B 7687 F

Didaktik der Mathematik

21. Jahrgang Heft 4 4. Quartal 1993

BAYERISCHER SCHULBUCH-VERLAG

Didaktik der Mathematik

1993/4 Seite 241–320

Anschriften der Beiratsmitglieder:
Prof. Dr. Martin Barner, Math. Inst. d. Univ., Hebelstr. 29, 79104 Freiburg
StD Friedrich Barth, Abbachstr. 23, 80992 München
Prof. Dr. Arthur Engel, Inst. f. Didaktik d. Mathematik, Senckenberganlage 9–11, 60325 Frankfurt
Dr. Uwe Feiste, Ernst-Moritz-Arndt-Univ., Friedrich-Ludwig-Jahn-Str. 15 a, 17489 Greifswald
Prof. Dr. Jürgen Flachsmeyer, Ernst-Moritz-Arndt-Univ., Friedrich-Ludwig-Jahn-Str. 15 a, 17489 Greifswald
Prof. Dr. Friedrich Flohr, Math. Inst. d. Univ., Hebelstr. 29, 79104 Freiburg
Prof. Dr. Rudolf Fritsch, Friedemann-Bach-Str. 61, 82166 Gräfelfing
Prof. Dr. Robert Ineichen, Instit. d. Mathématiques de l'Université, Pérolles, CH-1700 Fribourg
OStD Johannes Kratz, Ulmenstr. 16, 82131 Gauting
Prof. Dr. Günter Pickert, Math. Inst. d. Justus-Liebig-Universität, Arndtstr. 2, 35392 Gießen
Prof. Mag. Dr. Hans-Christian Reichel, Inst. f. Mathematik, Strudlhofgasse 4, A-1090 Wien
Prof. Dr. Karl Seebach, Walhallastr. 5, 80639 München
Prof. Dr. Hans-Georg Steiner, Marsstr. 16, 33739 Bielefeld
StD Horst Woschner, Theresienstr. 60, 80333 München
Prof. Dr. Herbert Zeitler, Lehrst. f. Didaktik d. Mathematik, Universitätsstr. 30, 95447 Bayreuth

Anschrift der Redaktion:
StD Franz Hager, Blütenstr. 9, 82178 Puchheim, Telefon (089) 803043

Bezugsbedingungen
Jahresabonnement 4 Hefte DM 58,–, Einzelheft DM 16,– zuzüglich Versandkosten
Postscheckkonto München 93370-805
Bankkonto: Bayer. Vereinsbank München 81154
»Didaktik der Mathematik« erscheint einmal vierteljährlich. Für unverlangt eingesandte Manuskripte wird keine Gewähr übernommen. Nachdrucke innerhalb der gesetzlichen Frist nur mit ausdrücklicher Genehmigung des Verlages.

Verlag und Anzeigenverwaltung
Bayerischer Schulbuch-Verlag, Postfach 190253, 80602 München, Hubertusstraße 4, 80639 München, Telefon (089) 179120
Zur Zeit ist Anzeigenpreisliste Nr. 3 vom 1. 1. 1983 gültig.
Satz: Tutte Druckerei GmbH, Salzweg
Druck: E. Rieder Nachf., Schrobenhausen

Hinweise für Autoren siehe dritte Umschlagseite

Gedruckt auf chlorfrei gebleichtem Papier

Didaktik der Mathematik wird laufend im PÄDAGOGISCHEN JAHRESBERICHT (Verlag für pädagogische Dokumentation, Duisburg) bibliografisch nachgewiesen und regelmäßig für ZDM bzw. die Datenbank MATHDI ausgewertet.

ISSN 0343-5334

Norbert Hungerbühler

Die zehn Apollonischen Probleme

Neben den klassischen Dreieckskonstruktionen bilden in der Schulgeometrie seit jeher die Kreisberührungsprobleme ein Reservoir an Aufgaben um geometrische Begriffe zu üben. Dabei wird meist auf eine eigene Systematik für dieses Gebiet verzichtet, nicht zuletzt deshalb, da einige der Berührungsaufgaben wohl sehr elegante Lösungen zulassen, deren theoretischer Hintergrund in der Schule jedoch meist fehlt: zum Beispiel die berühmte Konstruktion von Gergonne, die das Problem löst, einen Kreis zu konstruieren, der drei gegebene Kreise berührt. Verschiedene Zweige der Geometrie suchten sich diese Aufgabe als „Prüfstein“ ihrer Leistungsfähigkeit aus: Eine Lösung die sich der projektiven Geometrie bedient, findet man z. B. in [2], eine Lösung mit Hilfe der Kreisinversion in [3]. Dieser aufwendige theoretische Hintergrund muß nicht sein: Wir wollen hier die klassischen zehn Apollonischen Probleme auf elementare Weise lösen. Dabei setzen wir nicht mehr als die Kenntnis des Ähnlichkeitsbegriffs, der Sekantensätze und des Sehnenvierecks voraus. Insbesondere wird die Kreisinversion nicht benötigt.

