Norbert Hungerbühler, Mario Gerwig

# 3.5
# Über das Inszenieren skalierbarer Themen im Mathematikunterricht

Es ist ein herausfordernder Gedanke, den Mathematikunterricht entlang der gesamten Schullaufbahn vom Kindergarten bis zur Hochschule zu denken, sowohl didaktisch als auch inhaltlich. Sind wir als Lehrende überhaupt bereit, über den gepflegten Garten der eigenen Schulstufe hinauszuschauen? Kennen wir die darunter- und die darüberliegende Stufe gut genug, um die Übergänge nicht zu Klippen werden zu lassen, sondern um die Schülerinnen und Schüler dort abzuholen, wo sie sind, und sie auf die nächsthöhere Schulstufe gut vorzubereiten? Pflegen wir den didaktischen und inhaltlichen Dialog mit den Lehrkräften der anderen Schulstufen?

Im vorliegenden Text soll aufgezeigt werden, dass geeignete stufenübergreifende Themen dazu dienen können, die wechselseitige Diskussion unter Lehrkräften verschiedener Schulstufen anzuregen und damit bestehende Gräben zu überbrücken.

Zunächst soll erläutert werden, was wir unter „skalierbaren Themen“ verstehen. Anschließend werden in knapper Form drei Themenkomplexe vorgestellt, welche den Mathematikunterricht von der Primarstufe bis zur Matura spiralförmig durchziehen können. Danach soll an der für die Mathematik und den Mathematikunterricht zentralen Thematik „Beweisen“ ausführlicher aufgezeigt werden, wie genetisches Beweisen (Brunner 2014, 20) im Mathematikunterricht skaliert werden kann. Dieses Thema wurde bereits vor einiger Zeit von der Lehrkunstdidaktik aufgegriffen und mehrfach im Unterricht erprobt (Gerwig 2015). Abschließend wird der gesamte Komplex aus einer (lehrkunst-)didaktischen Perspektive betrachtet.

## I.
## Was heißt skalierbar?

In der Informatik heißt ein System skalierbar, wenn es auch für große Anwendungen noch effizient einsetzbar ist. In der Bildverarbeitung zeichnen sich skalierbare Formate (im Gegensatz zu Pixelbildern) dadurch aus, dass Graphiken auch bei beliebiger Vergrößerung nicht an Schärfe verlieren. Im Unternehmens- und Prozessmanagement ist ein Business-Modell skalierbar, wenn es selbst bei starkem Wachstum noch wirtschaftlichen Erfolg verspricht. In der Physik betrachtet man Mikrostrukturen, die bestimmte Effekte auf mehreren Skalen aufweisen. In der Chemie spricht man von skalierbaren Reaktionen, wenn sie sich für die Produktion auf industrielle Maßstäbe übertragen lassen. In der Mathematik tritt der Begriff „skalierbar“ im Zusammenhang mit Fraktalen auf: Dies sind geometrische Objekte, wie etwa die bekannte Mandelbrot-Menge (das „Apfelmännchen“), die bei beliebiger Vergrößerung immer wieder dieselben Strukturen zeigen.

Es ist also beileibe nicht trivial, eine Definition des Begriffs „skalierbar“ zu geben. Schon Wittgenstein bemerkte, dass gewisse Begriffe nicht hinreichend erfasst werden können, ohne dass sich der Verstand beim Versuch einer Definition Beulen holt. Hingegen können im Sinne von Wittgensteins Familienähnlichkeit Merkmale des Begriffs „skalierbar“ genannt werden. Etwa so: *Eine gewisse Qualität einer Sache ist skalierbar, wenn sie sich in bestimmter Art und Weise verhält, wenn die Sache in größerer oder kleinerer Menge vorliegt*. Oder so: *Ein Aspekt einer*

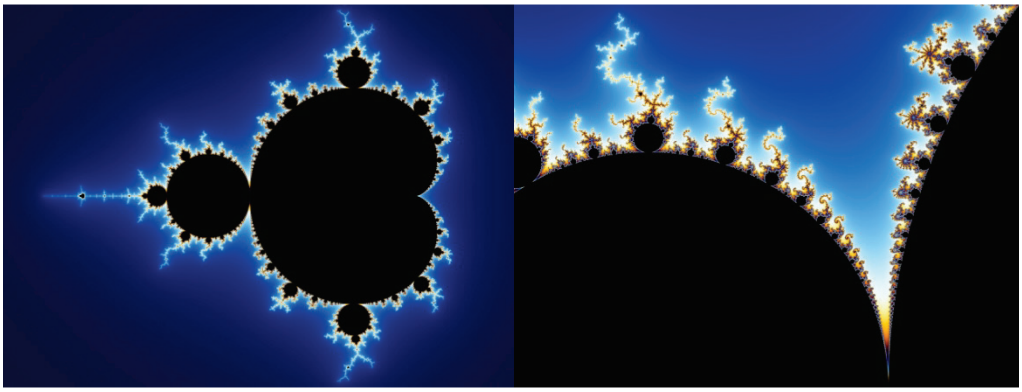

*Abb. 1: Die Mandelbrot-Menge (links) und eine Ausschnittvergrößerung (Wikimedia Commons).*

*Sache ist skalierbar, wenn er in bestimmter Ausprägung oder Komplexität erscheint, je nachdem, wie tief man in die Sache eindringt oder wie genau man sie betrachtet.* Aber was soll dann ein skalierbares Thema im Mathematikunterricht sein? Hier ist eine Liste von Wünschen, eine Art von Axiomen: Ein skalierbares Thema

- hält Aspekte bereit, die sich vom Kindergarten bis zur Dissertation bearbeiten lassen,
- lässt sich sowohl in der Theorie als auch von seinen Anwendungen her ausdehnen,
- lässt sich sowohl vertikal (im Sinne unterschiedlicher Komplexität und Schwierigkeitsgrade) als auch horizontal (verschiedene Aspekte gleicher Komplexität oder Schwierigkeit) ausdehnen,
- hält Aspekte für stärkere und für schwächere Schülerinnen und Schüler bereit,
- lässt eine Vielzahl von Anwendungen (auch innermathematischer Art) zu,
- lässt sich mit Hilfe von immer fortgeschritteneren Methoden untersuchen und
- kann mit einer Vielzahl von mathematischen Werkzeugen bearbeitet werden.

