Origami - von der Kunst und der Wissenschaft des Papierfaltens

NORBERT HUNGERBÜHLER (ETH ZÜRICH)

Origami gehört zu den skalierbaren Themen des Mathematikunterrichts. Das heisst, die Beschäftigung mit dem Falten von Papier hält Aspekte vom Kindergartenniveau bis hin zu aktueller Forschung bereit. Dieser Text bietet einen kurzen Überblick über die Geschichte und die Anwendungen von Origami, über Origami-Geometrie und deren Axiomatik. Gleichzeitig werden einige etwas speziellere mathematische Probleme im Zusammenhang mit Origami vorgestellt. Wir gehen auch der Frage nach, wie die Mathematik beim Design der beeindruckenden Faltfiguren der Origamikünstler hilft. Origami ist viel mehr als nur ein Spiel für Kinderhände.

1. Was ist Origami?

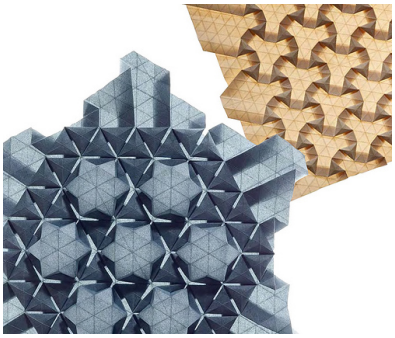
Origami ist ein Sammelbegriff für die vielfältigen Aspekte des Faltens von Papier. Die folgende (unvollständige) Liste gibt einen groben Überblick über die Gebiete:

Klassisches Origami: Aus einem quadratischen Stück Papier wird (ohne Verwendung von Schere oder Leim) eine Figur gefaltet. Die Abbildung rechts zeigt eine Tarantel von Robert Lang.

Modulares Origami: Das gefaltete Objekt setzt sich aus mehreren Komponenten zusammen. Die Abbildung rechts zeigt einen dreidimensionalen Stern aus verschränkten Tetraedern von Thomas Hull.

Rigid Origami: Beim industriellen Falten von Metall anstelle von Papier stellt sich die Frage, welche Origami-Modelle starr (also ohne Verbiegen der Flächenstücke) gefaltet und allenfalls wieder geöffnet werden können.

Origami-Parkettierungen: Es werden reguläre Parkettierungen der Ebene gefaltet. Die Abbildung rechts zeigt Beispiele von Origami-Parkettierungen im Durchlicht.



Zweidimensionales Origami vs. **dreidimensionales Origami:** Hier geht es um die Untersuchung der Unterschiede beim Falten von Figuren, die in die Ebene gefaltet werden können im Vergleich zu solchen, welche dreidimensionale Objekte bilden.

Statisches vs. **dynamisches Origami:** Manche Origami-Figuren (eben die dynamischen) lassen sich bewegen. So schlägt der bekannte Origami-Kranich mit den Flügeln, wenn man ihn am Schwanz zieht.

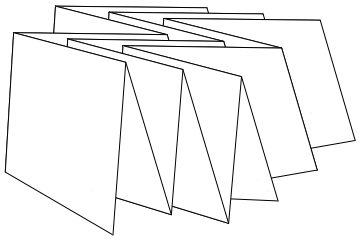
Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG),Heft 45, 2013, S. 1–14

Version 1 vom 31. Oktober 2013

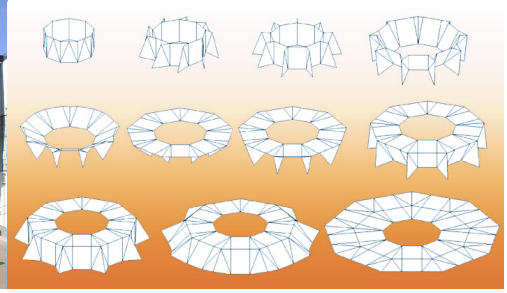
Origami als **axiomatische Geometrie:** Dabei wird untersucht, welche geometrischen Konstruktionen ausführbar sind, wenn man statt mit Zirkel und Lineal nur mit Faltungen Geometrie betreibt. Wir gehen im Abschnitt 4 auf dieses Thema ein.

Origami-Design: Hier geht es um die Frage, wie man Figuren, wie etwa die oben erwähnte Tarantel, falten kann. Wie die Mathematik bei der Beantwortung dieser Frage hilft, wird in Abschnitt 7 angesprochen.

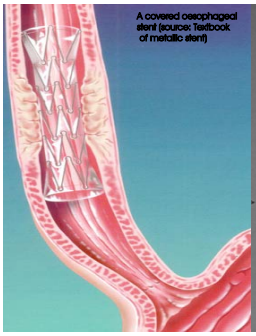
2. Anwendungen



Origami ist längst nicht mehr nur eine amüsante Herausforderung für die Fingerfertigkeit. Die Anwendungen der Falttechnik haben einen festen Platz in der Industrie. Typischerweise wird diese Technik dort eingesetzt, wo grosse und sperrige Objekte etwa zum Transport klein gemacht werden müssen, ohne dass man sie zerlegt. Ein Beispiel ist das rechts abgebildete **Miura Solar Panel**, welches 1995 von Koryo Miura (Tokyo University) erfunden wurde. Das Panel findet zusammengefaltet im Laderaum der Trägerrakete Platz und wird im Orbit mit einer einzigen Bewegung entfaltet. Auch manche Strassenkarten sind nach dieser Methode gefaltet: Man kann sie mit einem einzigen Handgriff öffnen und schliessen. Das Faltschema ist rechts ebenfalls angedeutet.

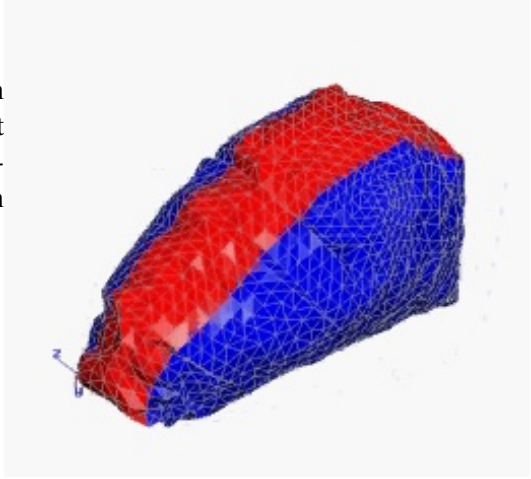


Ein weiteres Beispiel von Rigid Origami ist das vom Lawrence Livermore National Laboratory 2004 entwickelte **Fresnel-Teleskop** *Eyeglass*, welches im Erdorbit stationiert werden soll. Die Abbildung rechts zeigt den Origami-Forscher Robert Lang vor einem Modell der Linse (Foto Rod Hyde, LLNL). Er hat die hier verwendete Falttechnik entwickelt. Das Bild nebenan zeigt schematisch schrittweise den Vorgang des Entfaltens.

