-Ahsbahs, A., & Halverscheid, S. (2014). Introduction to the theory of interest-dense situations (IDS). In A. Bikner-Ahsbahs & S. Prediger (Eds.), *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education* (pp. 97–113). Cham: Springer International Publishing.

Descartes, R. (1637). *Discours de la Méthode*. Imprimerie de Ian Maire.

Dewey, J. (1938). Logic: The theory of inquiry. Irvington.

Diffie, W., & Hellman, M. E. (1976). New directions in cryptography. *IEEE Trans. Information Theory, IT-22*(6): 644–654.

Domokos, G., Papadopulos, J., & Ruina, A. (1994). Static equilibria of planar, rigid bodies: Is there anything new? *Journal of Elasticity, 36*(1), 59–66.

Edwards, A. W. F. (2004). *Cogwheels of the Mind: The Story of Venn Diagrams*. Johns Hopkins University Press.

Einstein, A. (1953). *Mein Weltbild. Hrsg. von Carl Seelig*. Europa Verlag.

Forsythe, G. E. (1970). Pitfalls in Computation, or why a Math Book isn't enough. *Amer. Math. Monthly, 77*(9), 931–956.

Griggs, J., Killian, C. E., & Savage, C. D. (2004). Venn diagrams and symmetric chain decompositions in the Boolean lattice. *Electronics Journal of Combinatorial, 11*(1): Research Paper 2, 30.

Gruber, H. E. (1981). On the relation between 'aha experiences' and the construction of ideas. *History of Science, 19*(1), 41–59.

Grünbaum, B. (1975). Venn diagrams and independent families of sets. *Mathematical Magazine, 48*, 12–23.

Haeckel, E. (1866). *Generelle Morphologie der Organismen. Allgemeine Grundzüge der organischen Formen-Wissenschaft, mechanisch begründet durch die von Charles Darwin reformirte Descendenz-Theorie*, Band 2. G. Reimer.

Halbeisen, L., & Hungerbühler, N. (2015). A simple proof of Poncelet's theorem (on the occasion of its bicentennial). *Amer. Math. Monthly, 122*(6), 537–551.

Halbeisen, L., & Hungerbühler, N. (2016). Conjugate conics and closed chains of Poncelet polygons. *Mitt. Math. Ges. Hamburg, 36*, 5–28.

Henderson, D. W. (1963). Classroom Notes: Venn Diagrams for More than Four Classes. *Amer. Math. Monthly, 70*(4), 424–426.

Hilbert, D. (1987). *Grundlagen der Geometrie*. Teubner Studienbücher Mathematik. B. G. Teubner, Stuttgart, 13. Auflage. Mit Supplementen von Prof. Dr. Paul Bernays.

Hungerbühler, N. (2020). An alternative quadratic formula. *Math. Semesterber., 67*(1), 85–95.

Justin, J. (1994). Mathematical remarks about origami bases. *Symmetry: Culture and Science, 5.2*, 153–165.

Justin, J. (Juni 1986). Mathematics of origami, part 9. *British Origami*, 28–30.

Kasahara, K., & Takahama, T. (1987). *Origami for the Connoisseur*. The original Japanese-language edition published by Sanrio Co., Ltd, Tokyo in 1985. Japan Publications, Inc.

Kawasaki, T. (1989). On the relation between mountain-creases and valleycreases of a flat origami. In: *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology*. Hrsg. von Humiaki Huzita. Dipartimento di Fisica dell'Universitá di Padova, Padova, Italy, S. 229–237.

Klein, F. (1924). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Erster Band: Arithmetik, Algebra, Analysis*. Dritte Auflage. Ausgearbeitet von E. Hellinger. Für den Druck fertig gemacht und mit Zusätzen versehen von Fr. Seyfarth. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 14. Springer-Verlag.

Klencke, H. (1876). *Alexander von Humboldt's Leben und Wirken*. Otto Spamer: Reisen und Wissen. Ein biographisches Denkmal von Herm. Klencke.

Koch, M. (2017). *Von Schildkröten*. Lügnern und sich selbst rasierenden Friseuren: Klassische Paradoxa im Licht der modernen Mathematik. Books on Demand.

Lakoff, G., & Núñez, R. E. (2000). Where Mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being. Basic Books.