Angenommen, wir hätten solch ein skalierbares Thema vor uns, welches alle genannten Punkte in sich trägt, so ließen sich aufgrund der aufgelisteten Eigenschaften eine Reihe von recht günstigen Aussagen darüber treffen: Ein skalierbares Thema

- lässt sich im Sinne eines Spiralcurriculums behandeln,
- bietet eine Vielzahl von Anknüpfungspunkten zu vorhandenem Wissen,
- begünstigt die Vernetzung des Wissens,
- bietet Anknüpfungspunkte zu anderen (MINT-)Fächern,
- eignet sich für Projekt- oder Maturaarbeiten (Breite und Tiefe, Raum für Entdeckungen),
- eröffnet den Schülerinnen und Schülern eine Perspektive, weil es über sich hinausweist.

Auch didaktisch und lerntheoretisch lassen sich skalierbare Themen einordnen. Insbesondere eignen sie sich für das *PTP-Prinzip* von Thomas Wihler und Hans Rudolf Schneebeli: Eine konkrete Anwendung aus der Praxis motiviert eine eher theoriegeleitete Erarbeitung, welche neues Wissen und neue Werkzeuge bereitstellt. Dieses neue Wissen ist im Anschluss vielseitig in der Praxis einsetzbar und illustriert den gewonnenen Fortschritt (s. Abb. 2).

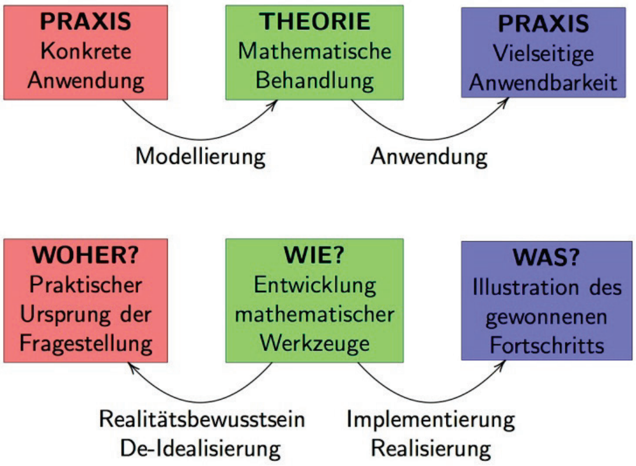


*Abb. 2: Das PTP-Prinzip.*

Skalierbare Themen sind auch kompatibel mit dem *Zone of Proximal Flow-Prinzip* (s. Basawapatna et al. 2013), welches auf Vorarbeiten von Lev Vygotsky und Mihaly Csikszentmihalyi basiert. Durch ihren Einsatz lässt sich vermeiden, im Unterricht die *Skills* vor den *Challenges* zu entwickeln und dabei in den *Boredom*-Bereich abzugleiten (vgl. Abb. 3). Stattdessen bieten skalierbare Themen immer wieder überschaubare Herausforderungen, welche die Weiterentwicklung des Wissens motivieren.

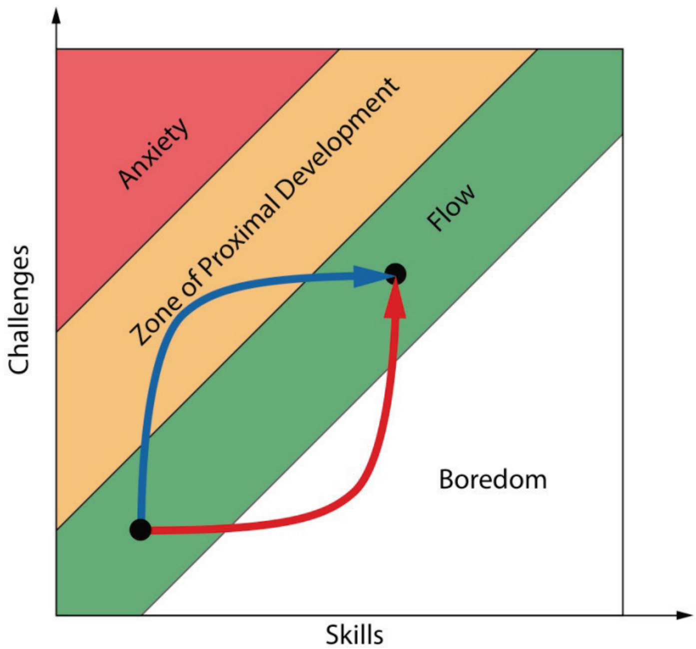


*Abb.3: Das Zone of Proximal Flow-Prinzip: Anzustreben ist ein Unterrichtsverlauf und ein kontinuierliches Voranschreiten in der „Zone of Proximal Development".*

Skalierbare Themen erweitern zudem das Konzept der *substantiellen Lernumgebungen* von Erich Wittmann (1998): Sie repräsentieren zentrale Ziele, Inhalte und Prinzipien des Mathematikunterrichts, bieten vielfältige Möglichkeiten für mathematische Aktivitäten, können flexibel und leicht an die Gegebenheiten der Klasse angepasst werden und integrieren mathematische, psychologische und pädagogische Aspekte des Lernens in ganzheitlicher Weise.

Die Frage, die sich hier (wie bei jedem Axiomensystem) stellt, ist, ob es tatsächlich interessante Beispiele gibt, welche die definierenden Bedingungen erfüllen. Wir werden im Folgenden solche Beispiele vorstellen. Und wer erst einmal den Blick für das Konzept der skalierbaren Themen geschärft hat, wird sie plötzlich überall entdecken.

