O trójkątach pitagorejskich o równych polach

Norbert HUNGERBÜHLER

Wprowadzenie

Autor jest matematykiem z Eidgenosse Technische Hochschule w Zurychu. Zajmuje się głównie układami nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych. Niniejszy tekst to wersja jego artykułu [6], przygotowana na prośbę redakcji.

Poszukiwanie trójkątów prostokątnych o bokach długości całkowitej (tzw. trójkątów pitagorejskich) to bardzo dawny ślad ludzkiego zainteresowania matematyką. Już w starożytnym Babilonie i Egipcie znano wiele takich trójkątów.

Jak wiadomo, dla dowolnych niezerowych liczb całkowitych $m \neq n$ i $\lambda \neq 0$ liczby

$$a = 2\lambda mn\,, \quad b = \lambda(m^2 - n^2)\,, \quad c = \lambda(m^2 + n^2) \tag{1}$$

są (z dokładnością do znaku, którym się przejmować nie będziemy) długościami boków trójkąta pitagorejskiego. Taki trójkąt nazwiemy pierwotnym, jeśli $NWD(a,b,c) = 1$. Jak łatwo sprawdzić, dla $\lambda = 1$ oraz względnie pierwszych m, n różnej parzystości, otrzymujemy trójkąt pierwotny. Co więcej, wszystkie trójkąty pierwotne można otrzymać w ten sposób.

O trójkach pitagorejskich pisaliśmy w *Delcie* 11/1997 – red.

Trójkąty pitagorejskie i ich własności interesowały najróżniejszych autorów (zob. np. [1], [2], [8]). Był wśród nich Charles Lutwidge Dodgson, matematyk o dość szerokich zainteresowaniach, lepiej znany jako Lewis Carroll, autor *Przygód Alicji w krainie czarów* (1865). Na stronie 343 książki *Life and Letters of Lewis Carroll* [3] znaleźć można następujący zapisek z jego dziennika:

W poprzednim, grudniowym numerze *Delty*, w artykule Jacka Jakubowskiego i Rafała Sztencla *Rzuć monetą...*, niebywale złośliwy chochlik umieścił fałszywą nierówność $e^x \leq 1 + x$, wstawiając feralne $(1 + x)$ między dwie strony prawdziwej nierówności $e^x \leq e^{x^2} + x$.

Zawstydzeni, serdecznie przepraszamy Autorów i Czytelników.

Redakcja

19-ty grud. (niedz.) – Siedziałem nocą do 4-tej nad kuszącym problemem, nadesłanym z N. Jorku: „znaleźć trzy równe △-ty prost. o wymiernych bokach". Znalazłem *dwa*, o bokach 20, 21, 29 i 12, 35, 37; nie mogłem znaleźć *trzech*.

Carroll szukał więc trzech trójkątów pitagorejskich o równych polach. Mimo porażki postawił hipotezę, że takich trójek trójkątów pitagorejskich istnieje nieskończenie wiele. (Uwaga: dwie trójki uznajemy za identyczne, jeśli boki wszystkich trójkątów jednej z nich można uzyskać, mnożąc boki trójkątów drugiej trójki przez pewną liczbę wymierną). Spróbujmy pomóc pisarzowi w rozwiązaniu jego zadania.

Trójki trójkątów pitagorejskich o równym polu

Zacznijmy od znalezienia w możliwie systematyczny sposób *dwóch* trójkątów pitagorejskich o równym polu. Weźmy trójkąty o bokach równych odpowiednio

$$a_1 = 2mn_1, \quad b_1 = m^2 - n_1^2, \quad c_1 = m^2 + n_1^2\,;$$
$$a_2 = 2mn_2, \quad b_2 = m^2 - n_2^2, \quad c_2 = m^2 + n_2^2\,.$$

Dodatkowe życzenie, by oba trójkąty miały jednakowe pole P, prowadzi do równania

$$P = mn_1(m^2 - n_1^2) = mn_2(m^2 - n_2^2)\,. \tag{2}$$

Dzieląc obie strony przez m i zbierając składniki zawierające m po lewej stronie, otrzymujemy

$$m^2(n_1 - n_2) = n_1^3 - n_2^3 = (n_1 - n_2)(n_1^2 + n_1 n_2 + n_2^2). \tag{3}$$

