Modellieren mit Differentialgleichungen

Michael Bucher
Arno Gropengiesser

ETH zürich

Modellieren mit Differentialgleichungen

Michael Bucher
Arno Gropengiesser

ETH zürich

Michael Bucher
Zürich
michael.bucher@ksstadelhofen.ch

Arno Gropengiesser
Solduno
arno.gropengiesser@edu.ti.ch

Impressum

Gestaltung, Layout und LaTeX-Typesetting

Alessandro Fasse

Druck

ETH Zürich, Print + Publish
HG D 33.5
Rämistrasse 101
8092 Zürich

E-Mail: print-publish@services.ethz.ch
Telefon: +41 44 632 50 13

http://math.ch/dgl

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Die Hochschulrektorenkonferenz hat 1990 einen Katalog Grundkenntnisse in Mathematik veröffentlicht. Darin wurde festgelegt, welcher Stoff zu Studienbeginn als bekannt vorausgesetzt wird. Nach der Maturitätsreform 1995 wurde der Katalog von der DMK, der CRM und einer Kommission der ETH Zürich 1997 überarbeitet und nach einer umfassenden Vernehmlassung gesamtschweizerisch zur Umsetzung empfohlen. Seit der Jahrtausendwende haben sich die Rahmenbedingungen wiederum geändert. So wurde vielerorts die Schulzeit verkürzt, graphikfähige Taschenrechner und CAS (Computer Algebra Systeme) sowie Geometriesoftware bieten neue Möglichkeiten im gymnasialen Mathematikunterricht.

An der Konferenz Übergang Gymnasium-Hochschule im Oktober 2010 im Centro Stefano Franscini wurde deshalb angeregt, den Katalog neu zu gestalten. Die Kommission Gymnasium-Universität hat daraufhin die DMK beauftragt, eine breit abgestützte Gruppe aus Vertretern von DMK/CRM/CMSI und der Hochschulen zu bilden, um die Arbeit auszuführen und das Resultat in eine allgemeine Vernehmlassung zu geben.

Das Resultat dieser Arbeiten ist der *Kanon Mathematik* (http://math.ch/kanon). Eine wichtige Neuerung besteht darin, dass eine Einführung in die Modellierung mit Differentialgleichungen nicht nur im mathematisch–naturwissenschaftlichen Profil, sondern in jedem Profil im Grundlagenfach erfolgen soll. Es zeigte sich allerdings, dass dafür ein sowohl für die Schülerinnen und Schüler, als auch für die Lehrpersonen brauchbares Lehrmittel fehlt.

Das vorliegende Skript, dessen Erstellung von der ETH Zürich unterstützt wurde, möchte diese Lücke schliessen. Es zeigt an vielen Beispielen auf, was Differentialgleichungen sind, woher sie kommen und wie sie exakt gelöst werden können, falls dies möglich ist. Es werden graphische und numerische Methoden vorgestellt, mit denen in jedem Fall brauchbare angenäherte Lösungen gefunden werden können. Das Einbeziehen möglicher Software (GeoGebra) und praktische Experimente runden diese Einführung ab.

Im Anhang findet sich ein Glossar und die Lösungen zu den Aufgaben.

Die vorliegende, gedruckte Form wurde im Unterricht erprobt. Der Zeitbedarf mit Prüfung beträgt ca. 20 Lektionen. Bei Bedarf und Interesse können unter http://math.ch/dgl folgende Ergänzungen eingesehen und heruntergeladen werden:

- Differentialgleichungen zweiter Ordnung
- Differentialgleichungen und ebene Kurven
- Differentialgleichungssysteme

Die Autoren hoffen mit diesem Skript sowohl Schülerinnen und Schülern als auch Lehrpersonen den Einstieg in die Thematik zu erleichtern. Natürlich freuen wir uns über Rückmeldungen jeglicher Art.

Viel Erfolg!

Aufwärmen

In der Welt verändern sich Dinge dauernd. Die Mathematik hilft uns, diese Veränderungen besser zu verstehen. Den Schlüssel zum Erfolg kennst du bereits: es ist die Idee der Funktion.

Aufgabe 1

a) Lola nimmt ein Joghurt aus dem Kühlschrank. Für die Temperatur gilt:

$$T(t) = 25 - 21 \cdot \mathrm{e}^{-0.1t},$$

wobei die Temperatur T in °C und die Zeit t seit der Entnahme in Minuten gemessen werden. Berechne und interpretiere (mit Einheiten):

- den Funktionswert $T(5)$.
- die mittlere Änderungsrate $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ im Intervall $[5, 20]$.
- die momentane Änderungsrate $T'(5)$.
- den Grenzwert von $T(t)$ für $t \to \infty$.

b) Sei $T'(t) = 3\mathrm{e}^{-0.2t}$. Wie lautet die Stammfunktion $T(t)$, für welche gilt $T(0) = 0$?

Wir haben die Erwärmung des Joghurts mathematisch mit Hilfe einer Funktion beschrieben. Wir haben also für diesen Vorgang ein Modell erstellt, bzw. diesen Vorgang *modelliert*. Es ist klar, dass ein solches Modell nicht immer exakt die Realität wiedergeben kann: Die Temperatur im Innern des Joghurts entspricht beispielsweise nur ungefähr auch dessen Aussentemperatur. Trotzdem ist ein solches Modell wertvoll, weil es die Möglichkeit eröffnet, Aussagen über den Vorgang zu treffen und rechnerisch zu bestätigen.

Vielleicht hast du dich auch schon gefragt, wie man auf Funktionen wie $T(t) = 25 - 21\mathrm{e}^{-0.1t}$ kommt. Du wirst es bald erfahren!

Wir halten fest:

- Mit **Funktionen** können wir Vorgänge beschreiben. Oft verändert sich etwas im Laufe der Zeit. Dann wählen wir als unabhängige Variable den Buchstaben t (für das englische Wort *time*) anstelle von x.
- Ist die unabhängige Variable die Zeit t, dann erfasst die Ableitungsfunktion die momentane Änderungsrate (interpretierbar als Geschwindigkeit) eines Vorganges.
- Ist die Ableitungsfunktion gegeben, erhalten wir durch **Integrieren** die ursprüngliche Funktion – bis auf eine Konstante – zurück.