## II. Beispiele skalierbarer Themen

### Gleichungen

Das Thema *Gleichungen* zieht sich durch alle Schulstufen. In der Primarstufe beginnt der spielerische Umgang mit der *Arithmetik*:

- $2 + 3 = 5$ □
- $3 \times \square = 12$ □
- „Ich denke mir eine Zahl. Wenn ich vom Doppelten der Zahl 7 subtrahiere, erhalte ich 3.“

In der Sekundarstufe I beginnt die Idee der *Unbekannten* und der *Variablen* Form anzunehmen, und am Übergang zur *Algebra* entwickeln sich die ersten Lösungstechniken anhand immer anspruchsvollerer Beispiele: Ähnlich wie in der Biologie die Ontogenese (die Entwicklung des Individuums von der Befruchtung der Eizelle bis zur Geburt) die Phylogenese (die stammesgeschichtliche Entwicklung) rekapituliert, so vollzieht der einzelne Schüler, die einzelne Schülerin die historische Genese der mathematischen Begriffe individuell nach. So hat die Entwicklung der *Algebra* aus der *Arithmetik* in der Menschheitsgeschichte eine enorme Zeitspanne (Jahrtausende) in Anspruch genommen, während die *Analysis* innerhalb weniger Jahrzehnte durch die Arbeiten von Leibnitz, Newton, den Bernoullis, von Euler und Lagrange geradezu explodierte. Ganz ähnlich geht es heutigen Schülerinnen und Schülern, die sich nicht selten mit dem *Variablenbegriff* lange Zeit schwer tun. Sobald aber diese Hürde geschafft ist, erklimmen sie die abstrakten Höhen der Analysis bedeutend schneller.

In der Sekundarstufe II zeigt sich nach und nach eine Systematik der *Gleichungstypen* (lineare Gleichungen, quadratische Gleichungen, lineare Systeme), und der Zusammenhang mit dem Aufbau des Zahlenreichs zeichnet sich ab: Die sukzessive Erweiterung des Zahlenraums erfolgt aufgrund der Notwendigkeit, gewissen Gleichungen eine Lösung zu verschaffen. Die Gleichung $5 + x = 2$ hat in den natürlichen Zahlen keine Lösung; dies führt zu den ganzen Zahlen. Die Gleichung $7x = 3$ hat erst in den rationalen Zahlen eine Lösung. Die Gleichung $x2 = 2$ macht die Einführung reeller Zahlen nötig, und $x^2 = -1$ liefert schließlich die Motivation für die komplexen Zahlen. Auf dieser Schulstufe zeigen sich auch erstmals abstraktere Lösungsbegriffe, etwa bei Fixpunktgleichungen oder bei einfachen Differentialgleichungen. Der Bogen spannt sich weiter zur Hochschule, wo der Fokus nicht mehr in erster Linie auf Lösungstechniken liegt, sondern bei der Untersuchung abstrakterer Theorien, etwa zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen. Und flugs ist man dann bei aktuellen Forschungsthemen, zum Beispiel bei partiellen Differentialgleichungen oder in der Numerik.

Origami

Als Friedrich Fröbel der Welt die Idee des Kindergartens schenkte, war Papierfalten ein fester Bestandteil seines Curriculums. Er war der Überzeugung, dass die spielerische Beschäftigung mit Papier sowohl die feinmotorischen Fähigkeiten als auch das Raumvorstellungsvermögen der Kinder schult. So zeugt noch heute der Fröbel-Stern in der Weihnachtszeit von dieser Idee. In der Primarschule lassen sich wunderbare Vorstellungsübungen mit der Papierfaltkunst (Origami) durchführen: Ein Papier wird gefaltet und in Gedanken entlang einer Geraden zerschnitten: Wie sieht das entstandene Loch aus? Oder: Wie viele Berg- und Talfalten besitzt ein gefalteter Papierstreifen nach dem Auffalten?

Der Satz von Meguro (s. Abb. 4) ist auf der Sekundarstufe I zugänglich. Er lautet: *Das Faltmuster einer flach gefalteten Origami-Figur ist zweifärbbar*. Das heißt, man braucht nur zwei Farben, um das Muster so zu färben, dass je zwei aneinandergrenzende Gebiete ungleiche Farben aufweisen. Diese Tatsache ist insofern erstaunlich, dass man bei beliebigen Mustern (etwa Landkarten) im Allgemeinen vier Farben braucht (vgl. das Vier-Farben-Theorem). Die graphentheoretisch nicht-triviale Aussage des Satzes von Meguro kann mit Wagenschein'scher Uferhilfe bereits von Sekundarschülerinnen und -schülern entdeckt und mit einer einfachen Überlegung begründet werden: Man denke sich im flach gefalteten Zustand, d. h. dass das Papier gefaltet ganz flach auf dem Tisch liegt, die Oberseiten der Papierflächen mit der einen und die Unterseiten mit einer anderen Farbe bemalt. Wenn man eine Falte überschreitet, gelangt man von einer Ober- auf eine Unterseite oder umgekehrt, und damit wechselt an jeder Falte die Farbe.

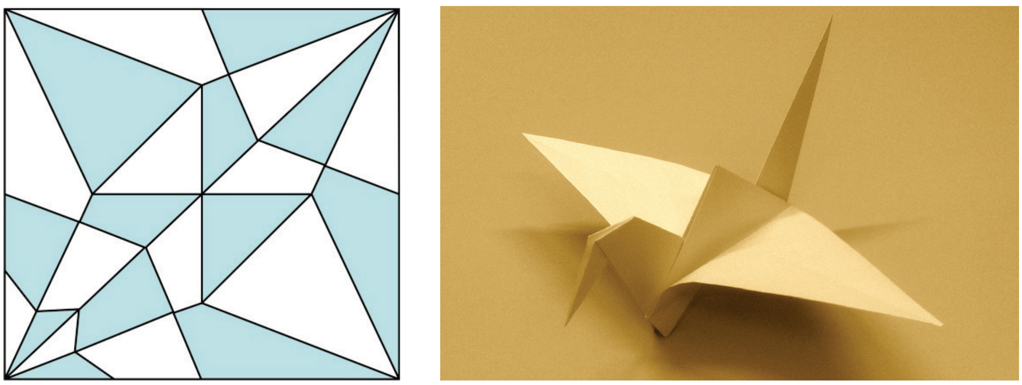

*Abb. 4: Der Satz von Meguro illustriert am Faltmuster des Kranichs.*

Die Beschäftigung mit Papierfalten im Unterricht führt auch zur Origami-Geometrie, welche geometrische Konstruktionen durch Falten anstatt mit Zirkel und Lineal erlaubt (siehe zum Beispiel Geretschläger 2008).