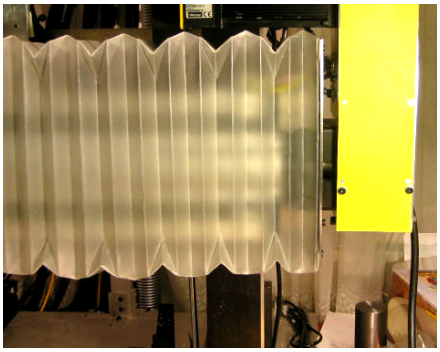


In der Medizin werden zur Behandlung von Arteriosklerose sogenannte **Stents** endoskopisch in verengte Blutgefässe eingebracht, um sie von innen zu stützen. Die Abbildung rechts zeigt einen Origami-Stent, der erst an Ort und Stelle in einer verengten Arterie entfaltet wird. Es handelt sich dabei um den Prototypen eines von Zhong You und Kaori Kuribayashi-Shigetomi entwickelten Stents (Oxford, 2003). Der Grössenunterschied zwischen dem ge- und dem entfalteten Zustand ist frappant (siehe Bild).

Im **Automobilbau** kommen Origami-Techniken beim Design von **Knautschzonen** und von **Airbags** zum Einsatz. Rechts ist eine Computersimulation eines Airbags abgebildet (EASi Engineering, 1999). Airbags müssen sich in Sekundenbruchteilen störungsfrei entfalten.



Im Maschinenbau werden häufig pneumatische **Bälge** eingesetzt. Dabei wurde das unten links abgebildete jahrhundertealte klassische Faltmuster verwendet, bis 1997 Nathan Kane, ein junger MIT-Student, die Fachwelt mit einem optimierten Faltplan für Bälge überraschte: Die neuen patentierten Bälge lassen sich weiter dehnen und weisen geringere Materialermüdung auf als die herkömmlichen (siehe Bild rechts).



Gefaltete **Möbel** gibt es seit Walter Gropius 1919 in Weimar die berühmte Bauhausschule gründete. Vor kurzem entwarfen drei tiroler Studenten einen Stuhl, der aus einer einzigen Platte gefaltet wird, nach dem Vorbild der gefalteten Flügel des Marienkäfers. Auch andere Insekten bedienen sich derartiger Falttechniken für ihre Flügel, insbesondere auch beim Schlüpfen aus der Puppe. Das Bild unten links zeigt den bionischen Stuhl von Armin Steinkasserer, Martin Zimmermann und Alexander Masser (Fachhochschule Kärnten). Hundert dieser Faltstühle lassen sich auf einem Stapel von nur einem Meter Höhe lagern.

Auch die **Verpackungsindustrie** führt uns, wenn wir nur einmal genau hinschauen, tagtäglich vor Augen, was da alles gefaltet werden kann. Ein entsprechendes Beispiel wird noch im Abschnitt 8 betrachtet.

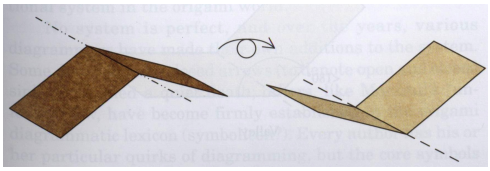
3. Geschichte

Etymologisch hat das Wort Origami seine Wurzeln im Japanischen: 折り紙, ori = falten, kami = Papier. In **Japan** ist das Wort erst seit etwa 1880 im Gebrauch. Die Ursprünge der Faltkunst liegen jedoch viel weiter in der Vergangenheit und lassen sich bis mindestens in die Edo Epoche (1603–1867) zurückverfolgen. Aber auch **Spanien** und **Argentinien** haben eine eigene Tradition der Faltkunst. Dort wird das Wort **Papiroflexia** verwendet.

In **Deutschland** hat Friedrich Fröbel (1782–1852), der Erfinder des Kindergartens, Origami in seinem Curriculum für die Kinder verankert. Fröbel hat argumentiert, dass die Beschäftigung mit Papierfalten die manuellen Fertigkeiten der Kinder fördert und gleichzeitig deren Raumvorstellung. Noch heute wird in vielen Teilen Deutschlands zu Weihnachten der Fröbel-Stern gefaltet, der in der nebenstehenden Abbildung zu sehen ist.

Gegen Ende des 19. Jahrhunderts entdeckte die Mathematik Origami für sich: **T. Sundara Row** war 1893 einer der Ersten, der in seinem Buch [24] Probleme wie die Konstruktion regulärer Vielecke, Kegelschnitte, (approximative) Winkeldreiteilung oder das Delische Problem mit Faltungen behandelte. Wir kommen im Abschnitt 4.1 darauf zurück. In Deutschland griff **Hermann Wiener** ab 1893 das Thema Papierfalten als mathematische Disziplin auf.

Ein nächster wichtiger Schritt war die Einführung der **Standard Codierung** durch **Akira Yoshizawa** (Japan) und **Sam Randlett** (USA) um 1950. So werden z. B. Bergfalten strichpunktiert dargestellt, Talfalten gestrichelt (siehe Abbildung unten links). Insbesondere Yoshizawa löste sich von den verhältnismässig wenigen überlieferten Formen und entwickelte einen ganzen Zoo neuer Modelle. Das Bild unten rechts zeigt Akira Yoshizawa inmitten seiner Kreationen.



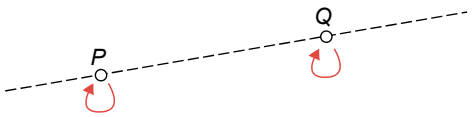
Die eigentliche **Mathematisierung von Origami** (*Origami sekkei*) fand jedoch erst ab ca. 1990 statt. Wegweisend waren dabei Arbeiten von Robert J. Lang, Tom Hull, Martin und Eric Demaine, Robert Geretschläger und vielen anderen. Die eigentliche **Origami-Axiomatik**, auf die wir gleich noch genauer eingehen, entstand zwischen 1989 und 2001 unter dem Einfluss von Jacques Justin, Humiaki Huzita und Koshiro Hatori.

Heute existieren in vielen Ländern **Origami Gesellschaften** und es werden jährlich internationale **Origami Konferenzen** organisiert, etwa die **OSME International Conference on Origami in science, mathematics and education**.

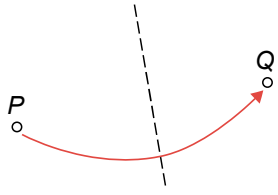
4. Die Huzita-Justin Axiome

Die Tradition der klassischen Antike erlaubt geometrische Konstruktionen nach den bekannten Regeln, welche die Handhabung von Zirkel und Lineal festlegen. Nun legen wir diese gewohnten Werkzeuge aus der Hand! Die folgenden Regeln bestimmen, durch welche Konstruktionsschritte aus gegebenen oder bereits konstruierten Punkten, durch Falten neue Punkte erzeugt werden können. Punkte sind dabei immer Schnittpunkte von Falten.

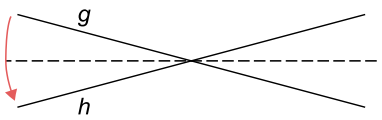
(A1) Zwei Punkte P und Q können durch eine Falte verbunden werden.



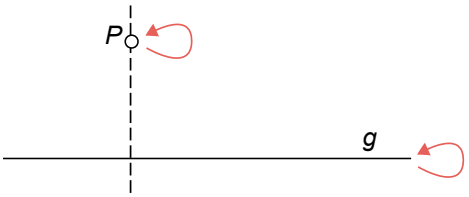
(A2) Ein Punkt P kann auf einen Punkt Q gefaltet werden.