- Ein **Modell** ist immer eine Vereinfachung eines realen Vorganges, bei dem nur gewisse Aspekte berücksichtigt werden oder werden können. Ein Modell erlaubt es aber, den Vorgang besser zu verstehen, zu analysieren und zu simulieren. Wir müssen dabei stets überprüfen, wie sinnvoll unsere Berechnungen sind bzw. wie sie interpretiert werden können.

KAPITEL 1

Die Differentialgleichung $f'(x) = a \cdot f(x)$

1.1 Ein erstes Beispiel

Du kennst bereits Differentialgleichungen! Die Gleichung

$$f'(x) = -x + 3$$

ist eine Differentialgleichung.

Bisher war es eine Gleichung bzw. die Ableitungsfunktion, mit der Du die momentane Änderungsrate berechnet hast. Wir ändern jetzt den Blickwinkel und sagen:

$$f'(x) = -x + 3$$

ist *eine Gleichung mit einer unbekannten Funktion* $f(x)$. Auch die Lösung, die wir durch Integrieren finden, kennen wir:

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} + 3x + C.$$

Damit haben wir unsere erste Differentialgleichung gelöst! Die Lösung ist eine Funktion. Wir haben es also mit einer neuen Art von Gleichung zu tun!

Merke 1

Eine Gleichung, in der die Ableitung einer Funktion auftritt, heisst

Differentialgleichung.

Die Gleichung lösen wir, indem wir eine Funktion (und keine Zahl!) suchen, welche die Gleichung erfüllt. Eine Funktion, die eine solche Gleichung erfüllt, heisst

Lösung der Differentialgleichung.

Aufgabe 2 - Differentialgleichung mit Anfangswert

a) Wie lautet die Lösung der Differentialgleichung $f'(t) = 2t^2 - t + 1$?

b) Welche in **a)** gefundene Lösung besitzt den *Anfangswert* $f(0) = 3$?

Natürlich sind Differentialgleichungen noch viel mehr.

In einer Differentialgleichung tritt nämlich in der Regel neben der Ableitung der Funktion auch die Funktion selber auf! Dies erfahren wir im nächsten Abschnitt.

1.2 Wachstum einer Population

Stellen wir uns eine Gruppe von Hasen vor. Je mehr Hasen es sind, umso mehr Junge werden sie gebären. Diese werden heranwachsen und ihrerseits Junge bekommen. Die Hasengruppe wächst damit aber *immer schneller* an: Doppelt so viel Hasen bringen im selben Zeitraum doppelt so viele Junge zur Welt!

In Zahlen könnte dies vielleicht so aussehen: Zu Beginn sind es 100 Hasen. Im ersten Monat bekommen sie 50 Junge. Dann haben wir 150 Hasen. Wie viele Junge werden diese 150 Hasen wohl im zweiten Monat bekommen? Wir können (müssen!) annehmen, dass es 75 Junge sind.

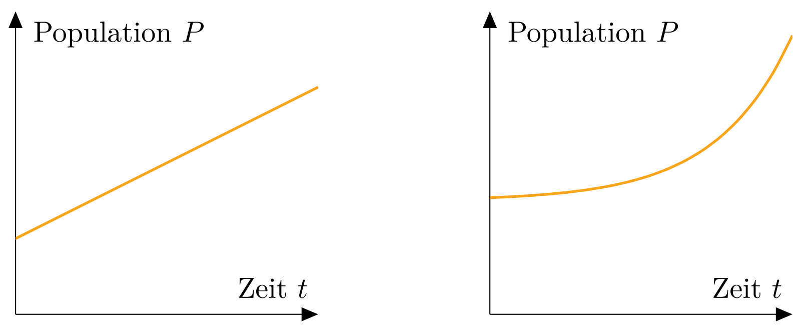
Wesentlich an diesem Beispiel ist:

- Die Hasenschar wächst um so schneller $(75 > 50)$, je mehr Hasen vorhanden sind $(150 > 100)$ und:
- Die Zunahme pro Monat beträgt gerade die Hälfte der Anzahl Hasen zu Beginn des jeweiligen Monats. Mit anderen Worten: Die Wachstumsgeschwindigkeit ist proportional zur vorhandenen Anzahl Hasen (Zunahme pro Monat $= 0.5 \times$ Anzahl).

Nicht nur Hasen vermehren sich, sondern alle Lebewesen, etwa Menschen oder Pflanzen. Wir sprechen allgemein vom *Wachsen einer Population*.

Aufgabe 3 - Je grösser, umso schneller

Abgebildet sind zwei Graphen, die beide ein Wachstum einer Population beschreiben. Wenn nun die Population um so schneller wächst, je grösser sie ist: Welcher der beiden Graphen bringt dies zum Ausdruck?



Die Wachstumsgeschwindigkeit nimmt also zu, je grösser die Population ist. (Erinnerung: je mehr Hasen es sind, umso schneller vermehren sie sich!).

Oben haben wir gesehen, dass Wachstumsgeschwindigkeit und Grösse der Population einem einfachen „Gesetz" gehorchen können.

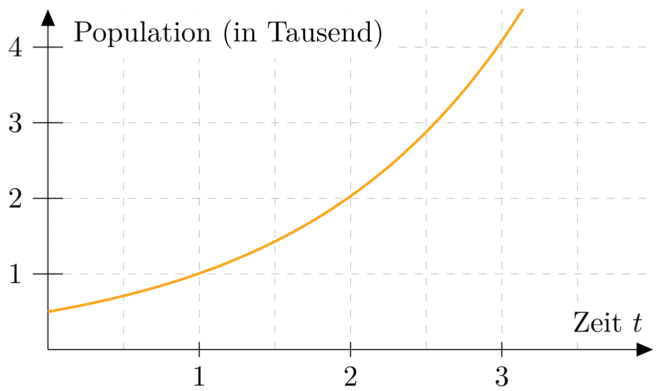
Die (plausible!) Annahme, dass die Wachstumsgeschwindigkeit einer Population - zu jedem Zeitpunkt t - proportional zur momentanen Grösse der Population ist, drücken wir nun mit Hilfe einer Gleichung aus:

$$P'(t) = a \cdot P(t)$$

(Wachstumsgeschwindigkeit = Proportionalitätsfaktor × Grösse der Population).