Przy założeniu $n_1 - n_2 \neq 0$ mamy więc

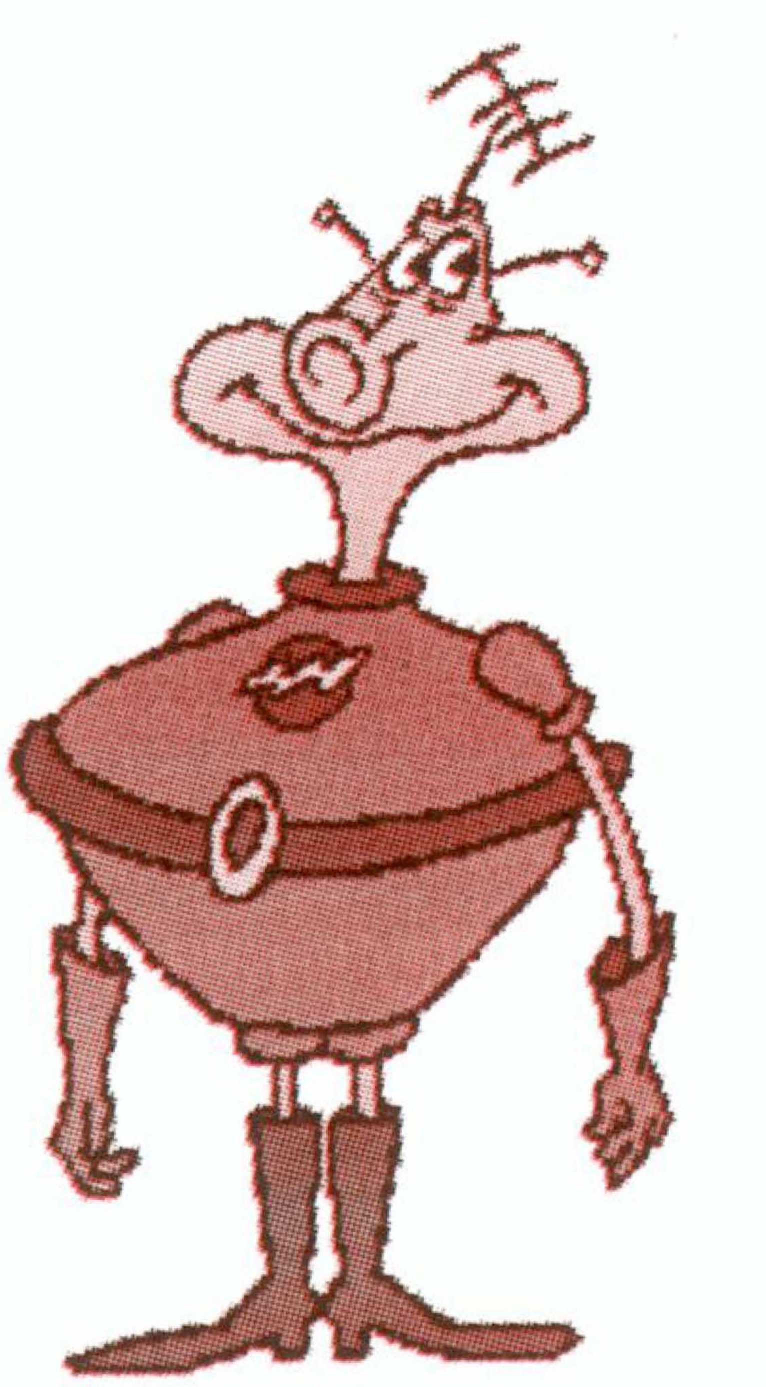
$$m^2 = n_1^2 + n_1 n_2 + n_2^2. \tag{4}$$

Rozwiązujemy (4) jako równanie kwadratowe z niewiadomą n_1 i widzimy, że

$$n_1 = -\tfrac{1}{2}\left(n_2 - \sqrt{4m^2 - 3n_2^2}\,\right). \tag{5}$$

Skoro wynik jest liczbą całkowitą, wyróżnik musi być pełnym kwadratem, więc dla pewnego $\alpha \in \mathbf{N}$ zachodzi równość

