Die zehn Apollonischen Probleme

Norbert Hungerbühler, Zürich

1 Einleitung

Neben den klassischen Dreieckskonstruktionen bilden in der Schulgeometrie seit je her die Kreisberührungsprobleme ein Reservoir an Aufgaben um geometrische Begriffe zu üben. Dabei wird meist auf eine eigene Systematik für dieses Gebiet verzichtet, nicht zuletzt deshalb, da einige der Berührungsaufgaben wohl sehr elegante Lösungen zulassen, deren theoretischer Hintergrund in der Schule jedoch meist fehlt: zum Beispiel die berühmte Konstruktion von Gergonne, die das Problem löst, einen Kreis zu konstruieren, der drei gegebene Kreise berührt (siehe etwa [1]). Dieser aufwendige theoretische Hintergrund muss nicht sein: Wir wollen hier die klassischen zehn Apollonischen Probleme auf elementare Weise lösen. Dabei setzen wir nicht mehr als die Kenntnis des Ähnlichkeitsbegriffs, der Sekantensätze und des Sehnenvierecks voraus.

2 Die zehn Apollonischen Probleme (Apollonius von Perge ca. 262 - 190 v. Chr.)

Ein Kreis wird im generischen Fall festgelegt durch drei Bestimmungsstücke. Diese Bestimmungsstücke können sein

- eine Tangente T,
- ein Punkt P auf der Peripherie,
- ein berührender Kreis K.

Daher sind mit diesen Bestimmungsstücken zehn verschiedene Aufgaben möglich:

Suche einen Kreis, der gegeben ist durch

1.	PPP	6.	PKK
2.	PPT	7.	TTT
3.	PPK	8.	TTK
4.	PTT	9.	TKK
5.	PTK	10.	KKK

3 Lösungen der zehn Apollonischen Probleme

Im folgenden wollen wir die trivialen Fälle, nämlich dass ein Punkt mit einem weiteren Betimmungsstück inzident ist, aus der Diskussion ausschliessen. In den Figuren sind die gegebenen Bestimmungsstücke dick, alle Hilfslinien dünn gezeichnet.

3.1 PPP

Dieses Problem entspricht natürlich der Konstruktion des Umkreises eines Dreiecks $P_1P_2P_3$. Der Mittelpunkt M des gesuchten Kreises ist der Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten der Strecken P_1P_2, P_2P_3 und P_3P_1. Es existiert genau eine Lösung. Falls $P_1P_2P_3$ kollinear sind, ist der gesuchte Kreis zu einer Geraden entartet.

3.2 PPT

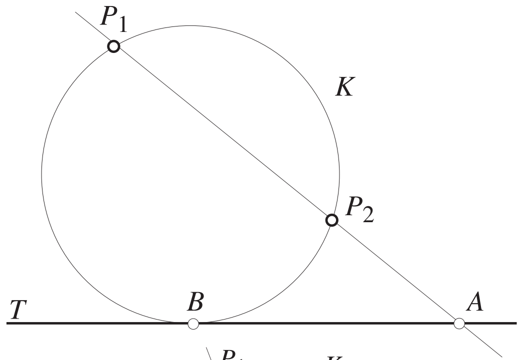
Hier wollen wir zwei Lösungsmöglichkeiten angeben. Vom trivialen Fall $P_1P_2||T$ sehen wir ab.

3.2.1 Lösung mit Sekanten-Tangentensatz

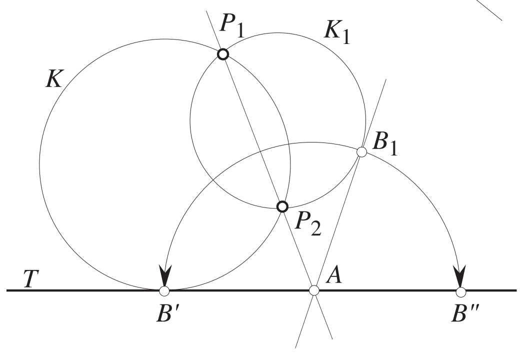
Nach dem Sekanten-Tangentensatz muss für den gesuchten Kreis K gelten

$$AP_1 \cdot AP_2 = (AB)^2$$

Damit ist die Strecke AB konstruierbar. K geht dann durch die Punkte P_1P_2B, womit die Aufgabe auf den Fall PPP zurückgeführt ist.