Auf der Sekundarstufe II können Fragen zur Konstruierbarkeit thematisiert werden. Einen gegebenen Winkel mit Zirkel und Lineal in zwei gleich große Winkel zu teilen ist eine Grundkonstruktion im Geometrieunterricht. Die Winkel*dreiteilung* hingegen ist mit Zirkel und Linear nicht möglich, wohl aber mit Origami-Geometrie: Es gibt eine einfache (und einfach einsehbare) Faltkonstruktion, die das Problem löst. Die Dreiteilung des Winkels mit Zirkel und Lineal gehört (mit der Quadratur des Kreises und der Erzeugung eines Würfels mit doppeltem Volumen) zu den drei klassischen Problemen der griechischen Geometrie. Erst auf der Grundlage der genialen Arbeiten von Évariste Galois gelang 1837 Pierre Laurent Wantzel der Nachweis der Unlösbarkeit der Winkeldreiteilung mit Zirkel und Lineal. Auch die Würfelverdoppelung ist übrigens mit Origamigeometrie lösbar, mit Zirkel und Lineal jedoch nicht.

Zum Satz von Meguro gesellen sich hier die wunderbaren Sätze von Maekawa-Justin (s. Abb. 5) oder Kawasaki-Justin (s. Abb. 6). Der erste dieser Sätze lautet: *Treffen in einem Punkt einer flach faltbaren Origami-Figur t Talfalten und b Bergfalten aufeinander, so gilt* $|t - b| = 2$. Der Beweis ist eine einfache Anwendung der Innenwinkelsumme in Polygonen: Betrachten wir dazu einen Punkt, in dem sich $n = b + t$ Falten treffen. Dann falten wir das Papier in einer Umgebung dieses Punktes flach, schneiden die Ecke ab und betrachten den entstandenen Querschnitt in Abb. 5.

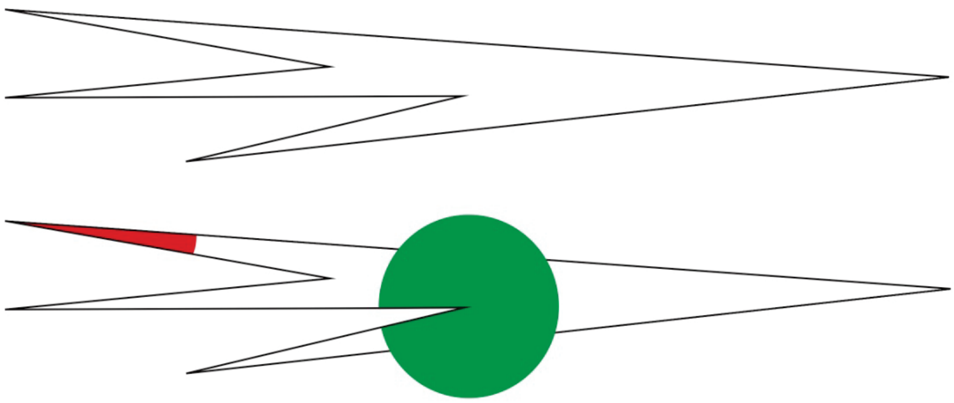

*Abb. 5: Zum Beweis des Satzes von Maekawa-Justin.*

Wir sehen (Abb. 5 oben) ein degeneriertes $n$-Eck. Bergfalten zeigen sich dabei als Spitzen, die nach rechts zeigen, Talfalten als solche, die nach links zeigen (oder umgekehrt). Eine Talfalte entspricht also einem Innenwinkel von 0° (Abb. 5 unten, kleiner, markierter Winkel), eine Bergfalte einem Innenwinkel von 360° (großer, markierter Winkel). Abbildung 5 zeigt die Situation freilich kurz vor dem endgültigen Zusammenfalten, daher sind die markierten Winkel noch nicht ganz 0° respektive 360°. Die Innenwinkelformel liefert dann $t \cdot 0° + b \cdot 360° = (n - 2) \cdot 180°$. Daraus ergibt sich sofort $b - t = -2$. Vertauscht man die Rollen von Berg- und Talfalten (durch Umdrehen des Papiers), ergibt sich das andere Vorzeichen.

Aus dem Satz von Maekawa-Justin folgt insbesondere (wie übrigens auch aus dem Satz von Meguro), dass in einem solchen Punkt eine gerade Anzahl Falten, also eine gerade Anzahl Winkelgebiete zusammentreffen: In der Tat ist $n = b + t = b - t + 2t = \pm 2 + 2t$ eine gerade Zahl.

Der Satz von Kawasaki-Justin sagt dann über diese Winkelgebiete: Treffen in einem Punkt P eine gerade Anzahl Falten aufeinander und färbt man die Winkelgebiete abwechselnd rot und grün, so ist die Origami-Figur genau dann lokal in P flach faltbar, wenn die Summe der roten Winkel gleich der Summe der grünen Winkel ist.

Auch hierfür lässt sich ein elementares Argument angeben: Sei eine Umgebung des Punktes flach gefaltet. Umrundet man (auf dem gefalteten Papier) den Punkt auf einem Kreis, so kehrt sich der Umlaufsinn bei jeder Kante um. In der alternierenden Summe ergibt der dabei zurückgelegte Winkel 0°, da man den Punkt im gefalteten Zustand nullmal umrundet hat und am Ausgangspunkt wieder ankommt. Die Umkehrung der Aussage ist etwas heikler zu beweisen.