1. Einleitung

Neben den klassischen Dreieckskonstruktionen bilden in der Schulgeometrie seit jeher die Kreisberührungsprobleme ein Reservoir an Aufgaben um geometrische Begriffe zu üben. Dabei wird meist auf eine eigene Systematik für dieses Gebiet verzichtet, nicht zuletzt deshalb, da einige der Berührungsaufgaben wohl sehr elegante Lösungen zulassen, deren theoretischer Hintergrund in der Schule jedoch meist fehlt: zum Beispiel die berühmte Konstruktion von Gergonne, die das Problem löst, einen Kreis zu konstruieren, der drei gegebene Kreise berührt (siehe etwa [1]). Verschiedene Zweige der Geometrie suchten sich diese Aufgabe als „Prüfstein“ ihrer Leistungsfähigkeit aus: Eine Lösung die sich der projektiven Geometrie bedient, findet man z. B. in [2], eine Lösung mit Hilfe der Kreisinversion in [3]. Dieser aufwendige theoretische Hintergrund muß nicht sein: Wir wollen hier die klassischen zehn Apollonischen Probleme auf elementare Weise lösen. Dabei setzen wir nicht mehr als die Kenntnis des Ähnlichkeitsbegriffs, der Sekantensätze und des Sehnenvierecks voraus.

2. Die zehn Apollonischen Probleme (Apollonius von Perge ca. 262–190 v. Chr.)

Ein Kreis wird im generischen Fall festgelegt durch drei Bestimmungsstücke. Diese Bestimmungsstücke können sein

- eine Tangente T,
- ein Punkt P auf der Peripherie,
- ein berührender Kreis K.

Daher sind mit diesen Bestimmungsstücken zehn verschiedene Aufgaben möglich: Suche einen Kreis, der gegeben ist durch

1.	PPP	6.	PKK
2.	PPT	7.	TTT
3.	PPK	8.	TTK
4.	PTT	9.	TKK
5.	PTK	10.	KKK

3. Lösungen der zehn Apollonischen Probleme

Im folgenden wollen wir die trivialen Fälle, nämlich daß ein Punkt mit einem weiteren Bestimmungsstück inzident ist, aus der Diskussion ausschließen. In den Figuren sind die gegebenen Bestimmungsstücke dick, alle Hilfslinien dünn gezeichnet.

3.1. PPP

Dieses Problem entspricht natürlich der Konstruktion des Umkreises eines Dreiecks $P_1P_2P_3$. Der Mittelpunkt M des gesuchten Kreises ist der Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten der Strecken $[P_1P_2]$, $[P_2P_3]$ und $[P_3P_1]$. Es existiert genau eine Lösung. Falls $P_1P_2P_3$ kollinear sind, ist der gesuchte Kreis zu einer Geraden entartet.

3.2. PPT

Hier wollen wir zwei Lösungsmöglichkeiten angeben. Vom trivialen Fall $P_1P_2 \parallel T$ sehen wir ab.

3.2.1. Lösung mit Sekanten-Tangentensatz

Nach dem Sekanten-Tangentensatz muß für den gesuchten Kreis K gelten

$$\overline{AP_1} \cdot \overline{AP_2} = (\overline{AB})^2$$

Damit ist die Strecke [AB] konstruierbar. K geht dann durch die Punkte P_1P_2B, womit die Aufgabe auf den Fall PPP zurückgeführt ist.