Aufgabe 4

Die Annahme für unser Wachstumsmodell lautet: die Wachstumsgeschwindigkeit (Wachstumsrate) ist proportional zur Population. Mit einem Koordinatensystem im „Hintergrund" können wir den Proportionalitätsfaktor a schätzen. Wie gross ist a im vorliegenden Fall?



Hinweis: Zeichne dazu Tangenten ein und lies die Steigungen ab. Vergleiche dann diese Änderungsraten mit den jeweiligen Funktionswerten.

Bemerkung - Selbstverständlich ist die „Grösse" der Population $P(t)$ stets eine natürliche Zahl und die Funktion $P(t)$ macht bei jeder „Veränderung" einen „Sprung". $P(t)$ ist also nicht differenzierbar, so dass die Differentialgleichung $P'(t) = a \cdot P(t)$ zunächst gar nicht sinnvoll erscheint. Man behilft sich hier, wie immer bei einem Modell, mit einer Idealisierung, was nur kleine Abweichungen von der effektiven Situation ergibt, aber - mit Hilfe der Differentialgleichung - grosse Einsichten!

Merke 2

Für das Wachsen einer Population treffen wir folgende natürliche Annahme:

Die Änderungsrate ist proportional zur Grösse der Population.

Die daraus abgeleitete Gleichung besitzt die allgemeine Form

$$f'(x) = a \cdot f(x)$$

und heisst

Differentialgleichung des natürlichen oder exponentiellen Wachstums.

Der Name *Differentialgleichung des exponentiellen Wachstums* rührt daher, dass es sich bei den Lösungen dieser Differentialgleichung um *Exponentialfunktionen* handelt.

1.3 Lösung der Differentialgleichung $f'(x) = a \cdot f(x)$

Wenn wir die Gleichung

$$f'(x) = a \cdot f(x)$$

betrachten sehen wir, dass „im Wesentlichen“ die Ableitung der Funktion gerade gleich der Funktion selber ist. Wie lautet nun eine solche Funktion $f(x)$? Wir kennen dafür einen geeigneten Kandidaten: die Ableitung von $f(x) = \mathrm{e}^x$ lautet $f'(x) = \mathrm{e}^x$!

Damit sind wir fast am Ziel. Was uns noch fehlt, ist der Faktor a. Wir erinnern uns an die Kettenregel und sehen, dass $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$ genau diesen Faktor a als innere Ableitung liefert. Wir behaupten also: $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$ löst die Differentialgleichung

$$f'(x) = a \cdot f(x).$$

Um die Richtigkeit unserer Lösung zu überprüfen, gehen wir vor wie immer. Wir setzen ein: Für die linke Seite gilt $f'(x) = a \cdot \mathrm{e}^{ax}$ und für die rechte Seite $a \cdot f(x) = a \cdot \mathrm{e}^{ax}$. Wir haben also eine Lösung dieser Differentialgleichung gefunden!

Es gibt aber noch weitere Lösungen. Wir können $f(x)$ noch um eine Konstante C anreichern! Das siehst du in der folgenden Aufgabe.

Aufgabe 5 - Stammfunktionen und Konstanten

a) Zeige durch Einsetzen, dass die Funktionen $f(x) = C \cdot \mathrm{e}^{ax}$ die Differentialgleichung $f'(x) = a \cdot f(x)$ lösen.

Hinweis: Bestimme dazu einzeln die linke und die rechte Seite. Sind sie gleich?

b) Ist auch die Funktion $f(x) = \mathrm{e}^{ax} + C$ eine Lösung der Differentialgleichung $f'(x) = a \cdot f(x)$?

Aufgabe 6 - Exponentielles Wachstum, Ausbreitung einer Population

Von einer Fischpopulation $P(t)$, t in Jahren, ist bekannt, dass die momentane Änderungsrate ein Fünftel der vorhandenen Population beträgt.

a) Wie lautet die zugehörige Differentialgleichung?

b) Welche Funktionen lösen diese Differentialgleichung?

c) Um die Konstante C zu bestimmen, brauchen wir zusätzliche Information über die Grösse der Fischpopulation zu einem bestimmten Zeitpunkt – einen sogenannten *Anfangswert*. Wir nehmen an, dass es zu Beginn (also für $t = 0$) 500 Fische gab. Bestimme die Konstante C.

d) Skizziere den Verlauf der Kurve $P(t)$, welche die Fischpopulation beschreibt, qualitativ.

e) Berechne

- wie gross die Population nach 3 Jahren ist,
- wann es mehr als 3000 Fische sind.

f) Mach dir noch einmal klar, indem du es jemandem erklärst,

- wie wir ganz natürlich auf die Differentialgleichung $P'(t) = a \cdot P(t)$ gestossen sind,
- wie die Lösungen lauten,
- wie die Parameter C und a in der Lösung interpretiert werden können.

In der vorherigen Aufgabe haben wir die Differentialgleichung $P'(t) = 0.2 \cdot P(t)$ gelöst. Die Lösungen sind Funktionen der Form $P(t) = C \cdot \mathrm{e}^{0.2t}$, wobei C eine beliebige Konstante ist. Dabei heisst

$$P(t) = C \cdot \mathrm{e}^{0.2t}$$

die *allgemeine Lösung* der Differentialgleichung.

Zum Anfangswert $P(0) = 500$ gehört eine dieser Lösungen, nämlich die Funktion

$$P(t) = 500 \cdot \mathrm{e}^{0.2t}.$$

Eine solche Lösung heisst *spezielle Lösung*.