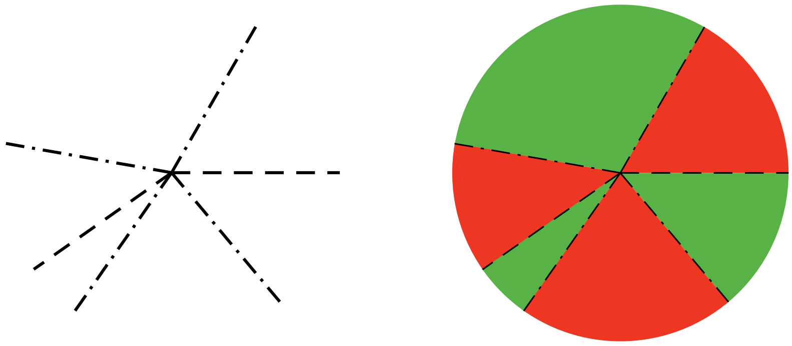

*Abb. 6: Satz von Maekawa-Justin (links; 2 Talfalten gestrichelt, 4 Bergfalten strichpunktiert), Satz von Kawasaki-Justin (rechts).*

Origami-Anwendungen sind beispielsweise im Maschinenbau (Konstruktion pneumatischer Bälge), in der Architektur (Kapelle von St. Loup) und innermathematisch in der Theorie partieller Differentialgleichungen von Bedeutung. Die Axiomatik der Origami-Geometrie ist noch nicht endgültig geklärt und beliebig viele Origami-Probleme in der Analysis, der Geometrie und der Kombinatorik harren noch ihrer Lösung.

Kryptologie

Geheimschriften faszinieren bereits Kinder im Vorschulalter, etwa beim Spiel mit unsichtbarer Tinte. In der Primarschule und auf Sekundarstufe I können einfache Verschlüsselungen, beispielsweise die Cäsar-Verschlüsselung oder die Skytale, thematisiert werden.


*Abb. 7: Cäsar-Verschlüsselung und Skytale (Wikimedia Commons).*

Bei der Cäsar-Verschlüsselung wird jeder Buchstabe des Alphabets (zyklisch) durch den um bspw. drei Plätze weiter hinten im Alphabet stehenden Buchstaben ersetzt (Abb. 7 links: *encoding* und *decoding*). Die Skytale fand bereits in Sparta bei der Übermittlung geheimer militärischer Nachrichten Verwendung: Ein Lederriemen wird um die Skytale geschlungen und der zu verschlüsselnde Text längs, zeilenweise auf den Riemen geschrieben (Abb.7 rechts). Wird der Riemen abgewickelt, ist der Text nicht mehr lesbar. Die Herausforderung, eine auf diese Weise verschlüsselte geheime Botschaft zu entschlüsseln, gelingt mit Hilfe einfacher mathematischer Überlegungen, welche kaum einer weiteren Motivation bedürfen.

Bei der Entschlüsselung von polyalphabetischen Ersetzungschiffren, bei denen jedes Zeichen des Klartextes durch ein Zeichen einer anderen Schrift ersetzt wird, gelangen statistische Methoden zum Einsatz: In deutschsprachigen Texten kommt der Buchstabe **E** (und damit auch sein Ersatzzeichen im verschlüsselten Text) mit rund 17.4% am häufigsten vor, gefolgt vom Buchstaben **N** mit 9.78%, **I** mit 7.55% usw. Aufgrund dieser Beobachtung können in einem (genügend langen) verschlüsselten Text durch Auszählen ihrer Häufigkeit nach und nach die Ersatzzeichen durch die richtigen Buchstaben ersetzt werden. Die Häufigkeitsverteilung einzelner Buchstaben in der (deutschen) Sprache ermöglicht damit einen natürlichen Zugang zur Statistik. Lehrkräfte von Sprachfächern mögen einwenden, dass der französischsprachige Autor Georges Perec 1969 den über dreihundertseitigen Roman „La Disparition“ veröffentlicht hat, der mit Ausnahme des Namens des Autors komplett ohne den Buchstaben E auskommt. Dies stellte eine besondere Herausforderung für Eugen Helmlé dar, der das Werk ins Deutsche übersetzte!

Der nächste Schritt, die Codierung mit Hilfe von Schlüsseln (Vignère-Verschlüsselung), bietet die Gelegenheit, modular zu rechnen. Diese Methode gewährt höchste Sicherheit, solange der Schlüssel geheim bleibt und nur ein einziges Mal benutzt wird, sie leidet aber am inhärenten Problem des Schlüsselaustauschs zwischen Sender und Empfänger der geheimen Botschaft: Diese müssen sich nämlich treffen, um den Schlüssel miteinander abzustimmen. Bei diesem Treffen könnte der Sender auch gleich die geheime Botschaft übergeben.

Die Sekundarstufe II ist dann der Ort für den Ausweg aus dem Dilemma des Schlüsselaustauschs. Hier können die Idee und die Paradoxie der Public Key-Kryptographie besprochen werden: *Zwei Personen sprechen auf einem öffentlichen Platz miteinander und jedermann kann dieser Konversation folgen. Dennoch haben am Ende die beiden Personen eine Information ausgetauscht, die kein anderer Zuhörer erfassen konnte*. Wie ist das möglich?! Oder die Idee der Zero Knowledge-Beweise: Wie kann ich jemanden davon überzeugen, dass ich im Besitz einer bestimmten Information bin, ohne die Information selber preiszugeben? Letzteres findet beispielsweise beim Online-Banking eine pfiffige Anwendung: Statt mein Passwort über einen unsicheren Kanal zu übertragen, überzeuge ich die Bank (respektive deren Server) davon, dass ich das Passwort tatsächlich habe, ohne es nennen zu müssen. In der Schule lässt sich die Idee des Zero Knowledge-Beweises durch folgendes Experiment illustrieren: Die Lehrperson zeigt zwei rote, zwei grüne und zwei blaue Bälle. Verdeckt vor den Augen der Klasse legt sie zwei dieser Bälle in einen Beutel und die restlichen vier in einen zweiten Beutel. Die Lehrperson behauptet nun, dass sich im ersten Beutel zwei Bälle unterschiedlicher Farbe befinden. Davon will sie die Klasse überzeugen, jedoch ohne dass die Schüler die Farben der Bälle im ersten Beutel erfahren. Wie kann die Lehrperson diesen Beweis führen? Ganz einfach (und viele Kinder kommen durch Nachdenken auf diese Idee): Die Lehrperson zieht aus dem zweiten Beutel drei verschiedenfarbige Bälle und zeigt sie der Klasse.