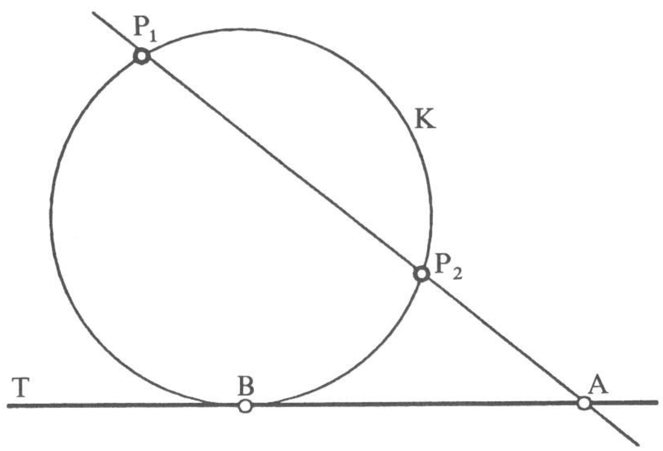

Fig. 1

Die Konstruktion des Punktes B erfolgt zum Beispiel so: Ist K_1 ein beliebiger Hilfskreis durch P_1 und P_2, so gilt, wiederum nach dem Sekanten-Tangentensatz $\overline{AP_1} \cdot \overline{AP_2} = (\overline{AB_1})^2$. Somit ist $\overline{AB_1} = \overline{AB'} = \overline{AB''}$. Es existieren daher zwei Lösungen, falls P_1 und P_2 auf derselben Seite von T liegen. Andernfalls gibt es keine Lösung.

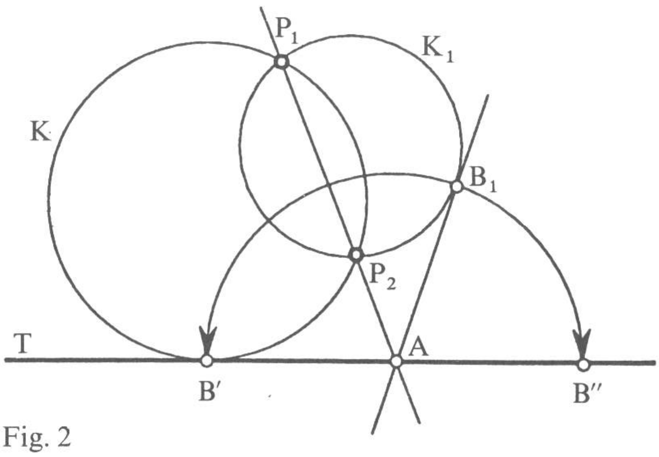

Fig. 2

3.2.2. Lösung mit einer Symmetriebetrachtung

Spiegelt man T an der Mittelsenkrechten der Strecke $[P_1P_2]$ so ist auch das Spiegelbild T_1 eine Tangente an den gesuchten Kreis. Damit ist die Aufgabe zurückgeführt auf den Fall PTT.

3.3. PPK

Sei K_1 ein beliebiger Hilfskreis durch P_1 und P_2, der den gegebenen Kreis K schneidet. Der Sekanten-Tangentensatz angewendet auf K und K_1 liefert nacheinander

$$\overline{AP_1} \cdot \overline{AP_2} = \overline{AQ_1} \cdot \overline{AQ_2} = (\overline{AB})^2$$

Somit ist B der Berührungspunkt von K mit dem gesuchten Kreis K', und die Aufgabe ist auf den Fall PPP zurückgeführt.

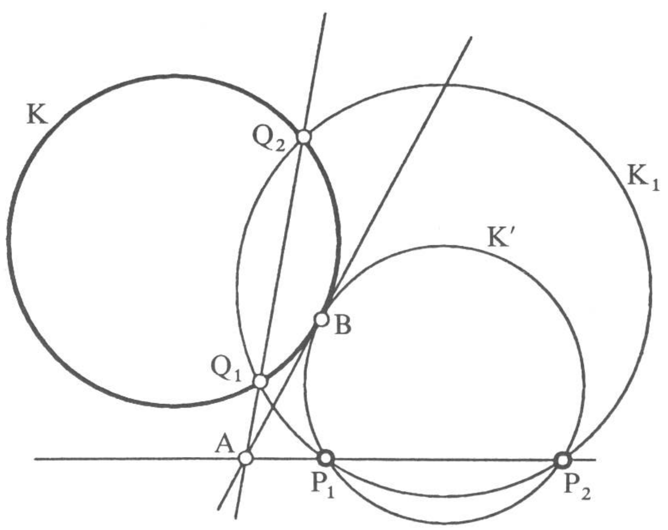

Fig. 3

Es existieren zwei Lösungen (die zweite erhält man, wenn man von A aus noch die zweite mögliche Tangente an K legt), falls P_1 und P_2 beide außerhalb oder beide innerhalb von K liegen. Andernfalls gibt es keine Lösungen.