Warum dürfen wir von einer *allgemeinen Lösung* sprechen? Es wäre doch denkbar, dass die Differentialgleichung weitere Lösungen besitzt – mit uns unbekannten Funktionen. In der folgenden Aufgabe kannst du zeigen, dass dies nicht der Fall ist.

Aufgabe 7 - Eindeutigkeit der Lösung

Zeige, dass jede Lösung der Differentialgleichung $f'(x) = a \cdot f(x)$ die Form $f(x) = C \cdot \mathrm{e}^{ax}$ besitzt!

Hinweis: Nimm an, dass $g(x)$ ebenfalls eine Lösung ist und betrachte die Funktion $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$. Zeige jetzt, dass $h'(x) = 0$ gilt. Was heisst dies nun für $h(x)$? Was folgt damit für $g(x)$?

Merke 3

Die **allgemeine Lösung** einer Differentialgleichung enthält noch eine Konstante C.

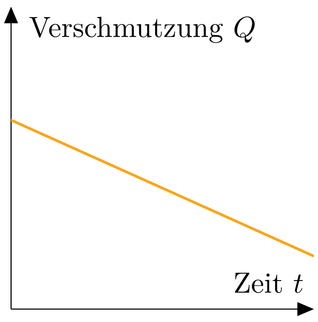
Eine **spezielle Lösung** wird aus der allgemeinen Lösung gewonnen, wenn wir der Konstanten C einen festen Zahlenwert zuweisen, etwa aufgrund eines vorgegebenen Anfangswertes.

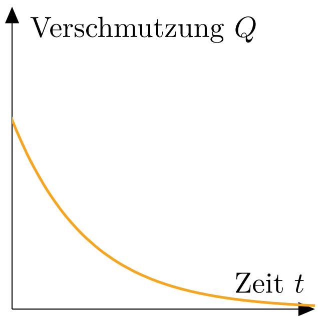
Aufgabe 8 - Exponentieller Zerfall, Umweltverschmutzung

Durch einen Unfall wird ein See mit einem Giftstoff verschmutzt. Dabei gibt Q die Masse des Giftstoffes in kg an. Aus einem Fluss gelangt frisches Wasser in den See, wird dort mit dem verschmutzten Wasser vermischt und dann über einen anderen Fluss abgeführt. Sei t die seit dem Unfall vergangene Zeit in Tagen.

a) Zuerst ist klar, dass die Verschmutzung abnimmt, Q ist also fallend. Messungen zeigen weiter, dass Q nicht stets um den gleichen Wert abnimmt, sondern zu Beginn schneller, dann langsamer. Sie nimmt also *umso langsamer ab, je kleiner sie ist.*

- Welcher der beiden folgenden Graphen bringt dies zum Ausdruck?
- Versuche in eigenen Worten zu erklären, warum dies so ist.





b) Die zugehörige Differentialgleichung trägt dem Rechnung (beachte das Vorzeichen!):

$$Q'(t) = -a \cdot Q(t) \quad (a > 0).$$

Von welchen Gegebenheiten wird der Wert von a wohl beeinflusst?

c) Wir wählen $a = 0.05$. Wie lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung?

d) Der Anfangswert der Verschmutzung beträgt $Q(0) = 12$. Wie lautet die spezielle Lösung?

e) Berechne die sogenannte *Halbwertszeit*, also die Zeitdauer, die es braucht, bis sich die Verschmutzung auf den halben Wert gesenkt hat. Ist die Halbwertszeit vom Anfangswert abhängig?

f) Mach dir noch einmal klar,

- wie wir ganz natürlich auf die Differentialgleichung $Q'(t) = -a \cdot Q(t)$ gestossen sind,
- was der Unterschied zwischen der allgemeinen und der spezielle Lösung ist,
- wie die Parameter C und a interpretiert werden können.

Wir hätten die Differentialgleichung auch wie folgt aufschreiben können:

$$Q'(t) = a \cdot Q(t) \quad (a < 0).$$

Wir wählen aber a immer positiv und schreiben demnach „$-a$“, wenn die Situation einen negativen Proportionalitätsfaktor erfordert. Das Vorzeichen zeigt uns dann sofort, ob es sich um einen exponentiellen *Zerfall* ($-$) oder um ein exponentielles *Wachstum* ($+$) handelt.

1.4 Rückblick

- Eine **Differentialgleichung** ist eine Gleichung, in der eine Ableitung der gesuchten Funktion vorkommt.
- Eine **Lösung einer Differentialgleichung** ist keine Zahl, sondern eine Funktion!

- Als wichtiges Beispiel haben wir die **Differentialgleichung des natürlichen oder exponentiellen Wachstums** kennengelernt:

  $$f'(x) = a \cdot f(x).$$

  Sie stellt eine Beziehung her zwischen der unbekannten Funktion $f(x)$ und ihrer Ableitung $f'(x)$ und besitzt die **allgemeine Lösung**

  $$f(x) = C \cdot \mathrm{e}^{ax}.$$

  Ist ein **Anfangswert** vorgegeben, können wir die Konstante C bestimmen. Wir erhalten damit eine **spezielle Lösung**.

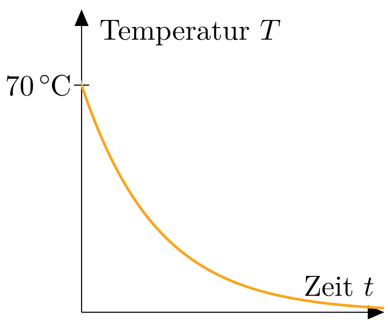
KAPITEL 2

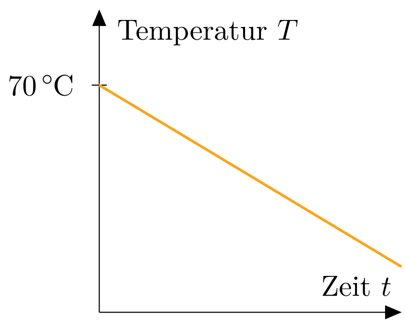
Die Differentialgleichung $f'(x) = a \cdot f(x) + b$

2.1 Abkühlungsgesetz von Newton

Aufgabe 9 - Kaffee

Wir stellen einen 70 °C heissen Kaffee nach draussen, wo es 0 °C ist. Was passiert? Der Kaffee kühlt sich ab. Aber wie? Welcher der beiden Graphen beschreibt den Abkühlungsvorgang wohl zutreffender? Nenne Gründe.