$$(2m)^2 - 3n_2^2 = \alpha^2\,. \tag{6}$$



Nazwa: *Mamlak*
M. zam.: **Ukł. 51 Peg**

Równanie diofantyczne (6) znane jest jako tzw. *równanie Pella*. Dobrze wiadomo

Dla tych, którzy o równaniu Pella nie wiedzą i nie chcą wiedzieć wszystkiego, proponujemy drogę na skróty. Określmy dwa ciągi liczb naturalnych p_n i q_n wzorami rekurencyjnymi: $p_0 = 2$, $q_0 = 1$,

$$p_{n+1} = 7p_n + 12q_n\,,$$
$$q_{n+1} = 4p_n + 7q_n\,.$$

Łatwo wykazać przez indukcję, że dla każdego n liczba p_n jest parzysta, niepodzielna przez 3 i $p_n^2 - 3q_n^2 = 1$. Otrzymujemy więc nieskończoną serię rozwiązań $(p_n/2, q_n)$ równania Pella (6) dla szczególnej wartości $\alpha = 1$.

(zob. np. [7]), że ma ono nietrywialne rozwiązania (tzn. $n_2 \notin \{0, \pm m\}$), gdy m jest liczbą pierwszą postaci $m = 6N + 1$ (lub iloczynem takich liczb).

Każde rozwiązanie równania Pella (6) prowadzi do rozwiązania wyjściowego równania (2). Istotnie, z (6) wynika, że n_2 i α są tej samej parzystości, zatem z warunku (5) n_1 jest liczbą całkowitą. Mamy też $n_1 \neq n_2$ (w przeciwnym przypadku liczba m dzieliłaby się przez 3).

A teraz zdarza się cud. Choć zaczęliśmy od szukania *dwóch* trójkątów, w istocie znaleźliśmy *trzy*. Dlaczego? Otóż, równanie (2) oznacza, że n_1 i n_2 są różnymi pierwiastkami wielomianu trzeciego stopnia $p(x) = x(x-m)(x+m) + \frac{P}{m}$. Trzeci pierwiastek tego wielomianu spełnia, zgodnie z twierdzeniem Viète'a, warunek

$$n_1 + n_2 + n_3 = 0 \tag{7}$$

(dla niewtajemniczonych: zapisujemy wielomian w postaci iloczynu czynników liniowych i sprawdzamy współczynnik przy x^2). Podobnie, $n_1 n_2 n_3 = -\frac{P}{m} \neq 0$. Wynika stąd, że liczby całkowite n_1, n_2 i n_3 są różne od $\pm m$ (bowiem $p(\pm m) \neq 0$) i w dodatku mają różne moduły. Zatem, trójkąty pitagorejskie D_i $(i = 1, 2, 3)$ o bokach $2mn_i$, $m^2 - n_i^2$ oraz $m^2 + n_i^2$ mają to samo pole $P = -mn_1n_2n_3$. Ich przeciwpostokątne c_i są różne, więc D_i nie są przystające.

Znaleziona trójka ma specjalną własność: z (7) wynika, że przynajmniej jedna z liczb n_i jest parzysta. Łatwo też zauważyć, że żadna z n_i nie jest wielokrotnością m. Gdy liczba m jest pierwsza, to przynajmniej jeden z trójkątów D_i jest trójkątem pierwotnym. Zatem trójka D_i, $i = 1, 2, 3$, jest wówczas pierwotna – w tym sensie, że nie ma liczby naturalnej, która dzieliłaby jednocześnie długości wszystkich 9 boków znalezionych trójkątów.

Czytelnik zechce sprawdzić, że nieskończenie wiele trójek pierwotnych trójkątów pitagorejskich o równym polu można otrzymać, wykorzystując opisane wyżej ciągi p_n i q_n oraz wyznaczoną przez nie serię rozwiązań równania Pella.

Czy może się zdarzyć, że dla różnych m otrzymamy tę samą trójkę? Nie! By się o tym przekonać, zauważmy, że dokładnie jedna z liczb n_i, powiedzmy n_1, ma moduł większy od $|m|$ (trzeba spojrzeć na wykres wielomianu $p(x)$). Trójkąt D_1 ma więc w naszej trójce przyprostokątną o największej długości z. Jeśli x i y są długościami przyprostokątnych D_1, to z definicji boków D_i mamy wtedy

$$\text{albo } m = \sqrt{\frac{z-x}{2}} \in \mathbf{N}\,, \quad \text{albo } m = \sqrt{\frac{z-y}{2}} \in \mathbf{N}\,,$$

(tylko jeden z ułamków pod pierwiastkiem ma wartość naturalną). Zatem, trójka wyznacza liczbę m.