Das historisch vielleicht erste Beispiel eines Zero Knowledge-Beweises führte Niccolò Tartaglia, indem er seine Lösungsformel für die Gleichung dritten Grades nicht bekannt gab. Seine Zeitgenossen überzeugte er dennoch davon, diese Formel zu besitzen, indem er alle ihm gestellten Aufgaben innerhalb kurzer Zeit lösen konnte (vgl. dazu den Beitrag von Spindler in diesem Band).

Auch die Methode der Quantenkryptographie gehört noch zu den erreichbaren Zielen der Sekundarstufe II. Die Forschung zur Kryptologie schließlich strebt derzeit nach dem „heiligen Gral“ der Verschlüsselung, nämlich nach Methoden, die *beweisbare* Sicherheit bieten.

## III.
## *Beweisen* als skalierbare Thematik im Mathematikunterricht, verdeutlicht anhand dreier Beweis-Lehrstücke

Spätestens seit Euklid von Alexandria sind Beweise *das* Charakteristikum der Mathematik. Die Möglichkeit, Aussagen ein für allemal zu beweisen, ist ein Privileg, das der Mathematik vorbehalten ist. Ein im alten Griechenland bewiesenes Theorem ist auch heute noch gültig, und es wird es auch für alle Zeit bleiben. Im Unterschied dazu wechseln in anderen Wissenschaften und Fachgebieten Paradigmen, Modelle, Techniken oder Ansichten in zum Teil schneller Folge oder sind abhängig von Kultur, Zeitgeist oder anderen äußeren Parametern. Sogar eine außerirdische Intelligenz hätte vermutlich einen Begriff für Primzahlen und andere uns vertraute mathematische Objekte. Diese Universalität der Mathematik ist eines der herausragenden Alleinstellungsmerkmale dieser Wissenschaft. (Ein anderes ist ihre Anwendbarkeit, die etwa Galilei im Satz „Das Buch der Natur ist in der Sprache der Mathematik geschrieben“ kondensierte). Der Begriff des Beweises ist eine Hauptschlagader der Mathematik und war oder ist Teil dramatischer Debatten, etwa im Intuitionismus, Konstruktivismus, Logizismus oder Formalismus. Die Gödelschen Unvollständigkeitssätze sind verstörende Einsichten, welche die Grenzen der Beweisbarkeit aufzeigen. Dennoch ist die Kraft der Beweise bis heute ungebrochen. Damit nehmen Beweise auch innerhalb der mathematischen Erziehung und der mathematikdidaktischen Diskussion eine zentrale Rolle ein. Um ihren Stellenwert im schulischen Unterricht genauer beschreiben zu können, ist es sinnvoll, sich über die verschiedenen Funktionen eines Beweises Klarheit zu verschaffen. Brunner (2014, 14) unterscheidet deren acht. Diese tauchen in der fachwissenschaftlichen und fachdidaktischen Diskussion mit wechselnden Bezeichnungen immer wieder auf: Verifikation, Erklärung, Kommunikation, Entdeckung, Systematisierung, Konstruktion, Exploration, Inkorporation, wobei insbesondere die letzten drei Funktionen im Unterricht nur eine untergeordnete Rolle spielen dürften.

So unterschiedlich die Funktion eines Beweises sein kann, so verschieden sind die Wege zur Entwicklung eines angemessenen Beweisverständnisses auf Seiten der Lernenden. Unstrittig ist dabei, dass formal-deduktive Beweise zwar eine langfristige Zielperspektive des Unterrichts darstellen, sie aber niemals am Anfang dieser Entwicklung stehen können – dies wäre gar hinderlich (vgl. ebd., 19). Da formal-deduktives Beweisen die strengste Form des Begründens darstellt, kann man ein solches aber sukzessive über geeignete, schwächere Begründungsformen erreichen: über mathematisches bzw. alltagsnahes Argumentieren. In dem zwischen diesen Extremen existierenden Kontinuum des Begründens lassen sich Argumentations- und Beweisaufgaben des Mathematikunterrichts verorten, was aus didaktischer Sicht für die Entwicklung eines Beweisverständnisses interessant sein dürfte. Brunner hat diesbezüglich ein sehr hilfreiches Prozessmodell entwickelt (s. Abb. 8), welches die Skalierbarkeit der Thematik besonders verdeutlicht.

Neben der Möglichkeit, verschiedene Formen von Begründungsaufgaben im Mathematikunterricht immer einmal wieder einzusetzen und diesen so zu skalieren, existiert darüber hinaus die Form des „genetischen Beweisens“. Damit wird der Lernprozess beim Beweisen als eine Entwicklung beschrieben, welche dem Entstehen eines Beweises in der Fachwissenschaft ähnelt: Ausgehend von der Suche nach Beispielen für einen vermuteten Zusammenhang wird eine Struktur oder ein Muster entdeckt, welches zunächst operativ durchschaut und anschließend formal-symbolisch formuliert wird. Diesen individualgenetischen Charakter nehmen nun drei Beweis-Lehrstücke auf, die allesamt auf Entwürfen Wagenscheins basieren und innerhalb der

Lehrkunstdidaktik in mehreren Stufen zu Unterrichtsentwürfen weiterentwickelt worden sind (vgl. Gerwig 2015): Die Entdeckung der Axiomatik, der Satz des Pythagoras, das Nichtabbrechen der Primzahlfolge. In ihnen wird ein bedeutender Teil des Begründungsspektrums abgedeckt (s. Abb. 8), zudem ergänzen sie den individualgenetischen Aspekt um den kulturgenetischen: Warum entwickelte sich in der Menschheitsgeschichte ein Begründungsbedürfnis? Wie und wo entstand es? Welche Personen sind mit dieser Entwicklung verbunden und welchen Einfluss hat dies auf unser heutiges Begründungs- und Beweisverständnis?