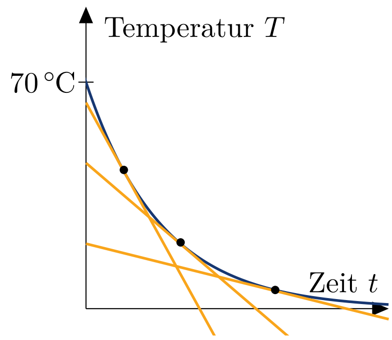




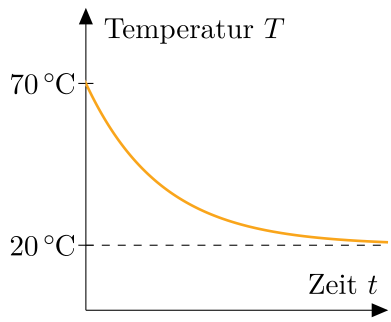
Der linke Graph erinnert uns an die Differentialgleichung

$$T' = -a \cdot T \quad (a > 0)$$

aus dem Kapitel 1. In Worte übersetzt besagt sie hier: Ein heisser Kaffee kühlt sehr schnell ab. Je kälter er wird, umso langsamer erfolgt die Abkühlung. Dies lässt sich an den Tangentensteigungen (Änderungsraten, in Orange) sehen. Je kälter der Kaffee, umso weniger schnell wird er kälter.



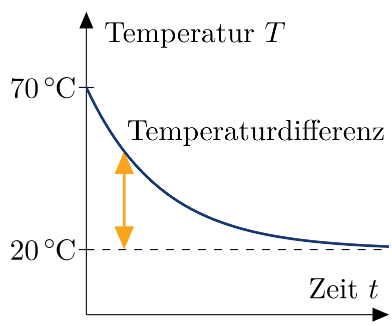
Wir stellen nun einen gleich heissen Kaffee nach draussen, jetzt aber bei einer Aussentemperatur von 20 °C. Wie kühlt sich der Kaffee jetzt ab? Zuerst einmal wird der Kaffee sicher nicht kälter als 20 °C. Aber sonst wird dies in derselben Art wie oben geschehen. Die Abkühlung erfolgt zuerst schnell, dann immer langsamer.



Es ist das Verdienst des Physikers *Isaac Newton* (1643–1727) hinter der Abnahme der Temperatur eine Gesetzmässigkeit zu vermuten und diese experimentell zu bestätigen. Das zu seinem Ehren benannte „Newtonsche Abkühlungsgesetz" lässt sich wie folgt formulieren:

Die Abkühlungsgeschwindigkeit eines Objektes ist proportional zur Differenz zwischen seiner Temperatur und der Umgebungstemperatur.

Die Abkühlungsgeschwindigkeit des Kaffees ist also proportional zum Temperaturunterschied von Kaffeetemperatur und Aussentemperatur.



Wir übersetzen das mutig in eine Differentialgleichung:

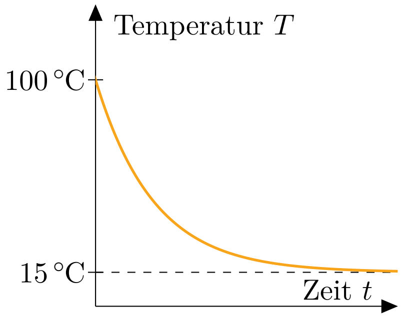
$$T'(t) = -a \cdot (T(t) - U) \quad (a > 0),$$

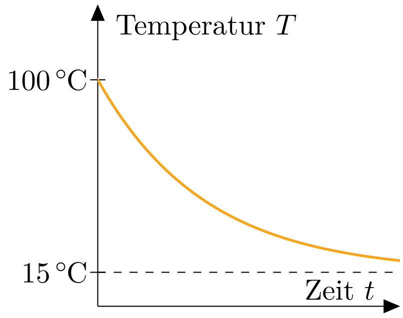
wobei U für die Umgebungstemperatur steht.

Aufgabe 10 - Kuchen

a) Stelle die Differentialgleichung für einen abkühlenden Kuchen gemäss dem Newtonschen Abkühlungsgesetz auf. Wähle als Aussentemperatur 15 °C.

b) Frisch aus dem Ofen hat der Kuchen zu Beginn ($t = 0$) eine Temperatur von 100 °C. In der Abbildung sind mögliche Temperaturkurven skizziert. Von was hängt der unterschiedlichen Verlauf ab? Bei welcher Kurve ist der Parameter a grösser?





Merke 4

Das Abkühlungsgesetz ermöglicht eine Beziehung zwischen der momentanen Änderung der Temperatur und der Temperatur selbst in Form einer Gleichung zu formulieren. Auch bei anderen Problemen erweist sich das Suchen nach einer

Beziehung zwischen der momentanen Änderungsrate der Grösse und der Grösse selbst

als fruchtbar. Solche Beziehungen lassen sich, wie du bereits weisst, mit Hilfe von Differentialgleichungen beschreiben.

Wie können wir die Differentialgleichung

$$T'(t) = -a \cdot (T(t) - U)$$

lösen? In Kapitel 4 werden wir uns näher mit Lösungsmethoden befassen. Mit ein bisschen Intuition gelingt uns aber bereits jetzt die Lösung dieser Gleichung! Wenn wir nämlich die obigen Graphen betrachten, können wir vermuten, dass $T(t)$ einfach eine um U verschobene Exponentialfunktion ist. Wir vermuten also, dass die Funktionen

$$T(t) = C \cdot \mathrm{e}^{-at} + U$$

die Differentialgleichung lösen.