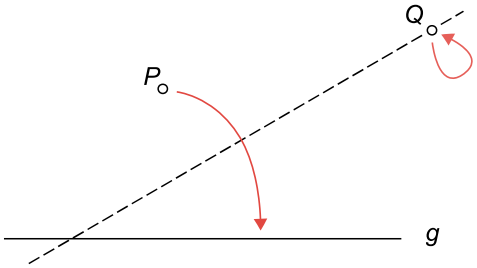
(A3) Eine Gerade g kann auf eine Gerade h gefaltet werden.



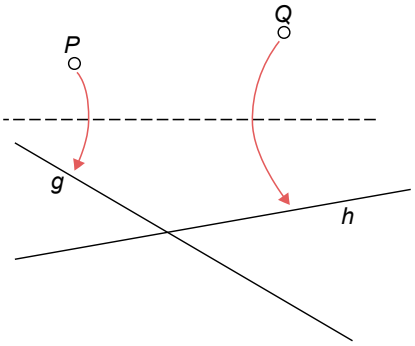
(A4) Man kann eine Falte durch einem Punkt P legen, die senkrecht auf einer Geraden g steht.



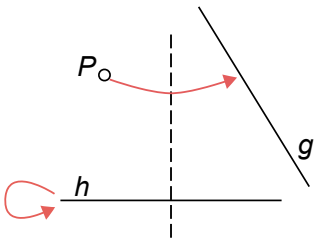
(A5) Ein Punkt P kann so auf die Gerade g gefaltet werden, dass die Falte durch einen Punkt Q geht.



(A6) Die Punkte P und Q können auf die Geraden g und h gefaltet werden.



(A7) Ein Punkt P kann so auf die Gerade g gefaltet werden, dass die Falte senkrecht zu einer Geraden h steht.



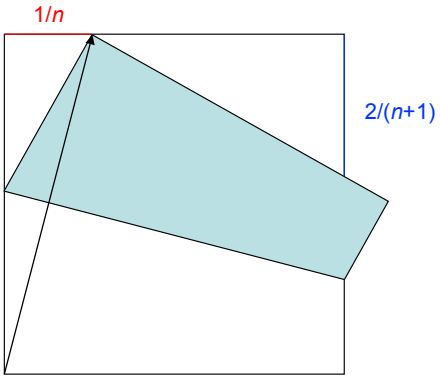
Die Existenz der jeweiligen Faltung setzt dabei implizit immer voraus, dass die gegebene Konfiguration überhaupt eine Lösung zulässt. Sind etwa in (A7) die Geraden g und h parallel und $P \notin g$, so ist keine entsprechende Faltung möglich.

(A1) entspricht also dem Legen einer Geraden durch zwei Punkte, (A2) der Konstruktion der Mittelsenkrechten. (A3) liefert die Winkelhalbierende oder Mittelparallele, und (A4) das Lot. Man überlegt sich leicht, dass (A5) der Konstruktion einer Tangente von Q aus an eine Parabel mit Leitlinie g und Brennpunkt P entspricht. Die entsprechende Konstruktion mit Zirkel und Lineal ist einfach. Analog liefert (A6) die gemeinsame Tangente an zwei Parablen. Die entsprechende Konstruktion ist mit Zirkel und Lineal nicht möglich. An dieser Stelle bringt die Origami-Geometrie also tatsächlich ein neues Werkzeug ins Spiel.

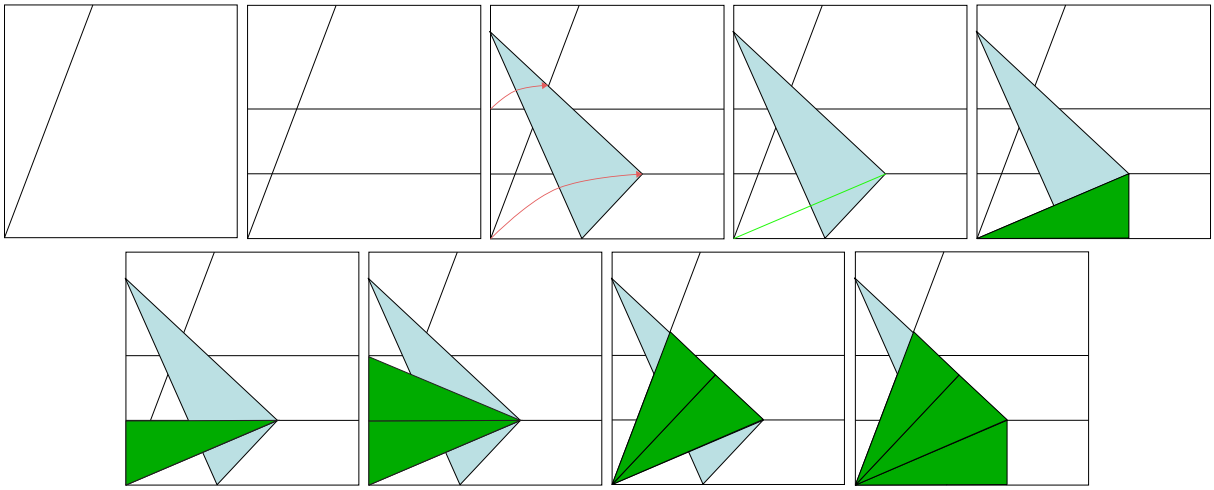
Die schon Anfang der 1990er Jahre formulierten Axiome (A1) bis (A6) handeln von den Möglichkeiten, wie Punkte und Geraden mit anderen Punkten und Geraden durch eine Faltung zur Deckung gebracht werden können. Dies ist durch die Pfeile in den obigen Abbildungen angedeutet. Es hat rund 10 Jahre gedauert, bis Koshiro Hatori bemerkte, dass eine kombinatorische Möglichkeit vergessen wurde, nämlich (A7). Später bemerkte man, dass Jacques Justin alle sieben Axiome in einem frühen Aufsatz [17] bereits 1989 aufgezählt hatte. Geometrisch ist (A7) jedenfalls auch mit Zirkel und Lineal leicht zu imitieren.

4.1. Was man mit den Axiomen konstruieren kann

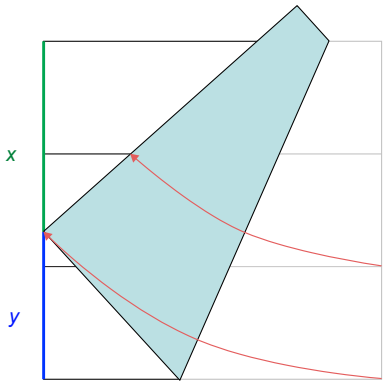
Zum Aufwärmen bemerken wir, dass mit den Axiomen (A1) bis (A7) beliebige rationale Verhältnisse konstruiert werden können. Dies wird zum Beispiel durch die nebenstehende Konstruktion von Haga sichergestellt. Dabei gehen wir davon aus, dass wir bereits ein Einheitsquadrat konstruiert haben. Man beachte, dass der untere Endpunkt der Strecke mit Länge $\frac{2}{n+1}$ zwar bereits in der Figur abgelesen werden kann, jedoch noch mit einer weiteren Falte konstruiert werden muss. Eine weitere Falte liefert die Länge $\frac{1}{n+1}$. Iterativ können auf diese Weise im Einheitsquadrat alle Stammbrüche konstruiert werden, woraus sich schliesslich leicht auch deren Vielfache ergeben. Dem Leser sei die genaue Analyse der Haga-Konstruktion in Robert Geretschlägers Buch [13] empfohlen.