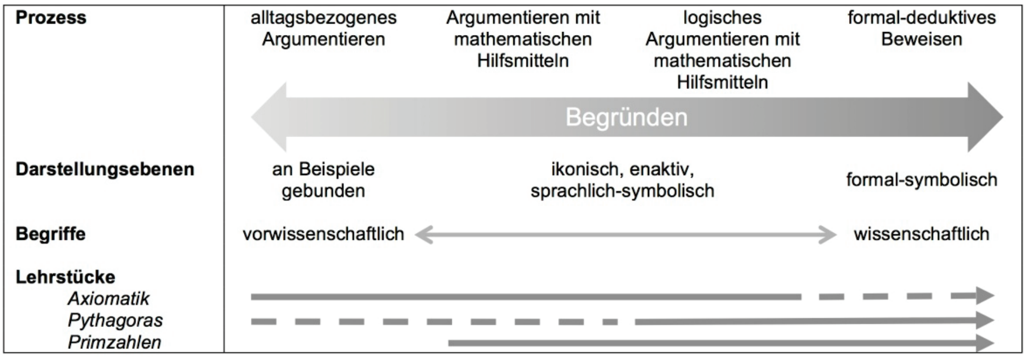


*Abb. 8: Drei Mathematik-Lehrstücke im Spektrum zwischen Argumentieren und Beweisen (nach Brunner 2014, 49; Gerwig 2015, 52).*

Im *Lehrstück zur „Entdeckung der Axiomatik“* ist ein geometrisches Initialproblem Auslöser einer intensiven Begegnung mit dem Beweisen in der Mathematik: Warum lässt sich der Radius eines beliebigen Kreises genau sechsmal auf dem Rand abtragen? Ein reizvolles und herausforderndes Problem, an welchem Schülerinnen und Schüler alltagsnah und mathematisch argumentieren, dem Beweisen als einem Grundprinzip der Mathematik begegnen und schlussendlich einen tiefen Einblick in die Euklidische Axiomatik erhalten. Dazu führen sie, basierend auf ihren eigenen Erfahrungen und experimentellen Untersuchungen, das zunächst sonderbar erscheinende Phänomen des genau sechsmal in der Peripherie herumgespannten Kreisradius mithilfe logischer Begründungen inhaltlich-anschaulich zurück auf eine Dreiecksverschiebung – ein Vorgehen, welches in eindrücklicher Weise dem axiomatischen Verfahren Euklids entspricht und schließlich von selbst zu dessen folgenreichen Ausdifferenzierungen führt.

Im *Lehrstück zum Satz des Pythagoras* wird dieses Wissen reaktiviert. Nun steht jedoch nicht der einzelne Beweis, sondern die Methode des Beweisens im Mittelpunkt der Betrachtung. Dazu bietet der Satz des Pythagoras mit seinen über 350 existierenden Beweisen praktisch eine perfekte Möglichkeit. Dabei wird deutlich, dass hinter dem, was fast jeder murmeln kann („aquadratplusbequadrat...“), eine Aussage über die Flächeninhalte von Quadraten steckt, dass sich diese sogar auf beliebige ähnliche Figuren verallgemeinern und sich darüber hinaus auf vielen Wegen immer eindeutig, erschlagend klar und umwerfend präzise beweisen lässt. Ist im Lehrstück die pythagoreische Quadratvereinigung und -entzweiung erst einmal entdeckt, rückt nach der Ouvertüre der Satz selbst in den Hintergrund. Verschiedene Begründungswege stehen nun im Fokus. Deren Erarbeitung, Präsentation und Vergleich ermöglichen schließlich eine fundierte Reflexion der Beweismethode.

Im *Lehrstück zum Nichtabbrechen der Primzahlfolge* hat schon das zugrundeliegende Problem bereits einen deutlich mathematischen Charakter: Dass es unendlich viele natürliche, gerade, ungerade Zahlen gibt, ist unmittelbar einsichtig – doch gibt es auch unendlich viele Primzahlen? Und falls ja, wie kann man das beweisen? Die geniale Idee: Anstatt die Richtigkeit der Aussage „Es gibt unendlich viele Primzahlen" zu zeigen, kann man auch begründen, dass die Gegenaussage „Es gibt endlich viele Primzahlen" falsch ist. Tertium non datur. Eine Aussage ist entweder wahr oder falsch – ist sie falsch, muss also die Gegenaussage wahr sein und umgekehrt. Am Primzahl-Phänomen kann dieser auch im Alltag gebräuchliche Grundsatz heranreifen, bei der Entwicklung des Beweises taucht er plötzlich auf. Hat man diese Idee des indirekten Beweises erst einmal entwickelt und verinnerlicht, so ist es zur Formulierung, zur Nach-Entdeckung des entsprechenden (konstruktiven) Euklidischen Primzahlbeweises nicht mehr weit. Für Wagenschein (2009, 220) gehört dieser Satz „zu den wenigen wirklich unentbehrlichen Stücken des mathematischen Lehrguts". In einem Unterrichtsbericht beschreibt er (vgl. ebd., 220-227), wie er diese für ihn so zentrale und beispielhaft exemplarische Thematik kurz nach Ende des Zweiten Weltkriegs in einer Klasse an der Ecole d'Humanité (Goldern, Schweiz) unterrichtete. Sein Bericht gehört bis heute zu den unentbehrlichen Modellen lehrkunstdidaktischen Lehrguts.