Aufgabe 11 - Nachweis

Zeige, dass die Funktion $T(t) = C \cdot \mathrm{e}^{-at} + U$ für beliebiges C die Differentialgleichung $T'(t) = -a \cdot (T(t) - U)$ löst.

Aufgabe 12 - Kaffee II

Die Funktion $T(t)$ modelliert das Abkühlen von heissem Kaffee (T in °C, t in Minuten).

a) Stelle die Differentialgleichung für $T(t)$ gemäss dem Newtonschen Abkühlungsgesetz auf. Wähle als Aussentemperatur 20 °C und für den Proportionalitätsfaktor $a = 0.2$.

b) Gib die (allgemeine) Lösung dieser Differentialgleichung an. Überprüfe deine Lösung durch Einsetzen!

c) Von was könnte der Wert von a abhängen?

d) Die Anfangstemperatur des Kaffees beträgt 70 °C.

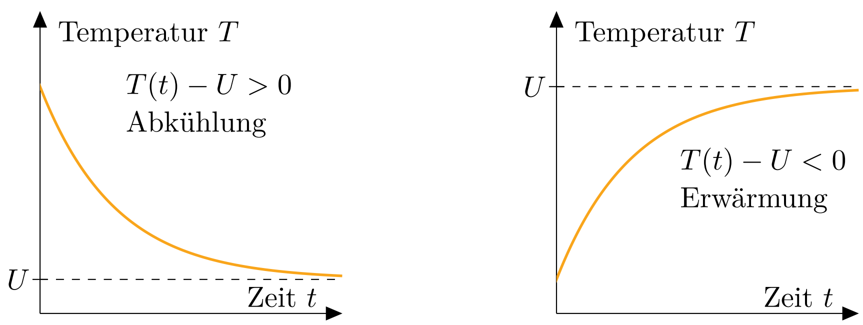
- Wie lautet die spezielle Lösung?
- Wie warm ist der Kaffee nach 10 Minuten?
- Wie lang dauert es, bis er eine Temperatur von 30 °C hat?

e) Für welchen Wert von t gilt $T'(t) = 0$? Interpretiere deine Lösung!

Das Gesetz von Newton und die daraus resultierende Differentialgleichung

$$T'(t) = -a \cdot (T(t) - U) \quad (a > 0),$$

können wir auch benutzen, wenn sich etwas *erwärmt*. Beachte dabei, dass das negative Vorzeichen bestehen bleibt, obwohl $T'(t) > 0$ ist. Warum?



Wenn sich etwas erwärmt, dann ist die Umgebungstemperatur U grösser als $T(t)$ und somit $T(t) - U < 0$. Für $a > 0$ ist demnach wieder

$$-a \cdot (T(t) - U) > 0.$$

Das *negative* Vorzeichen interpretieren wir also so, dass die Temperaturdifferenz *abnimmt*.

Aufgabe 13 - Joghurt (vgl. Aufgabe 1)

Lola nimmt ein Joghurt aus dem Kühlschrank und vergisst es auf dem Tisch in der 25 °C warmen Küche. Sei t die seit Entnahme verstrichene Zeit in Minuten. Wir setzen $a = 0.1$.

a) Stelle die Differentialgleichung auf und interpretiere sie.

b) Wie lautet die (allgemeine) Lösung der zugehörigen Differentialgleichung?

c) Das Joghurt hat zu Beginn eine Temperatur von 4 °C. Zeichne eine Kurve, welche die Temperatur des Joghurts qualitativ wiedergibt.

d) Ab wann ist das Joghurt wärmer als 15 °C?

Aufgabe 14 - Gleichgewichtslösung

Wir betrachten das Beispiel

$$T'(t) = -0.25 \cdot (T(t) - 10).$$

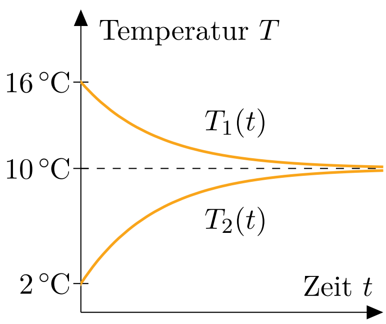
Die allgemeine Lösung kennen wir. Sie lautet:

$$T(t) = C \cdot \mathrm{e}^{-0.25t} + 10.$$

a) In der Abbildung sind zwei Kurven dargestellt:

- $T_1(t) = C_1 \cdot \mathrm{e}^{-0.25t} + 10$ mit Anfangstemperatur $T(0) = 16$
- $T_2(t) = C_2 \cdot \mathrm{e}^{-0.25t} + 10$ mit Anfangstemperatur $T(0) = 2$.

Bestimme die Konstanten C_1 und C_2.



b) Die Temperaturkurven verlaufen immer hin zur Umgebungstemperatur von 10 °C, unabhängig davon, wie gross die Anfangstemperatur ist. Was passiert eigentlich, wenn die Anfangstemperatur $T(0) = 10$ °C beträgt?

Klar: Es passiert nichts – die Temperatur ändert sich nicht! Dieser spezielle Fall ist in unserer allgemeinen Lösung enthalten, wenn wir $C = 0$ setzen:

$$T(t) = 10.$$

Diese spezielle Lösung heisst **Gleichgewichtslösung**. Die Gleichgewichtslösung erhalten wir auch direkt über die Differentialgleichung, wenn wir die Gleichung

$$T'(t) = 0$$

lösen:

$$T'(t) = -0.25 \cdot (T(t) - 10) = 0$$

ergibt $T(t) = 10$.

Erkläre mit eigenen Worten, was eine Gleichgewichtslösung ist und wie man sie finden kann!