Als nächstes betrachten wir eines der drei klassischen, mit Zirkel und Lineal unlösbaren Probleme der antiken griechischen Geometrie, die **Winkeldreiteilung**. Mit Hilfe der Origami-Axiome lässt sich jeder Winkel in drei gleiche Teile teilen (Hisashi Abe 1980, Robert Geretschläger 1995). Wir gehen dabei wieder von einem Einheitsquadrat aus. Der zu teilende Winkel ist in der ersten Figur unten durch die untere Seite des Quadrats und den eingezeichneten Schenkel gegeben. Nachdem in einem ersten Schritt zwei äquidistante Parallelen zur Grundseite konstruiert werden, ist danach mit einer einzigen Anwendung von (A6) der Winkel bereits dreigeteilt. Verfolgt man die kongruenten grünen Dreiecke, ist die Korrektheit der Methode sofort einzusehen:



Auch das Problem der Würfelverdoppelung, das **Delische Problem**, ist von Peter Messer 1986 durch eine einfache Origami-Konstruktion gelöst worden. Sie ist in der nebenstehenden Abbildung zu sehen. Die beiden waagrechten Parallelen dritteln das Einheitsquadrat. Auch hier erfordert die Konstruktion nur noch eine einzige Anwendung von (A6). Eine kurze Rechnung zeigt, dass $\frac{x}{y} = \sqrt[3]{2}$ gilt. Sowohl für die Winkeldreiteilung als auch für das Delische Problem hat Koshiro Hatori weitere Konstruktionen gefunden (siehe [15]).



Die folgende kleine Liste illustriert weitere Konstruktionen, die der Origami-Geometrie zugänglich sind, jedoch innerhalb der Zirkel- und Linealgeometrie unerreichbar bleiben:

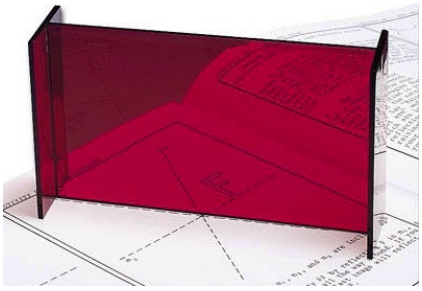
- Das **Eulerproblem:** Man konstruiere ein Dreieck aus Schwerpunkt, Umkreismittelpunkt und Inkreismittelpunkt (siehe [22]).

- Das **Problem des Alhazen:** Man spiegle einen Lichtstrahl ausgehend von einem Punkt A an einem gegebenen Kreis so, dass er anschliessend durch einen gegebenen Punkt B geht (siehe [2], [16]).
- **Nullstellen von Polynomen bis Grad 4:** Mit Zirkel und Lineal können Nullstellen von quadratischen Polynomen konstruiert werden, die Origami-Axiome erlauben die Konstruktion von Nullstellen von Polynomen bis zum Grad 4 (siehe [12], [9]).
- **Reguläre n-Ecke** sind mit Origami für $n = 2^a 3^b p_1 p_2 \dots p_k$ konstruierbar, wobei p_i verschiedene Pierpont Primzahlen sind, d. h. von der Form $2^c 3^d + 1$ (siehe [21]). Diese Bedingung lässt sich mit der Eulerschen Phi-Funktion äquivalent so ausdrücken: $\varphi(n) = 2^e 3^f$.

Eine genauere Analyse zeigt den Zusammenhang der Origami-Axiome mit anderen Axiomensystemen. Zwei Geometrien heissen äquivalent, wenn jede Konstruktionsaufgabe, die mit den Regeln der einen Geometrie lösbar ist, auch mit den Regeln der anderen Geometrie bewerkstelligt werden kann, und umgekehrt. In diesem Sinne gilt:

- (A1) bis (A5) ist äquivalent zur Geometrie mit Zirkel und Lineal (siehe [11]).
- (A1) bis (A7) ist äquivalent zu (A6) (diese Bemerkung findet sich auf der Web-Seite von Koshiro Hatori [15]).
- (A1) bis (A7) ist äquivalent zur Neusis-Geometrie und zur Mira-Geometrie (siehe [21]).

Die Mira ist ein halbdurchlässiger Spiegel, den man senkrecht auf seine Konstruktionsebene stellt. Indem man sie so lange verschiebt, bis zum Beispiel Punkte hinter dem Spiegel zur Deckung mit dem Spiegelbild von Geraden vor dem Spiegel gebracht werden, führt man gerade eine Origami-Konstruktion aus: Die Schnittgerade der Mira mit der Konstruktionsebene ist gerade die Position der Falte (siehe die nebenstehende Abbildung).



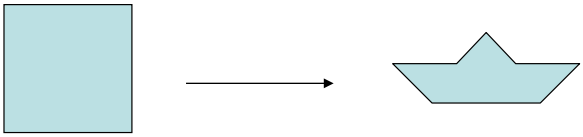
Die Neusis-Geometrie bedient sich eines Zirkels und eines Lineals, auf dem zusätzlich zwei Markierungen angebracht sind. Dabei ist es zum Beispiel erlaubt, das Lineal solange um einen Punkt zu drehen, bis die beiden Markierungen mit zwei gegebenen Geraden inzident sind.

Inzwischen wurden auch Origami-Geometrien **höherer Ordnung** untersucht: Dabei erlaubt man mehr als nur eine Falte simultan so zu legen, dass gewisse Inzidenzen auftreten (siehe [3]).

5. Spezielle Probleme

5.1. Das Margulis Napkin Problem

Faltet man eine Serviette in die Ebene, so ist die bedeckte Fläche offensichtlich kleiner als die ursprüngliche. Aber gilt dies auch für den Umfang? Diese Frage wird Grigory Margulis zugeschrieben.

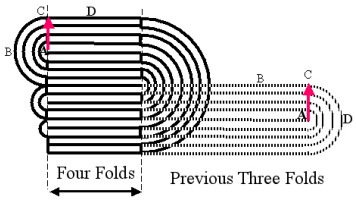


Falls man sequentiell entlang von Geraden faltet, nimmt der Umfang tatsächlich monoton ab. Dies wurde von Vladimir Arnold gezeigt, wobei in seiner Version die Serviette durch eine russische Rubel-Note ersetzt wird (siehe [4]). Lässt man jedoch beliebige Faltungen zu, so ist die Vermutung falsch (siehe [18]). Tatsächlich sind Faltungen bekannt, mit denen ein beliebig grosser Umfang erreicht werden kann (siehe [25])!