Die Konstruktion des Punktes B erfolgt zum Beispiel so: Ist K_1 ein beliebiger Hilfskreis durch P_1 und P_2, so gilt, wiederum nach dem Sekanten-Tangentensatz $AP_1 \cdot AP_2 = (AB_1)^2$. Somit ist $AB_1 = AB' = AB''$. Es existieren daher zwei Lösungen, falls P_1 und P_2 auf derselben Seite von T liegen. Andernfalls gibt es keine Lösung.



3.2.2 Lösung mit einer Symmetriebetrachtung

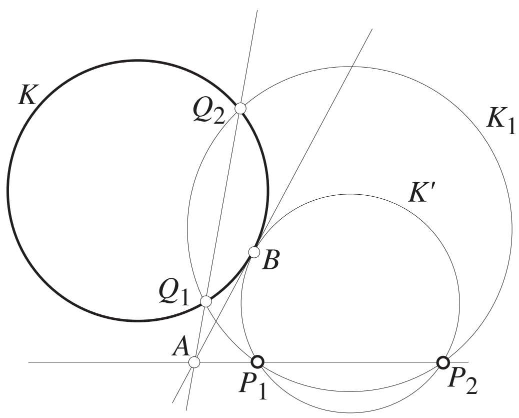
Spiegelt man T an der Mittelsenkrechten der Strecke P_1P_2 so ist auch das Spiegelbild T_1 eine Tangente an den gesuchten Kreis. Damit ist die Aufgabe zurückgeführt auf den Fall PTT.

3.3 PPK

Sei K_1 ein beliebiger Hilfskreis durch P_1 und P_2, der den gegebenen Kreis K schneidet. Der Sekanten-Tangentensatz angewendet auf K und K_1 liefert nacheinander

$$AP_1 \cdot AP_2 = AQ_1 \cdot AQ_2 = (AB)^2$$

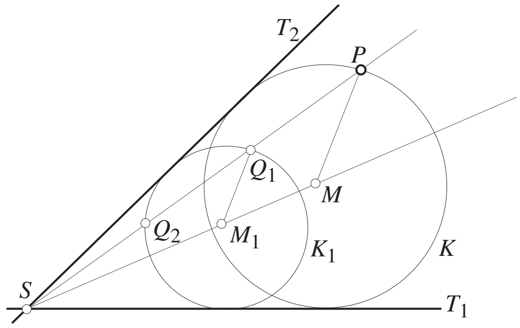
Somit ist B der Berührungspunkt von K mit dem gesuchten Kreis K', und die Aufgabe ist auf den Fall PPP zurückgeführt.



Es existieren zwei Lösungen (die zweite erhält man, wenn man von A aus noch die zweite mögliche Tangente an K legt), falls P_1 und P_2 beide ausserhalb oder beide innerhalb von K liegen. Andernfalls gibt es keine Lösungen.

3.4 *PTT*

Sei K_1 ein beliebiger Hilfskreis, der die beiden Tangenten T_1 und T_2 berührt. Aufgrund der Ähnlichkeit bezüglich S ist $Q_1M_1||PM$. Es existieren zwei Lösungen. Die zweite Lösung erhält man, wenn man die Konstruktion mit Q_2 an der Stelle von Q_1 durchführt.