3.4. PTT

Sei K_1 ein beliebiger Hilfskreis, der die beiden Tangenten T_1 und T_2 berührt. Aufgrund der Ähnlichkeit bezüglich S ist $Q_1M_1 \| PM$. Es existieren zwei Lösungen. Die zweite Lösung erhält man, wenn man die Konstruktion mit Q_2 an der Stelle von Q_1 durchführt.

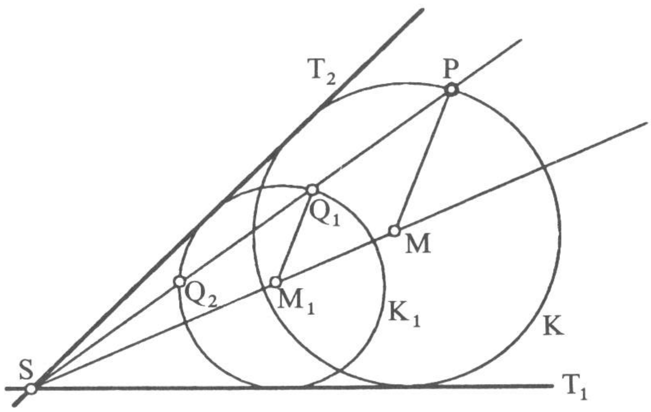

Fig. 4

3.5. PTK

Wir wollen annehmen, daß $T \cap K = \emptyset$, daß P und K auf derselben Seite von T liegen und daß P außerhalb von K liegt. Der Fall $T \cap K \neq \emptyset$ erlaubt eine analoge Diskussion wie der hier behandelte.

ABCD ist ein Sehnenviereck, da sich gegenüberliegende Winkel auf einen gestreckten Winkel ergänzen. Somit folgt aus dem Sekanten-Tangentensatz, angewandt auf den Umkreis von ABCD und den gesuchten Kreis K′ nacheinander

$$\overline{ED} \cdot \overline{EA} = \overline{EC} \cdot \overline{EB}$$
$$\overline{EC} \cdot \overline{EB} = \overline{EP} \cdot \overline{EP'}$$

Also gilt $\overline{ED} \cdot \overline{EA} = \overline{EP} \cdot \overline{EP'}$. Somit ist P′ konstruierbar und K′ geht durch P, P′ und tangiert T, womit die Aufgabe auf den Fall PPT zurückgeführt ist.

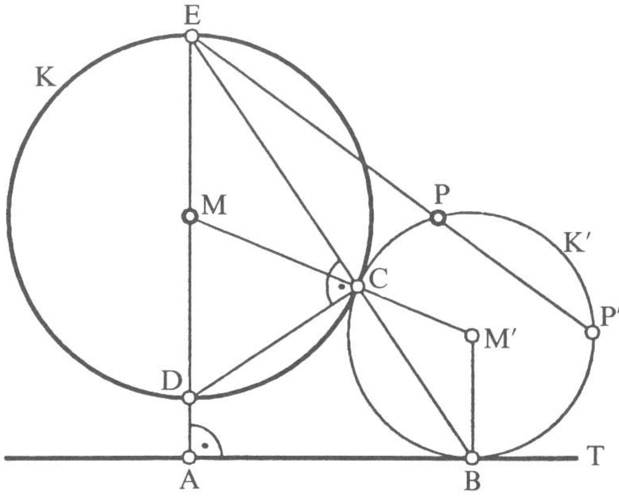

Fig. 5

Die Konstruktion erfolgt nun so: Sei K_1 ein Hilfskreis durch die Punkte A, D und P (Fall PPP). Dann erscheint P′ als Schnittpunkt der Gerade EP mit K_1. Ist $\{F\} = EP \cap T$, so findet man die Punkte B′ und B″ gemäß der Aufgabe PPT (siehe Figur 6). Der gesuchte Kreis K′ ist dann der Umkreis von PP′B′ respektive von PP′B″.