Die Gleichung

$$T'(t) = -a \cdot (T(t) - U)$$

ist ein Beispiel einer *linearen Differentialgleichung*. Wenn wir die rechte Seite ausmultiplizieren erhalten wir

$$T'(t) = -a \cdot T(t) + a \cdot U.$$

Wenn wir für a eine beliebige Konstante zulassen und $b = a \cdot U$ setzen, dann erhalten wir die Form

$$T'(t) = a \cdot T(t) + b.$$

Merke 5

Eine Differentialgleichung der Form

$$f'(x) = a \cdot f(x) + b$$

heisst

lineare Differentialgleichung (mit konstanten Koeffizienten)

2.2 Lösung der Differentialgleichung $f'(x) = a \cdot f(x) + b$

Aufgabe 15 - Lineare Differentialgleichung

a) Löse die lineare Differentialgleichung

$$f'(x) = a \cdot f(x) + b$$

in Abhängigkeit von a und b.

b) Überprüfe deine Lösung durch Einsetzen.

2.3 Rückblick

- Eine **lineare Differentialgleichung** besitzt die Form

  $$f'(x) = a \cdot f(x) + b.$$

  Die allgemeine Lösung lautet:

  $$f(x) = C \cdot \mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}.$$

- Eine wichtige Anwendung dieser Gleichung sind **Erwärmungs- und Abkühlungsprozesse**, welche wir in der Form

  $$T'(t) = -a \cdot (T(t) - U) \quad (a > 0),$$

  schreiben, wobei U für die Umgebungstemperatur steht. In der ausmultiplizierten Form zeigt sich ihre lineare Gestalt:

  $$T'(t) = -a \cdot T(t) + a \cdot U \quad (a > 0),$$

  Die allgemeine Lösung lautet:

  $$T(t) = C \cdot \mathrm{e}^{-at} + U.$$

- Bei vielen Problemen ist es möglich eine Beziehung zwischen der momentanen Änderungsrate einer Grösse und der Grösse selbst in Form einer Gleichung anzugeben. Als Beispiele solcher Differentialgleichungen sind uns bisher Wachstums- und Erwärmungs- bzw. Abkühlungsprozesse begegnet.

KAPITEL 3

Die Differentialgleichung $f'(x) = a \cdot f(x) \cdot \left(1 - \frac{f(x)}{G}\right)$

3.1 Logistisches Modell

In Kapitel 1 haben wir uns mit der Differentialgleichung des natürlichen Wachstums befasst:

$$P'(t) = a \cdot P(t).$$

Diese Differentialgleichung haben wir auf „natürliche" Art hergeleitet, in dem wir folgende Annahme getroffen haben:

Die Änderungsrate ist proportional zur Grösse der Population.

Diese Annahme leuchtet ein, aber sie greift zu kurz. Warum?

Die Population kann sich nicht *beliebig* ausbreiten - irgendwann ist nicht mehr genügend Platz oder Nahrung vorhanden! Wir sagen: die Population stösst *ressourcenbedingt* an eine (obere) Sättigungsgrenze G.

Wir müssen also unser Modell ändern, wenn wir dies berücksichtigen wollen. Nur wie? Dem belgischen Mathematiker Pierre-François Verhulst (1804 - 1849) verdanken wir das folgende Modell, das diesem Umstand Rechnung trägt. Es heisst *logistisches Wachstum* und lautet:

$$P'(t) = a \cdot P(t) \cdot \left(1 - \frac{P(t)}{G}\right) \quad (a > 0).$$

Verhulst hat die Differentialgleichung des natürlichen Wachstums also um den Faktor $\left(1 - \frac{P(t)}{G}\right)$ „erweitert". Welchen Einfluss hat dieser Faktor?

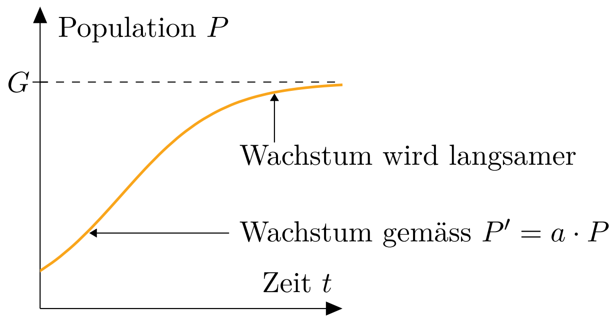
Aufgabe 16 - Einfluss des Faktors

Ergänze den Lückentext mit den folgenden Wörtern:

natürlichen - 0 - ungehindert - 1 - verlangsamt - 1 - $a \cdot P(t)$ - geringen - 0 - starken - 0

a) Ist $P(t)$ klein im Vergleich zu G, dann ist $\frac{P(t)}{G} \approx$ ________________ , also $\left(1 - \frac{P(t)}{G}\right) \approx$ ________________ . Damit ist $P'(t) \approx$ ________________ . Das heisst: zu Beginn hat der Faktor einen ________________ Einfluss. Das logische Wachstum entspricht in dieser Phase ungefähr dem ________________ Wachstum. Die Population wächst ________________ .

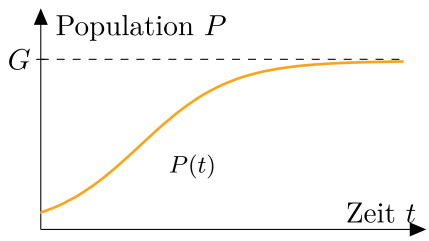
b) Ist $P(t)$ nahe bei G, dann ist $\frac{P(t)}{G} \approx$ ________________ , also $\left(1 - \frac{P(t)}{G}\right) \approx$ ________________ . Damit ist $P'(t) \approx$ ________________ . Das heisst: nähert sich $P(t)$ der Sättigungsgrenze G, hat der Faktor einen ________________ Einfluss. Das Wachstum wird immer mehr ________________ . Der Faktor „drückt“ die Änderungsrate zu Boden. Der Faktor bewirkt also genau das, was wir wollen!