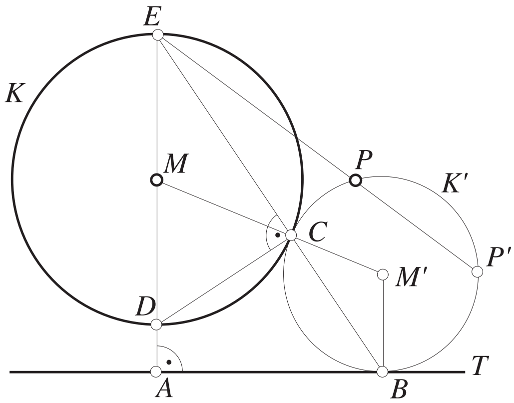
3.5 *PTK*

Wir wollen annehmen, dass $T \cap K = \emptyset$, dass P und K auf derselben Seite von T liegen und dass P ausserhalb von K liegt. Der Fall $T \cap K \neq \emptyset$ erlaubt eine analoge Diskussion wie der hier behandelte.

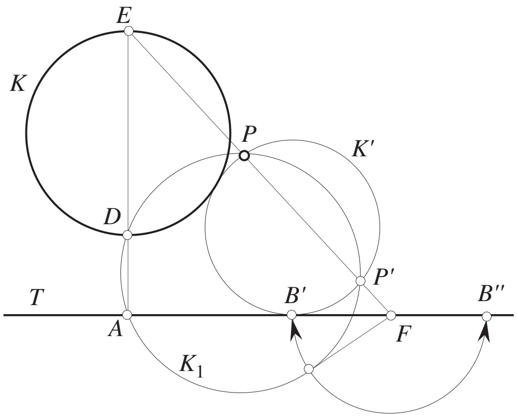
$ABCD$ ist ein Sehnenviereck, da sich gegenüberliegende Winkel auf einen gestreckten Winkel ergänzen. Somit folgt aus dem Sekanten-Tangentensatz, angewandt auf den Umkreis von $ABCD$ und den gesuchten Kreis K' nacheinander

$$\begin{aligned} ED \cdot EA &= EC \cdot EB \\ EC \cdot EB &= EP \cdot EP' \end{aligned}$$

Also gilt $ED \cdot EA = EP \cdot EP'$. Somit ist P' konstruierbar und K' geht durch P, P' und tangiert T, womit die Aufgabe auf den Fall PPT zurückgeführt ist.

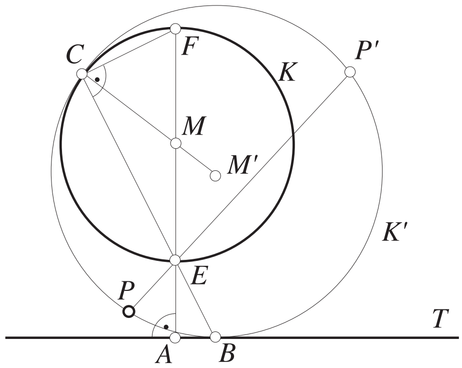


Die Konstruktion erfolgt nun so: Sei K_1 ein Hilfskreis durch die Punkte A, D und P (Fall PPP). Dann erscheint P' als Schnittpunkt der Gerade EP mit K_1. Ist $F = EP \cap T$, so findet man die Punkte B' und B'' gemäss der Aufgabe PPT (siehe Figur). Der gesuchte Kreis K' ist dann der Umkreis von $PP'B'$ respektive von $PP'B''$.



Bemerkung: Falls $P = P'$, so ist die Gerade EP eine Tangente an den gesuchten Kreis mit Berührungspunkt P: dieser Fall ist einfach zu diskutieren.

Insgesamt hat die Aufgabe vier Lösungen. Neben den zwei oben konstruierten gibt es nämlich noch zwei Lösungen, welche K von innen berühren: Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke CEF und AEB folgt $EC \cdot EB = EA \cdot EF$ und aus dem Sehnensatz für den gesuchten Kreis K' erhält man danach $EA \cdot EF = EP \cdot EP'$, womit P' wiederum konstruierbar ist.