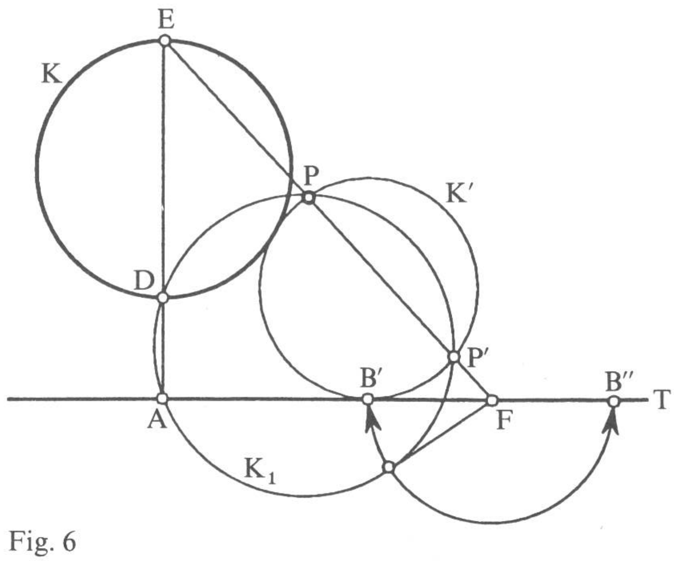

Fig. 6

Bemerkung: Falls P = P′, so ist die Gerade EP eine Tangente an den gesuchten Kreis mit Berührungspunkt P: dieser Fall ist einfach zu diskutieren.

Insgesamt hat die Aufgabe vier Lösungen. Neben den zwei oben konstruierten gibt es nämlich noch zwei Lösungen, welche K von innen berühren: Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke CEF und AEB folgt $\overline{EC} \cdot \overline{EB} = \overline{EA} \cdot \overline{EF}$ und aus dem Sehnensatz für den gesuchten Kreis K′ erhält man danach $\overline{EA} \cdot \overline{EF} = \overline{EP} \cdot \overline{EP'}$, womit P′ wiederum konstruierbar ist.

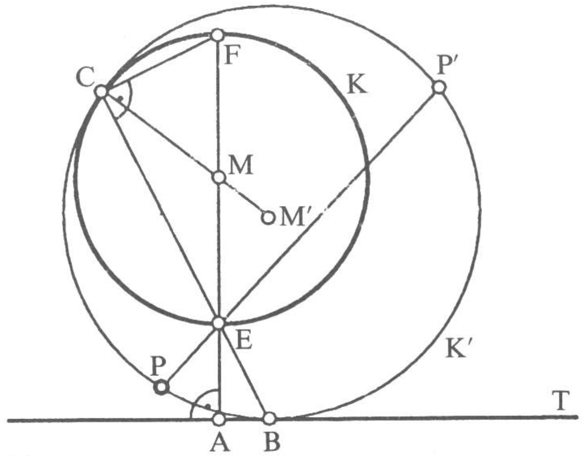

Fig. 7

3.6. PKK

Im Dreieck M_1M_2M ist die Außenwinkelsumme $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 2\pi$, d.h. $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Daraus folgt sofort, daß sich im Viereck ABCD gegenüberliegende Winkel zu einem gestreckten Winkel ergänzen. Daher ist ABCD ein Sehnenviereck. Der Sekantensatz angewandt auf dessen Umkreis und den gesuchten Kreis K' liefert

$$\overline{SA} \cdot \overline{SB} = \overline{SD} \cdot \overline{SC} = \overline{SP} \cdot \overline{SP'}.$$

Da C Ähnlichkeitszentrum von K' und K_2 ist, gilt $MD \parallel M_2Q$. Aus $M_1D \parallel M_2Q$ folgt andererseits, daß S Ähnlichkeitszentrum von K_1 und K_2 ist. Somit ist zunächst S und dann P konstruierbar, und die Aufgabe ist auf den Fall PPK zurückgeführt.