5.2. Wie oft kann man ein Papier falten?

Ein bekannter Mythos besagt, dass es nicht möglich ist, ein Papier öfter als 7 Mal hintereinander immer zur Hälfte zu falten. Wer es mit einem A3 (oder noch grösseren Papierformat) probiert, wird dies gern

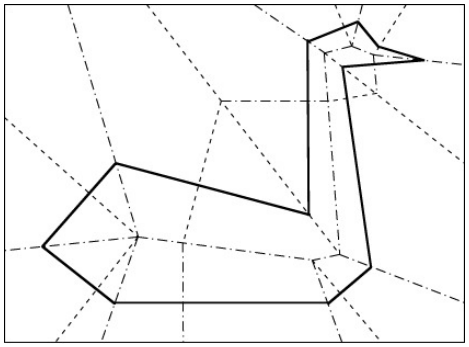
bestätigen. 2001 zerstörte die junge High School Studentin Britney Gallivan diesen Mythos, indem sie einen langen Papierstreifen 11 mal faltete (siehe Abbildung). Ein Jahr später schaffte sie es sogar, ein 1200 Meter langes Toilettenpapier 12 Mal immer zur Hälfte zu falten.



$$L = \frac{\pi d}{6}(2^n + 4)(2^n - 1)$$

Die Formel von Gallivan, links in der obigen Abbildung, zeigt den Zusammenhang zwischen der nötigen Länge L des Papiers mit dessen Dicke d bei n Faltungen.

5.3. Fold and cut



Ein beliebtes Kinderspiel ist der Scherenschnitt: Ein Stück Papier wird gefaltet, dann ein Stück davon abgeschnitten und schliesslich bestaunt man nach dem Entfalten das Resultat. Interessant ist die umgekehrte Frage: Welche Figuren lassen sich auf diese Weise überhaupt herstellen? Als besondere Herausforderung soll dabei nur ein einziger Schnitt entlang einer Geraden zugelassen sein. Die nebenstehende Abbildung zeigt ein Faltmuster, welches mit einem einzigen geraden Schnitt einen Schwan ergibt. Die erstaunliche Antwort auf die allgemeine Frage ist ein Satz von Martin und Eric Demaine, Anna Lubiw und Joseph O'Rourke (siehe [8]):

Satz 1 *Sei P ein Polygon (nicht notwendig zusammenhängend). Dann existiert eine Faltung und ein gerader Schnitt, so dass exakt das Polygon P resultiert.*

Der Beweis ist konstruktiv: Es existieren mittlerweile mehrere Algorithmen, welche bei gegebenem Polygon ein entsprechendes Faltmuster berechnen.

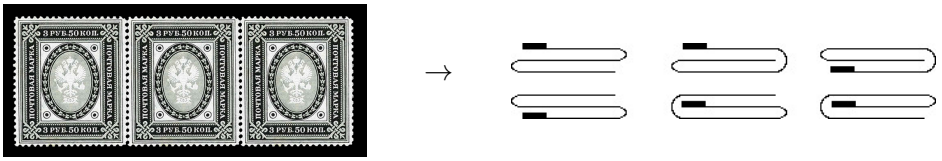
5.4. Ulams Briefmarkenproblem

Wer schon einmal versucht hat einen Medikamentenbeipackzettel nach dem Lesen wieder in seine ursprüngliche Form zu falten, kennt das Problem: Es will nicht gelingen! Aber warum?

Tatsächlich ist bereits das eindimensionale Analogon dieser Frage ein verzwicktes Problem, das auf den polnischen Mathematiker Stanislaw Marcin Ulam zurückgeht. Er fragte nämlich:

Auf wieviele Arten kann man einen String von n Briefmarken falten?

Dabei hält man die Lage und Orientierung der linken Marke fest und faltet so lange entlang der Perforationen, bis es nicht mehr geht, das heisst, bis man einen Stapel von der Grösse einer Marke erhalten hat.



Die Abbildung zeigt alle 6 möglichen Faltarten bei $n = 3$ Briefmarken von der Seite gesehen. Der kleine schwarze Balken markiert dabei die Vorderseite der linken Marke. Man hat mit Computerprogrammen (siehe [20]) die Anzahl Faltungen für kleine Werte von n berechnet. In Neil Sloanes **On-Line Encyclopedia of Integer Sequences** [23] ist die Folge bis $n \leq 45$ unter der Nummer A000136 zu finden.

Briefmarken	2	3	4	5	6	7	8	9
Anzahl Faltungen	2	6	16	50	144	462	1392	4536

Erstaunlicherweise ist jedoch bis heute weder eine explizite noch eine rekursive Formel für die Anzahl der Faltungen bekannt.

5.5. Die Paperfolding Folge

Wir betrachten eine 0-1-Folge mit dem folgenden **Bildungsgesetz**:

> *Beginne mit der Folge, die aus einer einzigen 1 besteht. In jedem Schritt wird dann eine alternierende Folge von 1 und 0 zwischen die bestehenden Ziffern geschoben (inklusive vorn und hinten).*

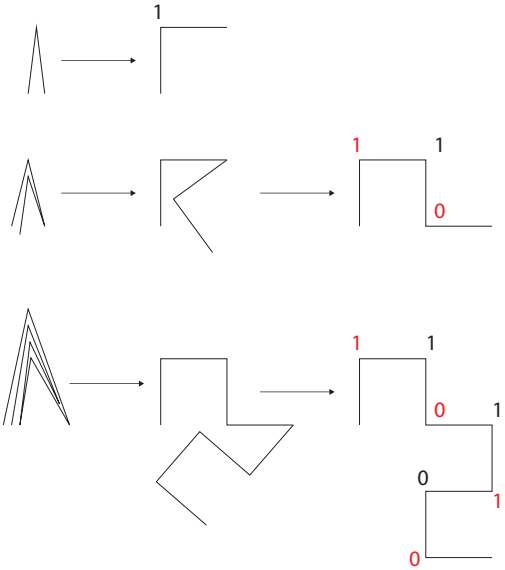
Die folgende Tabelle zeigt die ersten vier Schritte. Die eingeschobenen Ziffern sind dabei jeweils fett dargestellt.

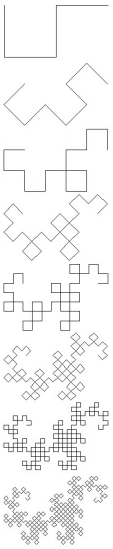
1. Schritt:							1								
2. Schritt:				**1**			1				**0**				
3. Schritt:		**1**		1		**0**	1		**1**		0		**0**		
4. Schritt:	**1**	1	**0**	1	**1**	0	**0**	1	**1**	1	**0**	0	**1**	0	**0**

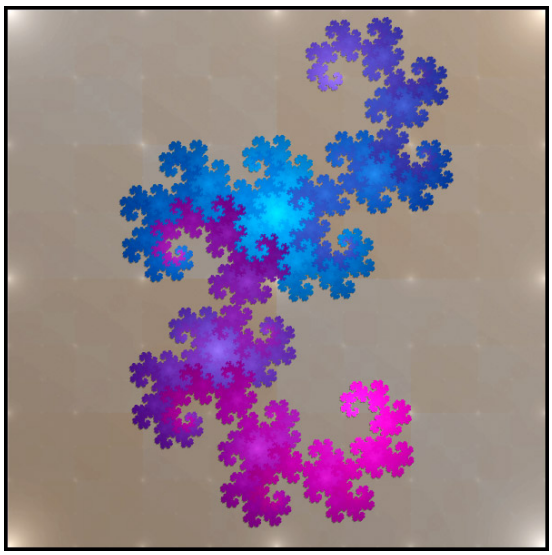
Wenn wir 1 als Berg- und 0 als Talfalte lesen, so entspricht diese Folge gerade dem Faltmuster, welches entsteht, wenn man einen langen Papierstreifen durch fortgesetztes Halbieren in der selben Richtung immer wieder faltet (siehe auch die nächste Abbildung). So hat ja auch Britney Gallivan ihren Streifen gefaltet! Und in der Tat sind auch viele Beipackzettel zuerst einmal quer, und anschliessend fortgesetzt nach dieser Art längs gefaltet.