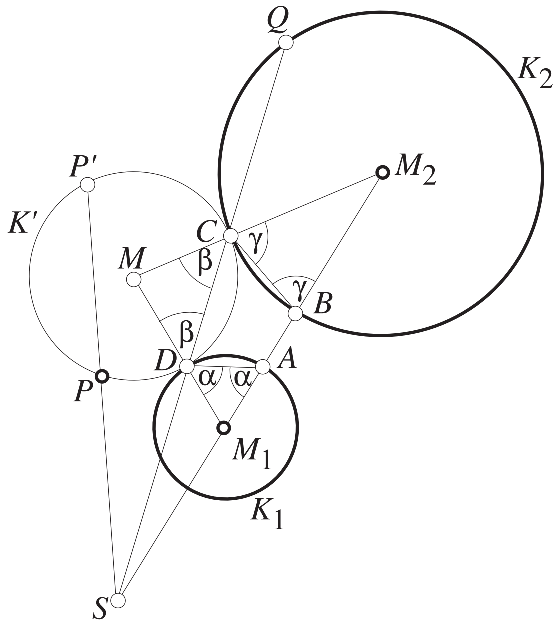


3.6 *PKK*

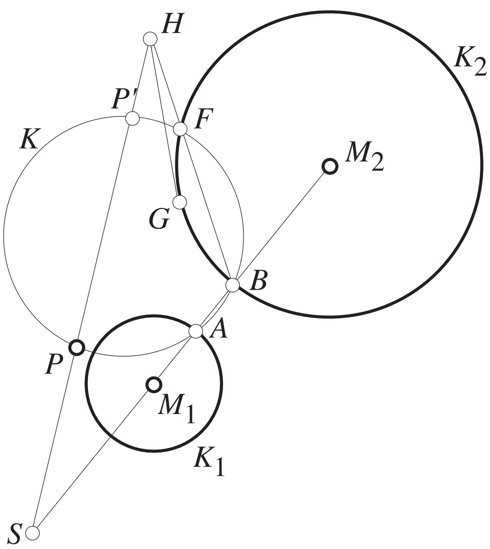
Im Dreieck M_1M_2M ist die Aussenwinkelsumme $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 2\pi$, d.h. $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Daraus folgt sofort, dass sich im Viereck $ABCD$ gegenüberliegende Winkel zu einem gestreckten Winkel ergänzen. Daher ist $ABCD$ ein Sehnenviereck. Der Sekantensatz angewandt auf dessen Umkreis und den gesuchten Kreis K' liefert

$$SA \cdot SB = SD \cdot SC = SP \cdot SP' .$$

Da C Ähnlichkeitszentrum von K' und K_2 ist, gilt $MD||M_2Q$. Aus $M_1D||M_2Q$ folgt andererseits, dass S Ähnlichkeitszentrum von K_1 und K_2 ist. Somit ist zunächst S und dann P konstruierbar, und die Aufgabe ist auf den Fall PPK zurückgeführt.



Die Lösung konstruiert man nun wie folgt: Sei K ein Hilfskreis durch die Punkte ABP. Dann erhält man P' als Schnittpunkt der Geraden SP mit K. Ist weiter $H = SP \cap BF$ und G der Berührungspunkt der Tangente von H an K_2, so findet man den gesuchten Kreis K' als Umkreis der Punkte $PP'G$. Es gibt im allgemeinen vier Lösungen: die genaue Diskussion erfolgt ähnlich wie im Falle PTK.

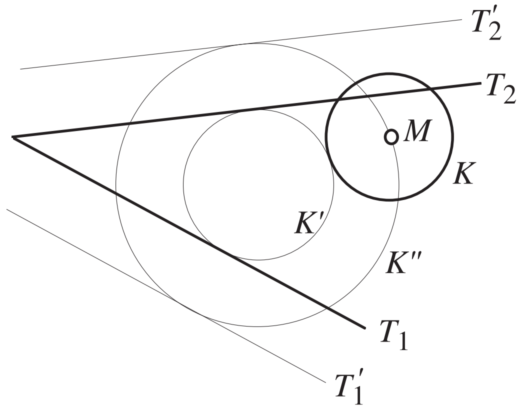


3.7 *TTT*

Diese Konstruktion entspricht der Konstruktion der In- und Ankreise eines Dreiecks. Die gesuchten Zentren sind die Schnittpunkte der inneren und äusseren Winkelhalbierenden der gegebenen Tangenten. Im allgemeinen besitzt die Aufgabe vier Lösungen.