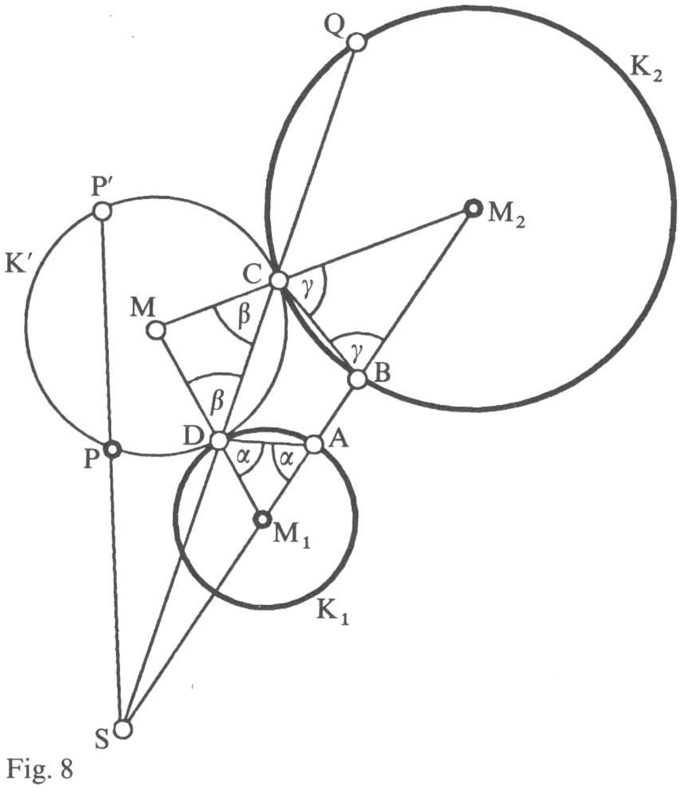

Fig. 8

Die Lösung konstruiert man nun wie folgt: Sei K ein Hilfskreis durch die Punkte ABP. Dann erhält man P′ als Schnittpunkt der Geraden SP mit K. Ist weiter $\{H\} = SP \cap BF$ und G der Berührungspunkt der Tangente von H an K_2, so findet man den gesuchten Kreis K′ als Umkreis der Punkte PP′G. Es gibt im allgemeinen vier Lösungen: die genaue Diskussion erfolgt ähnlich wie im Falle PTK.

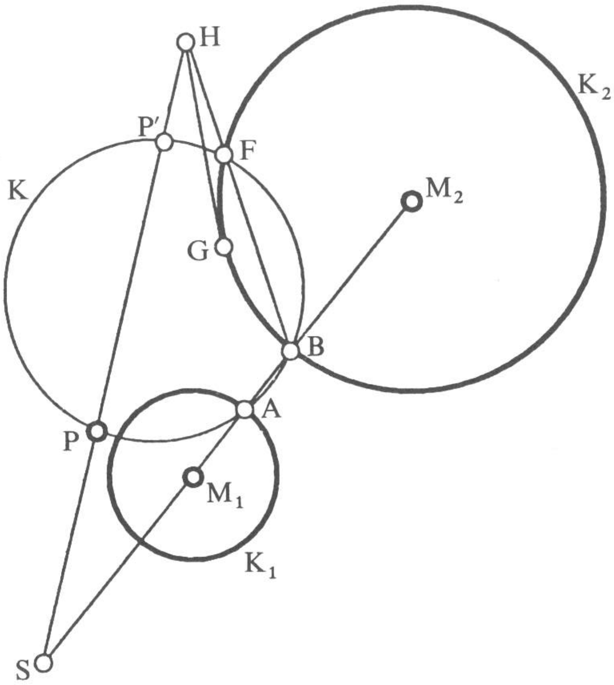

Fig. 9

3.7. TTT

Diese Konstruktion entspricht der Konstruktion der In- und Ankreise eines Dreiecks. Die gesuchten Zentren sind die Schnittpunkte der inneren und äußeren Winkelhalbierenden der gegebenen Tangenten. Im allgemeinen besitzt die Aufgabe vier Lösungen.

3.8. TTK

Sei K″ ein zum gesuchten Kreis K′ konzentrischer Kreis mit einem um R vergrößerten Radius (R der Radius des gegebenen Kreises K). Ist K′ ein Kreis der T_1, T_2 und K berührt, so ist K″ ein Kreis, der T_1', T_2' berührt und durch M geht. Dabei sind T_1' und T_2' die Parallelen zu T_1 und T_2 im Abstand R. Damit ist diese Aufgabe auf den Fall PTT zurückgeführt. Im allgemeinen gibt es vier Lösungen.