Wenn wir die Folge näher betrachten, bemerken wir, dass in jedem Schritt die vorangegangene Folge ein Startstück der neuen Folge ist. Somit definiert die Konstruktion eine eindeutige unendliche 0-1-Folge.

Eine interessante Struktur entsteht, wenn wir den nach dem beschriebenen Muster gefalteten Papierstreifen wieder auffalten, allerdings nur so weit, dass jede Falte in einem 90° Winkel verbleibt. Rechterhand sind die ersten drei Schritte dieser Konstruktion dargestellt.







Auf diese Weise erhält man im Limes das links abgebildete Fraktal, die sogenannte Drachenkurve.

5.6. Metamorphosen

Auf **Albrecht Dürer** geht die Frage zurück, ob jedes konvexe Polyeder entlang seiner Kanten so aufgeschnitten werden kann, dass das entstandene Netz überlappungsfrei in die Ebene gelegt werden kann. Diese scheinbar elementare Frage ist bis heute ungelöst. 1997 wurde immerhin bewiesen, dass die Antwort positiv ausfällt, wenn man erlaubt, nicht nur entlang der Kanten zu schneiden (siehe [1]).

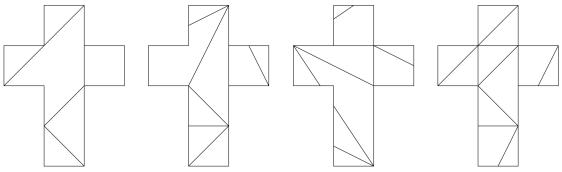
Man kann Dürers Frage auch umkehren:

Welche Polygone können entlang ihrer Kanten so geklebt werden, dass ein konvexes Polyeder entsteht?

Hier muss allerdings noch spezifiziert werden, wie geklebt werden darf. Es gibt die Varianten:

- Edge-to-edge gluing: Hier darf nur eine Kante des Polygons auf eine andere gleich lange Kante geklebt werden. Dieses Problem wurde abschliessend gelöst: Anna Lubiw und Joseph O'Rourke gaben 1996 in [19] einen Algorithmus an, der für jedes Polygon als Antwort die Anzahl und Art der Klebungen berechnet, die ein Polyeder liefern.
- Non edge-to-edge gluing: Hier erlaubt man, dass der Rand beliebig verklebt werden darf. In diesem Fall kann jedes Polygon in ein Kontinuum von Polyedern geklebt werden. Allerdings sind nur endlich viele davon kombinatorisch verschieden (siehe [7]).

Das klassische Würfelnetz kann beispielsweise neben dem Würfel in genau vier weitere Polyeder gefaltet werden, eines davon ist degeneriert und liegt in einer Ebene (siehe die nebenstehende Abbildung). Faltet man das Würfelnetz gemäss den eingezeichneten Faltmustern, so entstehen (von links nach rechts) ein doppelt überlagertes Viereck, ein fünfeckiges Polyeder, ein Tetraeder und ein Oktaeder.



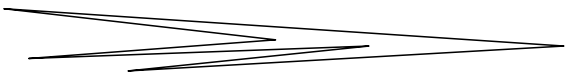
6. Faltmuster

6.1. Lokale Faltbarkeit

Wenn man ein ebenes Origami-Modell auffaltet und aufmerksam betrachtet, stellt man fest, dass sich Falten nicht in beliebiger Weise in einem Punkt (Knoten) treffen können. Tatsächlich gilt der folgende erstaunliche Satz:

Satz 2 (Maekawa-Justin) *Seien M die Anzahl Bergfalten und V die Anzahl Talfalten, die in einem Knoten eines flach faltbaren Faltmusters zusammenlaufen. Dann gilt $|M-V|=2$.*

Beweis (nach Siwanowicz): Betrachten wir also einen Punkt, in dem sich $n=M+V$ Falten treffen. Wir falten das Papier in einer Umgebung dieses Knotens flach, schneiden die Ecke ab und betrachten den entstandenen Querschnitt:



Wir sehen ein degeneriertes n-Eck. Dabei entspricht eine Talfalte einem Innenwinkel von 0 und eine Bergfalte einem Innenwinkel von 2π. Die Innenwinkelformel liefert also $0\cdot V+2\pi\cdot M=(n-2)\pi=(M+V-2)\pi$. Somit folgt $M-V=-2$. Dreht man das Papier um, so erhält man das andere Vorzeichen. □

Als Nebenprodukt erhalten wir noch:

Folgerung 3 *Der Grad jedes Knotens ist gerade.*

Beweis: $n = M + V = M - V + 2V = \pm 2 + 2V$. □

Auch die Winkel zwischen den Falten eines Knotens sind nicht beliebig:

Satz 4 (Kawasaki-Justin) *In einem Knoten seien die Winkel zwischen den Kanten reihum mit* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}$ *bezeichnet. Es gilt: Der Knoten ist flach faltbar genau dann wenn*

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \ldots + \alpha_{2n-1} - \alpha_{2n} = 0.$$

Dieser Satz gilt auch dann, wenn das Papier nicht eben, sondern wenn der Knoten im ungefalteten Urzustand in der Ecke eines Kegels lag.

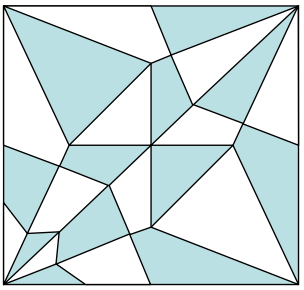
Beweis: Sei der Knoten flach gefaltet. Umrundet man (auf dem gefalteten Papier) den Knoten auf einem Kreis, so kehrt sich der Umlaufsinn bei jeder Kante um. In der alternierenden Summe ergibt der dabei zurückgelegte Winkel 0, da man den Knoten im gefalteten Zustand nullmal umrundet hat und am Ausgangspunkt wieder ankommt.

Die Umkehrung überlassen wir dem Leser. □

6.2. Globale Faltbarkeit

Die Frage, wann ein Faltmuster global flach faltbar ist, gestaltet sich weitaus heikler, als die lokalen Betrachtungen. Ein einfacher Satz ist immerhin die folgende Tatsache:

Satz 5 (Meguro) *Jedes Faltmuster ist zweifärbbar.*

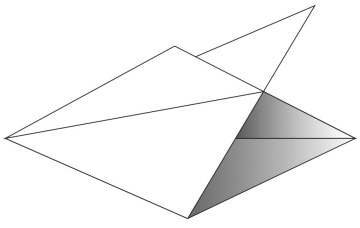


Als Illustration zeigt die nebenstehende Figur das Faltmuster des klassischen Origami-Kranichs.