Dass es sich beim Beweisen um ein skalierbares Thema handelt, wird an den beschriebenen Lehrstücken besonders deutlich. Jedes für sich berücksichtigt, dass das Erreichen der Stufe des formal-deduktiven Beweisens im Unterricht notwendigerweise auf weniger strengen Begründungsarten aufbauen muss. Betrachtet man die drei Lehrstücke nun als eine Einheit, eine Trilogie, die in einer Klasse in drei aufeinanderfolgenden Schuljahren unterrichtet wird, so wird das Skalierbare der Thematik evident: Der Mathematikunterricht lässt sich an einer Leitidee des Beweisens ausrichten – eine Möglichkeit, die bereits mehrfach erfolgreich erprobt worden ist (vgl. Gerwig 2015).

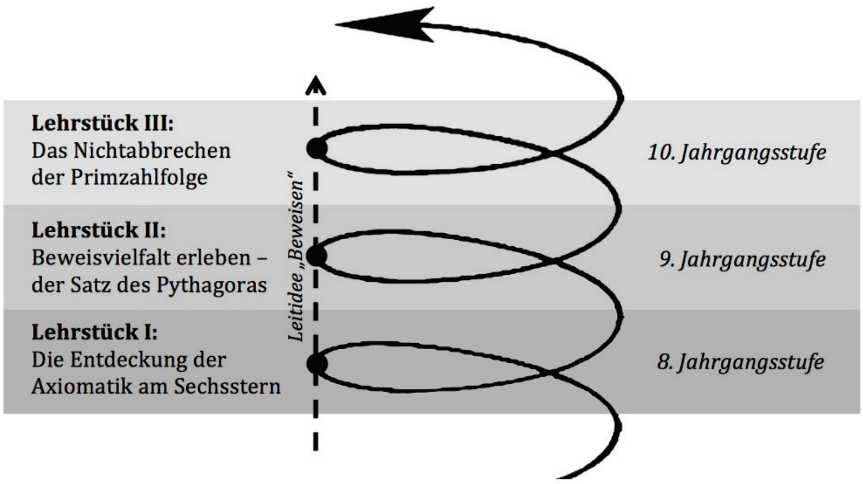


*Abb. 9: Drei Lehrstücke zum Beweisen innerhalb der Leitidee „Beweisen" (aus: Gerwig 2015, 348).*

## VI. Didaktische Anmerkung zur unterrichtlichen Umsetzung skalierbarer Themen

Neben den beschriebenen skalierbaren Themen existiert noch eine Vielzahl weiterer Kandidaten: *Funktionen, Kurven, Zerlegungen, Spieltheorie, Symmetrie, Billard, Graphentheorie, Statistik, Computertomographie, Sonnenuhren*. Dem Leser, der Leserin werden gewiss noch weitere Beispiele einfallen, Beispiele, unter denen sich sicherlich auch weitere Kandidaten für noch zu entwickelnde Lehrstücke finden lassen.

Skalierbare Themen in den eigenen Unterricht einzubauen und diese angemessen miteinander zu verknüpfen, stellt durchaus eine Herausforderung dar. Jedoch fallen einem bei der Beschäftigung mit dieser Thematik eine Vielzahl Themen ein, bei denen das möglich wäre. Dazu entdeckt man auf den zweiten Blick, dass es sich dabei zum Teil um klassische Lehrplanthemen handelt, die bereits heute in der Schule anwesend sind: Die Idee der *Vektorgeometrie* wird schon bei den *Äquivalenzabbildungen* (insb. *Verschiebungen*) in der Sekundarstufe I gelegt, später dann formalisiert und sukzessive erweitert. Die Flächenberechnung einfacher Figuren beginnt bereits in der Primarstufe (insb. Quadrat- und Rechteckberechnung nach Aebli), in der Sekundarstufe I folgt die Erweiterung auf kompliziertere Vielecke und Kreise, bevor in der Sekundarstufe II Flächenberechnungen unter und zwischen Kurven durchgeführt werden.

Einen besonderen Wert bekommen skalierbare Themen nun, wenn auch das ihnen innewohnende genetische Potential im Unterricht auf dramaturgische Weise sichtbar wird. In der Lehrkunstdidaktik sind das Genetische und das Dramaturgische Teile der Methodentrias (exemplarisch-genetisch-dramaturgisch).

Ein Glücksfall: Aus fachlicher Sicht kann die Skalierbarkeit einer Thematik eine wichtige Hilfe zum Auffinden zentraler, exemplarischer Themen für den Mathematikunterricht darstellen, aus didaktischer Sicht scheint der Lehrstückunterricht sehr geeignet zu sein, diese anschließend angemessen in den Unterricht zu bringen. Eine vielversprechende Kombination, die auf weitere Themen ausgeweitet werden sollte.

## Literatur

Basawapatna, A./Repenning, A./Koh, K. H./Nickerson, H. (2013): The Zones of Proximal Flow: Guiding Students Through a Space of Computational Thinking Skills and Challenges. In Proceedings of the Ninth Annual International ACM Conference on International Computing Education Research, S. 67-74, (ICER 2013, August 12-14, San Diego, California, USA). New York: ACM Press.

Brunner, E. (2014): Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen. Grundlagen, Befunde und Konzepte. Berlin: Springer Spektrum.

Geretschläger, R. (2008): Geometric Origami. Arbelos.

Gerwig, M. (2015): Beweisen verstehen im Mathematikunterricht. Axiomatik, Pythagoras und Primzahlen als Exempel der Lehrkunstdidaktik. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Wagenschein, M. (2009): Naturphänomene sehen und verstehen. Genetische Lehrgänge. Das Wagenschein-Studienbuch. Herausgegeben von Hans Christoph Berg. Bern; hep-Verlag.

Wittmann, E. C. (1998): Design und Erforschung von Lernumgebungen als Kern der Mathematikdidaktik. In: Beiträge zur Lehrerbildung, 16 (3), S. 329–342.