Laumer, S. (2016). *Potenzsummen und Gauß-Trick* (pp. 1–25). Mentorierte Arbeit Fachdidaktik: ETH Zürich.

Lebesgue, H. (1901). Sur une généralisation de l'intégrale définie. C. R. Acad. Sci. *Paris, 132*, 1025–1028.

Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Vieweg.

Malle, G., & Fischer, R. (1985). *Mensch und Mathematik* (p. 5). Klagenfurter Beiträge zur Didaktik der Mathematik, Band: Profil Verlag.

Merkle, R. C. (1982). Secure communications over insecure channels. In *Secure communications and asymmetric cryptosystems*, volume 69 of *AAAS Sel. Sympos. Ser.*, pages 181–196. Westview, Boulder, CO.

Muller, D. E. (1956). A method for solving algebraic equations using an automatic computer. *Math. Tables Aids Comput., 10*, 208–215.

Murata, S. (1966). "The theory of paper sculpture, IIâŁž. Japanese. *Bulletin of Junior College of Art, 5*, 29–37.

Organisation for European Economic Co-operation. (1961). *New Thinking in School Mathematics*. Office for Scientific and Technical Personnel: OEEC.

Platon. (2018). *Theaitetos*. Bauer Books.

Robertson, S. A. (1977/1978). Isometric folding of Riemannian manifolds. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 79*(3–4): 275–284.

Rosnick, P., & Clement, J. (1980). Learning without understanding: The effect of tutoring strategies on algebra misconceptions. *The Journal of Mathematical Behavior, 3*, 3–27.

Rota, G. C. (1997). *Indiscrete thoughts*. Hrsg. von Fabrizio Palombi. Birkhäuser Boston.

Runco, M. A. (2014). Creativity: Theories and Themes: Research, Development, and Practice. Elsevier Science.

Schulte-Janzen, A. (2002). *Staunen - Lernen: Staunen und seine Bedeutung für den Sachunterricht der Grundschule*. Europäische Hochschulschriften: Reihe XI, Pädagogik. Lang.

Stammbach, U. (2018). Zur Entstehung der Mengenlehre I: Aus Briefen zwischen Richard Dedekind und Georg Cantor. *Elem. Math., 73*(2), 74–80.

Stammbach, U. (2018). Zur Entstehung der Mengenlehre II: Aus Briefen zwischen Richard Dedekind und Georg Cantor. *Elem. Math., 73*(3), 122–129.

Steck, M., Schönberger L., & Abderhalden, E. (1945). *Proklus Diadochus 410–485. Kommentar zum ersten Buch von Euklids „Elementen"*. Deutsche Akademie der Naturforscher.

Toeplitz, O. *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung. Eine Einleitung in die Infinitesimalrechnung nach der genetischen Methode. Erster Band*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtgung der Anwendungsgebiete, Band LVI. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1949. Aus dem Nachlass herausgegeben von Dr. Gottfried Köthe.

Várkonyi, P. L., & Domokos, G. (2006). Static equilibria of rigid bodies: dice, pebbles, and the Poincaré-Hopf theorem. *Journal of Nonlinear Science, 16*(3), 255–281.

Wagenschein, M. (1968). *Verstehen lehren. Genetisch - Sokratisch - Exemplarisch:* Beltz Verlag.

Wagon, S., & Webb, P. (2008). Venn symmetry and prime numbers: A seductive proof revisited. *Amer. Math. Monthly, 115*(7), 645–648.

Wikipedia. (2020). *Staunen*. https://de.wikipedia.org/wiki/Staunen. Zugegriffen: 12. Juni 2020.

Wittgenstein, L. (1977). *Philosophische Untersuchungen*. Suhrkamp: Suhrkamp Taschenbuch Wissenschaft.

Wittmann, E. C. (2012). Elementarisierung von Benkos Lösung des 3. *Hilbertschen Problems. Elem. Math., 67*(2), 45–50.

Wolfart, J. (2011). *Einführung in die Zahlentheorie und Algebra* (2. überarbeitete und erweiterte Auflage). Vieweg+Teubner.

Xu, F., & Spelke, E. S. (2000). Large number discrimination in 6-month-old infants. *Cognition, 74*(1), B1–B11.