Beweis des Satzes von Meguro: Man stattet das Papier mit einer Orientierung aus. In gefaltetem Zustand färbt man, je nach Orientierung, jeden Punkt blau oder weiss. Über jede Faltkante hinweg ändert sich dann die Farbe. □

Will man ein gegebenes Faltmuster tatsächlich falten, ist zu beachten, dass sich das Papier nicht selbst durchdringen kann. Ein Satz, der diese Bedingung formuliert, stammt von Toshikazu Kawasaki:

Satz 6 (Kawasaki) *Es seien* α_i *die fortlaufenden Winkel zwischen den Kanten, die in einem Knoten zusammenlaufen. Gilt dann* $\alpha_i < \alpha_{i-1}$ *und* $\alpha_i < \alpha_{i+1}$*, so sind die beiden* α_i *bildenden Kanten nicht beides Bergfalten und nicht beides Talfalten.*



Als Beweis des Flügeltürensatzes von Kawasaki soll die nebenstehende Abbildung genügen.

Darüber, wie schwierig es ist ein gegebenes Faltmuster tatsächlich zu falten, gibt der folgende Satz Auskunft:

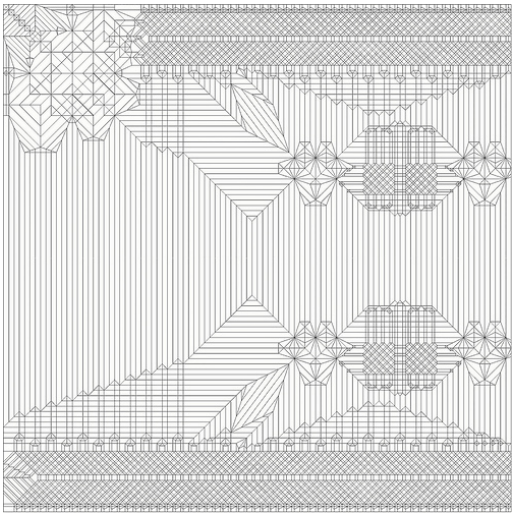
Satz 7 (Bern und Hayes, 1994)

- *Bei gegebenem Faltenmuster ist das Problem zu entscheiden, ob es flach faltbar ist, NP-vollständig.*
- *Sogar wenn die Zuordnung der Berg- und Talfalten vorgegeben ist, ist das Problem eine gültige Faltung in die Ebene zu finden, NP-vollständig.*

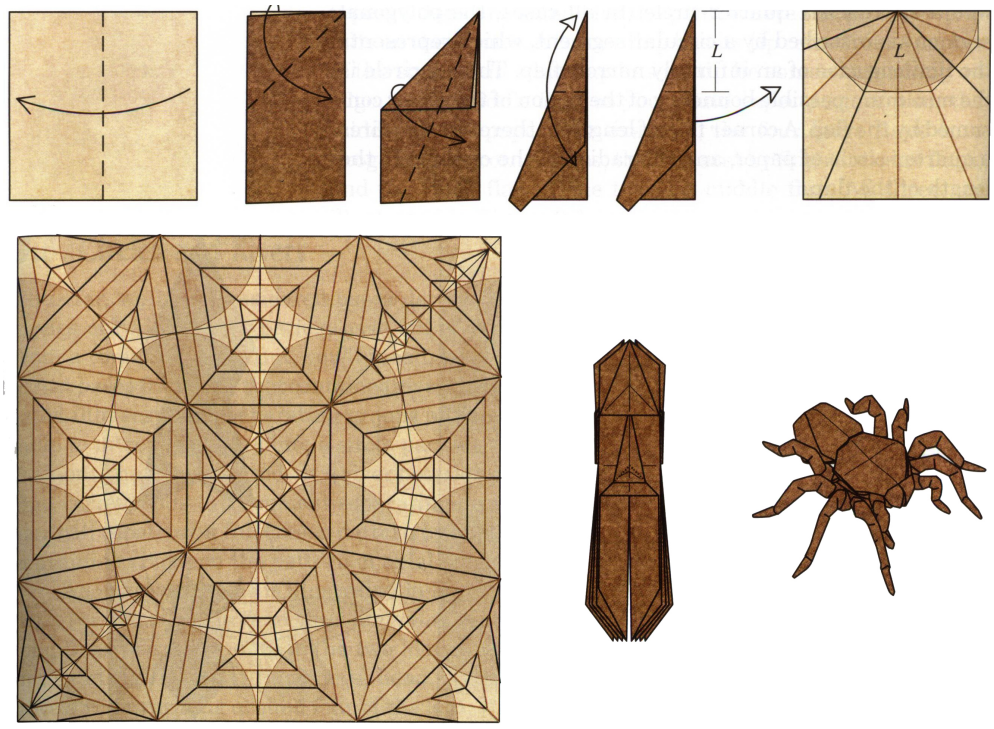
Insbesondere wirft dieser Satz ein bezeichnendes Licht auf das Problem mit dem Medikamentenbeipackzettel!

7. Origami Design

Wie faltet man aus einem quadratischen Stück Papier ohne Schere und Leim ein Kunstwerk wie in der untenstehenden Abbildung? Und wie findet man das ebenfalls abgebildete Faltmuster (rechts) dazu?



Erstaunlicherweise hilft hier die Mathematik ein Stück weiter. Überlegen wir uns, welcher Bereich des Papiers später einmal ein Horn des Drachens, einen Zeh, oder eine andere Extremität werden soll. Offenbar ist daran eine nahezu kreisförmig Umgebung eines Punktes beteiligt (siehe die Abbildung unten). Je nachdem ist es nur ein Halbkreis oder ein Viertelkreis, wenn der Punkt am Rand oder in einer Ecke liegt. Für jede Extremität der künftigen Origami-Figur ist also eine Kreisscheibe auf dem Papier zu reservieren. Für die optimale Verteilung von Kreisscheiben (sogenannte Kreispackung) auf einem Quadrat sind jedoch Algorithmen bekannt. Die Kreiszentren werden dann mit Falten verbunden und weitere Falten so gelegt, dass die im letzten Abschnitt erwähnten Bedingungen zur lokalen und globalen Faltbarkeit erfüllt sind. Robert Lang hat dazu Programme (*TreeMaker* und *ReferenceFinder*) entwickelt, die einem zu einer gewünschten Grundfigur ein entsprechendes Faltmuster vorschlagen. Die Abbildung unten zeigt das Faltmuster für die Grundfigur von Robert Langs Tarantel aus [18].



8. Sind Falten immer gerade?

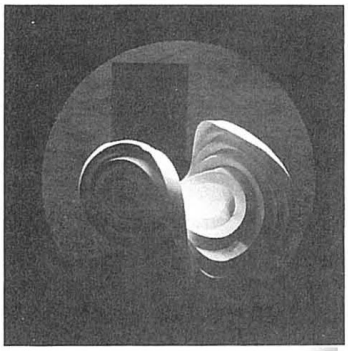
1939 wurde im *American Mathematical Monthly* die Frage gestellt, ob Falten immer gerade sind. Die Antwort kam postwendend ein Jahr später in der selben Zeitschrift: Ja, Falten sind immer gerade. 1999 lautete die Antwort, wieder im American Mathematical Monthly: Nein, Falten sind nicht immer gerade.