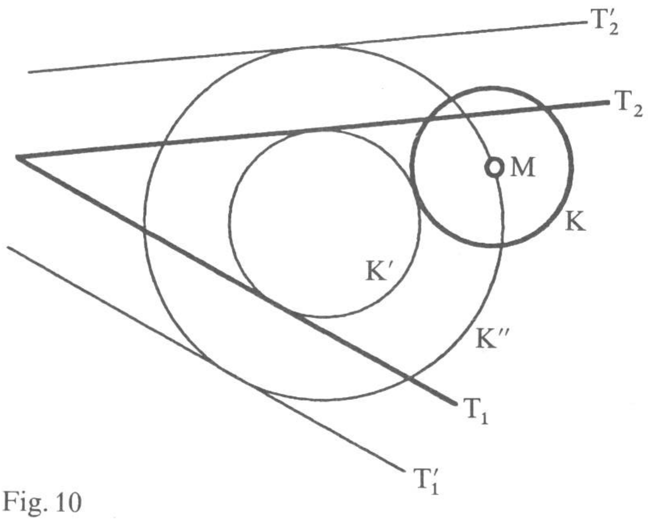

Fig. 10

3.9. TKK

Sei K'' ein zum gesuchten Kreis K' konzentrischer Kreis mit einem um R_1 vergrößerten Radius (R_1 der Radius des kleineren der gegebenen Kreise K_i). Ist K' ein Kreis der K_1, K_2 und T von außen berührt, so ist K'' ein Kreis, der K'_2 und T' berührt und durch M_1 geht. Dabei ist T' die Parallele zu T im Abstand R_1 und K'_2 der zu K_2 konzentrische Kreis mit um R_1 vermindertem Radius. Damit ist diese Aufgabe auf den Fall PTK zurückgeführt. Im allgemeinen gibt es acht Lösungen, die man mit analogen Überlegungen findet.

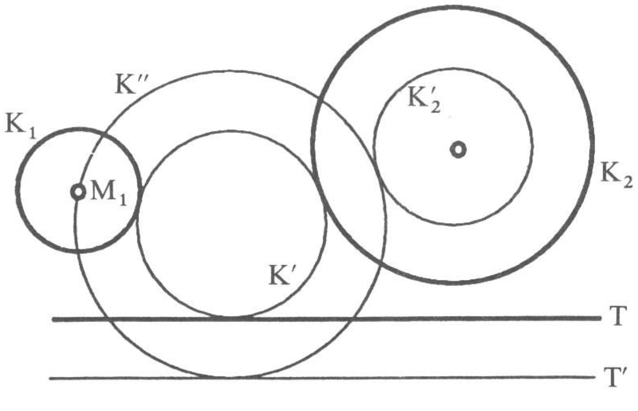

Fig. 11

3.10. KKK

Sei K'' ein zum gesuchten Kreis K' konzentrischer Kreis mit einem um R_1 vergrößerten Radius (R_1 der Radius des kleinsten der gegebenen Kreise K_i). Ist K' ein Kreis der K_1, K_2 und K_3 von außen berührt, so ist K'' ein Kreis, der K'_2 und K'_3 berührt und durch M_1 geht. Dabei sind K'_2 und K'_3 zu K_2 respektive K_3 konzentrische Kreise mit um R_1 verminderten Radien. Damit ist diese Aufgabe auf den Fall PKK zurückgeführt.

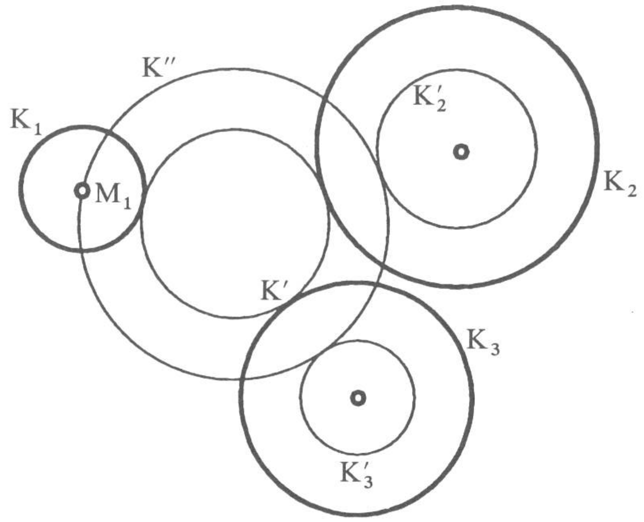

Fig. 12

Diese Aufgabe besitzt im allgemeinen acht Lösungen.

Anschrift des Verfassers: Norbert Hungerbühler, Mathematik Department, ETH Zürich, CH-8092 Zürich

Eingangsdatum: 8. 3. 1993

Literatur

[1] Berger, M.: Geometry, vol. 1. Berlin (etc.): Universitext, Springer 1987
[2] Strubecker, K.: Geometrie, Wege der Forschung, Bd. CLXXVII. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1972
[3] Hajós, G.: Einführung in die Geometrie, Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1970