Dla każdej liczby pierwszej $m = 6N + 1$ otrzymujemy trójkę pierwotną trójkątów pitagorejskich o równych polach. Ile jest takich m? Przypomnijmy twierdzenie Dirichleta: każdy ciąg arytmetyczny, którego kolejne wyrazy są względnie pierwsze, zawiera nieskończenie wiele liczb pierwszych. Istnieje więc nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci $m = 6N + 1$. Podsumujmy dotychczasowe rozważania.

Twierdzenie. *Istnieje nieskończona rodzina trójek trójkątów pitagorejskich o równych polach. W szczególności, dla różnych liczb pierwszych postaci* $m = 6N + 1$ *otrzymujemy różne trójki pierwotne trójkątów pitagorejskich o polu* $P = mnl(n+l)$, *gdzie* n *i* l *są naturalnymi rozwiązaniami równania* $m^2 = n^2 + nl + l^2$.

Uwaga. Opisana metoda nie daje wszystkich trójek pierwotnych. Wśród pominiętych trójek pierwotnych jest np. trójka

$$a_1 = 4080 \quad b_1 = 1001 \quad c_1 = 4201$$
$$a_2 = 1430 \quad b_2 = 2856 \quad c_2 = 3194$$
$$a_3 = 528 \quad b_3 = 7735 \quad c_3 = 7753$$

– dostaniemy ją, kładąc we wzorach (1) $\lambda = 1$ oraz $(m_1, n_1) = (51, 40)$, $(m_2, n_2) = (55, 13)$, $(m_3, n_3) = (88, 3)$. Wspólne pole trójkątów to $P = 2042040$. Można udowodnić, że żadna trójka o mniejszym polu nie jest pominięta. Przykład został znaleziony przy użyciu programu *Mathematica*.

Nazwa: *Grzdąciel*
M. zam.: **Ukł. μ And**

Wzór Fermata

Carroll najwyraźniej nie wiedział o spostrzeżeniu Fermata poczynionym w [4]: jeśli z jest przeciwprostokątną, a b i d przyprostokątnymi trójkąta prostokątnego o bokach wymiernych, to można otrzymać nowy trójkąt prostokątny o wymiernych bokach i tym samym polu, kładąc

$$z' = \frac{z^4 + 4b^2d^2}{2z(b^2 - d^2)}, \quad b' = \frac{z^4 - 4b^2d^2}{2z(b^2 - d^2)}, \quad d' = \frac{4z^2bd}{2z(b^2 - d^2)}.$$

Iterując powyższy wzór $n-1$ razy, otrzymamy n trójkątów prostokątnych o równych polach i bokach długości wymiernej. Pomnożenie wszystkich boków przez odpowiednią liczbę całkowitą zmieni długości boków w liczby całkowite i, oczywiście, nie naruszy warunku równości pól. Nie mamy jednak pewności, czy niektóre z otrzymanych trójkątów nie będą przystające. Zakończmy więc niniejszy artykuł zadaniem dla Czytelników.

Zadanie. Udowodnić, że dla każdego $n \in \mathbf{N}$ istnieje nieskończona rodzina (pierwotnych) n-tek trójkątów pitagorejskich o równych polach.

Z angielskiego przełożył P.S.

Literatura

[1] J. Collins, *The Gentleman's Math. Companion*, 2, No. 11 (1808), 123.

[2] J. Cunliffe, *New Series of the Math. Repository* (ed. Th. Leybourn), 3, II (1814), 60.

[3] C.S. Dodgson, *Life and Letters of Lewis Carroll*, New York Century, 1898.

[4] P. Fermat, *Œuvres III*, 254–255; Fermat's Diophanti Alex. Arith., 1670, 220.

[5] M. Hazewinkel, *Encyclopaedia of mathematics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (etc.), 1987.

[6] N. Hungerbühler, *Math. Mag.* 69/3, 182-184 (1996).

[7] L. J. Mordell, *Diophantine equations*, Academic Press, London (etc.), 1970.

[8] C. Tweedie, *Proc. Edinb. Math. Soc.*, 24 (1905-6), 7–19.