Dieser scheinbare Widerspruch rührt von der unpräzisen Fragestellung her. Wer schon einmal die Pommesschachtel bei McDonald's genauer betrachtet hat, weiss, dass gekrümmte Falten sogar sehr nützlich sein können:

Die Frage wurde jedenfalls abschliessend geklärt im folgenden Satz (siehe [10]):

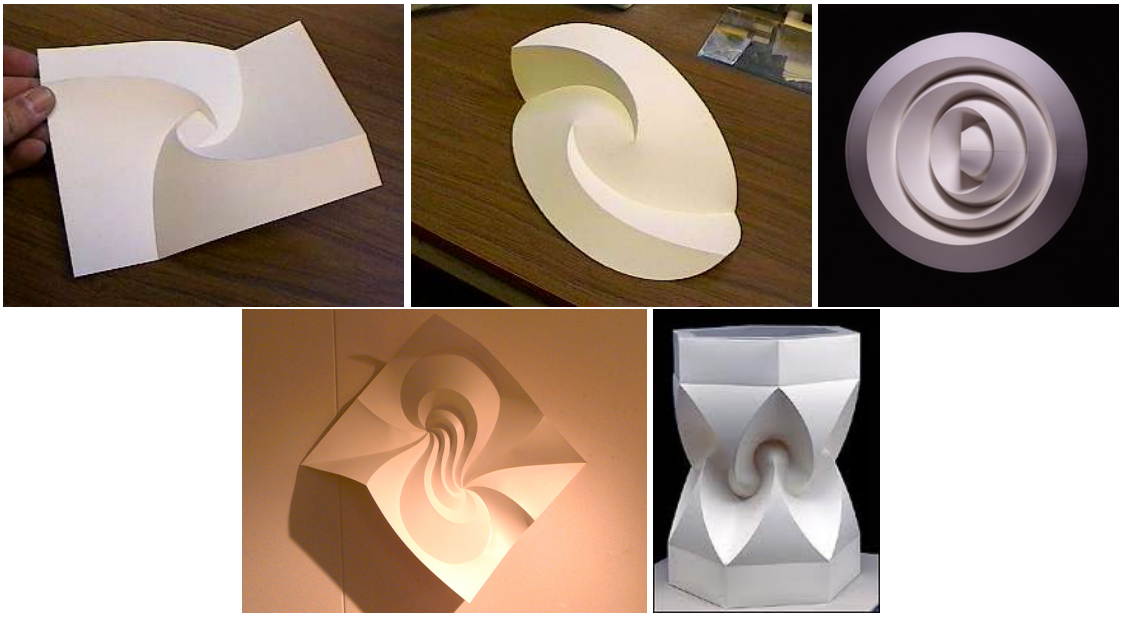
Satz 8 (Fuchs, Tabachnikov) *Assume that for every point x of δ the curvature of γ at the respective point $f(x)$ is greater than the curvature of δ at x. Then there exist exactly two extensions of f to a plane neighborhood of δ yielding developable surfaces, containing γ.*

Tatsächlich findet man diese Aussage bereits bei Blaschke [6] oder Bianchi [5, §109]. Und krumme Falten sind etwa im Bauhaus-Design schon viel länger etabliert: Die Abbildung rechts zeigt eine Bauhaus-Studie von Josef Albers, 1928. In [14] berechnet Robert Geretschläger konkret, wie gegebene Kurven als Falte realisiert werden können.



a
Student in Albers's preliminary course: paper study, 1927–28. The shape results automatically; it is the result of back-and-forth folds in concentric circles. One special feature of this form is its mobility. The development of the curve form is of special pedagogic value, because it provides the student with unexpected revelations concerning the material and the construction principles.

Mit krummen Falten hat sich auch **David Huffman** (er wurde durch die nach ihm benannte Huffman-Kodierung zur Kompression von Daten bekannt) in den 1970er Jahren befasst. Wir schliessen diesen Bericht mit einigen Bildern seiner Werke:



Literatur

[1] Pankaj K. Agarwal, Boris Aronov, Joseph O'Rourke, and Catherine A. Schevon. Star unfolding of a polytope with applications. *SIAM J. Comput.*, 26(6):1689–1713, 1997.

[2] Roger C. Alperin. Mathematical origami: another view of Alhazen's optical problem. In *Origami*^{3} *(Asilomar, CA, 2001)*, pages 83–93. A K Peters, Natick, MA, 2002.

[3] Roger C. Alperin and Robert J. Lang. One-, two-, and multi-fold origami axioms. In *Origami*^{4}, pages 371–393. A K Peters, Natick, MA, 2009.

[4] Vladimir I. Arnold. *Arnold's problems*. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Translated and revised edition of the 2000 Russian original, With a preface by V. Philippov, A. Yakivchik and M. Peters.

[5] Luigi Bianchi. *Vorlesungen über Differentialgeometrie*. B.G. Teubner, 1899.

[6] Wilhelm Blaschke. *Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie. Band I. Elementare Differentialgeometrie*. Dover Publications, New York, N. Y., 1945. 3d ed.

[7] Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, Anna Lubiw, and Joseph O'Rourke. Enumerating foldings and unfoldings between polygons and polytopes. *Graphs Combin.*, 18(1):93–104, 2002.

[8] Erik D. Demaine and Joseph O'Rourke. *Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra*. Cambridge University Press, July 2007.

[9] B. Carter Edwards and Jerry Shurman. Folding Quartic Roots. *Math. Mag.*, 74(1):19–25, 2001.

[10] Dmitry Fuchs and Serge Tabachnikov. More on paperfolding. *Amer. Math. Monthly*, 106(1):27–35, 1999.

[11] Robert Geretschläger. Euclidean constructions and the geometry of origami. *Math. Mag.*, 68(5):357–371, 1995.

[12] Robert Geretschläger. Solving quartic equations in Origami. unpublished manuscript, 1998.

[13] Robert Geretschläger. *Geometric Origami*. Arbelos, 2008.

[14] Robert Geretschläger. Folding curves. In *Origami*^{4}, pages 151–163. A K Peters, Natick, MA, 2009.

[15] Koshiro Hatori. Formulation of origami construction. `http://origami.ousaan.com/library/conste.html`. Besucht: 25. Juni 2013.

[16] Norbert Hungerbühler. Geometrical aspects of the circular billiard problem. *Elem. Math.*, 47(3):114–117, 1992.

[17] Jacques Justin. Résolution par le pliage de l'équation du troisième degré et applications géométriques. In *In Proceedings of the 1st International Meeting of OrigamiScience and Technology, Ferarra*, pages 251–261, 1989.

[18] Robert J. Lang. *Origami design secrets*. A K Peters Ltd., Natick, MA, 2003. Mathematical methods for an ancient art.

[19] A. Lubiw and J. O'Rourke. When can a polygon fold to a polytope? *Technical Report 048, Dept. Comput. Sci., Smith College*, 1996. Presented at AMS Conf., 1996.

[20] W. F. Lunnon. A map-folding problem. *Math. Comp.*, 22:193–199, 1968.

[21] George E. Martin. *Geometric constructions*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1998.

[22] Benedetto Scimemi. Paper-folding and Euler's theorem revisited. *Forum Geom.*, 2:93–104 (electronic), 2002.

[23] Neil J. A. Sloane. On-line encyclopedia of integer sequences. `http://oeis.org`. Besucht: 25. Juni 2013.

[24] T. Sundara Row. *Geometric exercises in paper folding; edited and revised by W. W. Beman and D. E. Smith.*. Chicago: The Open Court Publishing Co. XIV + 148 S. 12mo , 1901.

[25] A. S. Tarasov. Solution of Arnol′d's "folded ruble" problem. *Chebyshevskiĭ Sb.*, 5(1(9)):174–187, 2004.