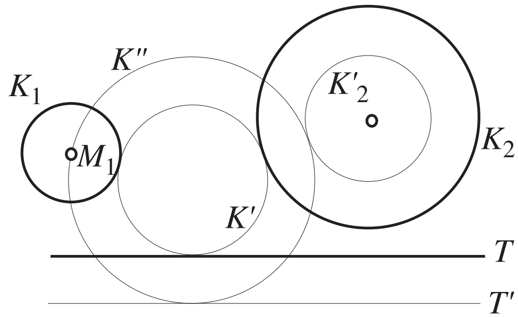
3.8 *TTK*

Sei K'' ein zum gesuchten Kreis K' konzentrischer Kreis mit einem um R vergrösserten Radius (R der Radius des gegebenen Kreises K). Ist K' ein Kreis der T_1, T_2 und K berührt, so ist K'' ein Kreis, der T_1', T_2' berührt und durch M geht. Dabei sind T_1' und T_2' die Parallelen zu T_1 und T_2 im Abstand R. Damit ist diese Aufgabe auf den Fall PTT zurückgeführt. Im allgemeinen gibt es vier Lösungen.



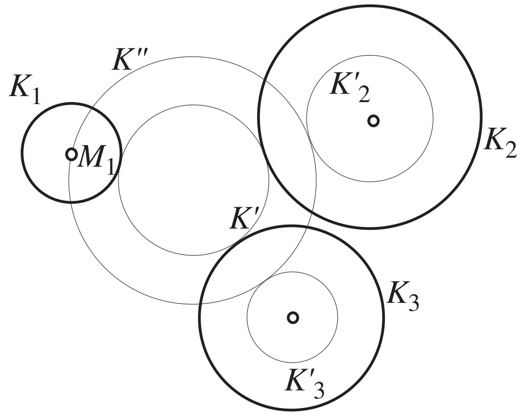
3.9 *TKK*

Sei K'' ein zum gesuchten Kreis K' konzentrischer Kreis mit einem um R_1 vergrösserten Radius (R_1 der Radius des kleineren der gegebenen Kreise K_i). Ist K' ein Kreis der K_1, K_2 und T von aussen berührt, so ist K'' ein Kreis, der K_2' und T' berührt und durch M_1 geht. Dabei ist T' die Parallele zu T im Abstand R_1 und K_2' der zu K_2 konzentrische Kreis mit um R_1 vermindertem Radius. Damit ist diese Aufgabe auf den Fall PTK zurückgeführt. Im allgemeinen gibt es acht Lösungen, die man mit analogen Überlegungen findet.



3.10 *KKK*

Sei K'' ein zum gesuchten Kreis K' konzentrischer Kreis mit einem um R_1 vergrösserten Radius (R_1 der Radius des kleinsten der gegebenen Kreise K_i). Ist K' ein Kreis der K_1, K_2 und K_3 von aussen berührt, so ist K'' ein Kreis, der K_2' und K_3' berührt und durch M_1 geht. Dabei sind K_2' und K_3' zu K_2 respektive K_3 konzentrische Kreise mit um R_1 verminderten Radien. Damit ist diese Aufgabe auf den Fall PKK zurückgeführt.



Diese Aufgabe besitzt im allgemeinen acht Lösungen.

Literatur

[1] Marcel Berger, “Geometry”, vol. 1, Berlin (etc.): Universitext, Springer, 1987

Adresse des Verfassers: Norbert Hungerbühler, Mathematik Departement, ETH Zürich, CH-8092 Zürich

E-mail Adresse: buhler@ethz.ch