Zadania

Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ

Rozważamy funkcje o wartościach rzeczywistych określone na zbiorze $\{-1,1\}^n$, na który można patrzeć jako na zbiór wierzchołków n-wymiarowej kostki $[-1,1]^n$. Dla każdego podzbioru A zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$ funkcję $w_A : \{-1,1\}^n \to \mathbf{R}$ definiujemy wzorem $w_A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i \in A} x_i$. Przyjmujemy, że $w_\emptyset \equiv 1$. Funkcje w_A tworzą tzw. układ Walsha.

M 832. Udowodnić, że dla $A, B \subset \{1,2,\ldots,n\}$ zachodzi tożsamość $w_A \cdot w_B = w_{A \div B}$, gdzie $A \div B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ oznacza różnicę symetryczną zbiorów A i B.
Rozwiązanie na str. 16

M 833. Udowodnić, że dla każdej funkcji $f\colon \{-1,1\}^n \to \mathbf{R}$ można dobrać takie liczby rzeczywiste a_A, że $f = \sum_{A \subset \{1,2,\ldots,n\}} a_A w_A$.
Rozwiązanie na str. 15

M 834. Dla $f\colon \{-1,1\}^n \to \mathbf{R}$ zdefiniujmy funkcję $Lf\colon \{-1,1\}^n \to \mathbf{R}$ wzorem

$$Lf(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{n}\Big(f(-x_1,x_2,\ldots,x_n) + f(x_1,-x_2,x_3,\ldots,x_n) + \cdots + f(x_1,\ldots,x_{n-1},-x_n)\Big)$$

(tzn. funkcję Lf otrzymujemy, uśredniając wartości f w sąsiednich wierzchołkach kostki). Udowodnić, że $Lw_A = (1 - \frac{2}{n}\operatorname{card} A)w_A$, gdzie $\operatorname{card} A$ oznacza liczbę elementów zbioru A.
Rozwiązanie na str. 16

Uwaga. Powyższe wyniki można wykorzystać do wykazania ergodyczności symetrycznego błądzenia losowego po wierzchołkach n-wymiarowej kostki (do sąsiednich wierzchołków przechodzimy z prawdopodobieństwem $1/n$).

Redaguje Jarosław KULPA

F 467. Od lat fizycy zastanawiają się, czy neutrino ma masę spoczynkową. Oszacować, jaką teoretycznie największą masę może mieć neutrino i wyrazić tę masę w elektronowoltach.
Przyjąć, że liczba neutrin we Wszechświecie jest porównywalna z liczbą fotonów promieniowania reliktowego mających widmo ciała doskonale czarnego o temperaturze $T = 2{,}74$ K. Koncentracja fotonów wynosi $n = a\left(\frac{\mathrm{k}T}{hc}\right)^3$, gdzie $a = 60{,}4$ jest współczynnikiem liczbowym, k – stałą Boltzmanna, natomiast h – stałą Plancka. Przyjąć, że gęstość Wszechświata jest równa w przybliżeniu gęstości krytycznej $\rho_{\mathrm{kr}} = 5{,}5 \cdot 10^{-27}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, masa zaś obserwowalnej jasnej materii jest dziesięciokrotnie mniejsza.
Rozwiązanie na str. 6

F 468. Kiedy w momencie gaszenia światła otwieramy oczy, widzimy przez chwilę proces stygnięcia włókna żarówki. Oszacować czas tego procesu, gdy temperatura włókna spada od $T_1 = 2800$ K do $T_2 = 1000$ K, tj. do granicy odbierania wrażeń wzrokowych. Dane dotyczące żarówki i włókna: moc żarówki $P = 100$ W, promień przekroju włókna $r = 1 \cdot 10^{-4}$ m, gęstość wolframu $\rho = 19\,300\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, masa molowa wolframu $\mu = 184\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$, emisyjność wolframu w porównaniu z ciałem doskonale czarnym $k = 40\%$.
Prawo Stefana-Boltzmanna mówi, że moc promieniowania jednostkowej powierzchni ciała doskonale czarnego wynosi $\sigma \cdot T^4$, gdzie $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}$ jest stałą Stefana-Boltzmanna. Ciepło molowe ciał stałych w wysokich temperaturach wynosi $C = 3$ R, gdzie $\mathrm{R} = 8{,}314\,\mathrm{J\cdot K^{-1}mol^{-1}}$ jest stałą gazową.
Rozwiązanie na str. 6