Aufgabe 17 - Logistische Kurve

a) Stelle die Differentialgleichung eines logistischen Wachstumsprozesses auf mit $a = 0.01$ und $G = 1000$.

b) Die Abbildung zeigt qualitativ den typischen Verlauf einer logistischen Kurve. Beschreibe den Verlauf der Kurve in eigenen Worten!



c) Betrachte die in **a)** aufgestellte Differentialgleichung. Was passiert, wenn die Population P zu Beginn bereits grösser ist als die Stättigungsgrenze G?

Das logistische Wachstumsmodell

$$P'(t) = a \cdot P(t) \cdot \left(1 - \frac{P(t)}{G}\right) \quad (a > 0)$$

ist eine wichtige Differentialgleichung. Viele Vorgänge lassen sich mit dieser Gleichung modellieren.

Multiplizieren wir sie aus, dann sehen wir, dass es sich *nicht* um eine lineare Differentialgleichung handelt:

$$P'(t) = a \cdot P(t) \cdot \left(1 - \frac{P(t)}{G}\right) = a \cdot P(t) - \frac{a}{G} \cdot P(t)^2.$$

Der logistischen Gleichung lässt sich die Lösung nicht ohne Weiteres ansehen. Im nächsten Kapitel werden wir uns deshalb eingehender mit Lösungsmethoden befassen.

Der folgende Abschnitt beleuchtet die logistische Gleichung noch von einer anderen Seite. Für das Verständnis ist er aber nicht nötig.

3.2 Wachstumsrate*

Wächst eine Hasenpopulation um 100 Hasen pro Monat, dann können wir nicht sagen, ob es sich bei diesen Hasen um eine schnell wachsende Art handelt – ob sie also sehr viele oder nur wenige Junge pro Monat bekommen.

Warum?

Weil wir nicht wissen, wie gross die Hasengruppe zu Beginn des Monats war!

Waren es nämlich zu Beginn

- 100 Hasen, dann würden sich die Hasen schnell vermehren - wir hätten eine Verdoppelung jeden Monat.
- 1000 Hasen, dann würden sich die Hasen weniger schnell vermehren. Nur jeder zehnte Hase gebärt ein Junges.

Wie ist das jetzt zu verstehen?

Wenn wir hier von „schnell“ bzw. „weniger schnell“ sprechen, meinen wir dies immer *relativ* - also im Verhältnis - zur bereits vorhandenen Anzahl. Wir betrachten also den Quotienten

$$\frac{P'(t)}{P(t)},$$

der auch *Wachstumsrate* genannt wird.

Aufgabe 18 - Wachstumsrate

a) Was kannst du über die Wachstumsrate beim natürlichen Wachstum aussagen?
Hinweis: Dividiere die Differentialgleichung durch $P(t)$.

b) Was kannst du über die Wachstumsrate aussagen beim logistischen Wachstum?

3.3 Rückblick

- Die Differentialgleichung für das **logistische Wachstumsmodell** besitzt die Form

$$P'(t) = a \cdot P(t) \cdot \left(1 - \frac{P(t)}{G}\right) \quad (a > 0).$$

  Das logistische Modell berücksichtigt, dass die Population $P(t)$ ressourcenbedingt an eine obere Grenze G stösst.

- Während die **Wachstumsrate** $\frac{P'(t)}{P(t)}$ beim natürlichen Wachstum konstant ist, hängt sie beim logistischen Modell linear (also denkbar einfach!) von $P(t)$ ab: je grösser $P(t)$, umso kleiner die Wachstumsrate.

KAPITEL 4

Lösungsmethoden

In Kapitel 3 sind wir auf die Differentialgleichung des logistischen Modells gestossen

$$P'(t) = a \cdot P(t) \cdot \left(1 - \frac{P(t)}{G}\right),$$

die wir noch nicht lösen können. Es ist also an der Zeit, dass wir uns mit *Lösungsmethoden* auseinandersetzen.

Wie du weisst, ist die *Lösung* einer Differentialgleichung eine *Funktion*, welche die Gleichung erfüllt. Funktionen lassen sich auf unterschiedliche Arten darstellen. Die Lösungsmethoden, die wir hier besprechen, entsprechen dabei in gewisser Weise diesen Darstellungsarten.

	Darstellungsart	**Lösungsmethode**
1	Graph (als Kurve)	Richtungsfeld
2	Funktionsgleichung	Separation der Variablen
3	Wertetabelle	Euler-Verfahren

4.1 Richtungsfeld – graphische Lösung

Diese Methode hilft uns, den ungefähren Verlauf der Lösung einer Differentialgleichung zu bestimmen - mit ihr erhalten wir eine Vorstellung vom Graphen der Lösungsfunktion.

Wir beginnen mit dem Beispiel

$$f'(x) = 0.5 \cdot f(x).$$

Wir kennen die Lösung! Es sind die Funktionen

$$f(x) = C \cdot \mathrm{e}^{0.5x}.$$

Wir interpretieren nun diese Differentialgleichung auf *geometrische Weise:*

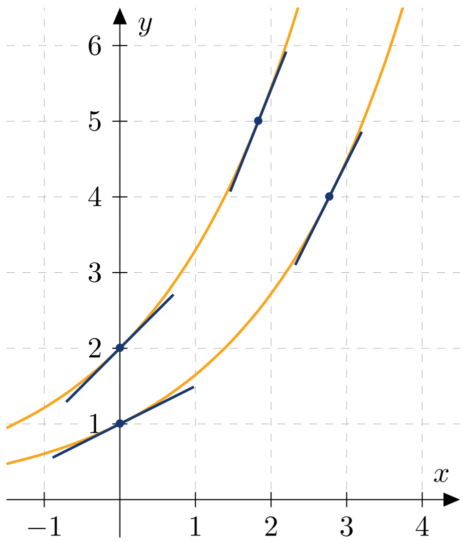
Die Gleichung sagt, dass für jede Stelle x die momentane Änderungsrate $f'(x)$ - geometrisch also die Steigung der Tangente an die Lösungskurve - gerade halb so gross ist, wie der Funktionswert $f(x)$ - also der y-Wert - an dieser Stelle.

In der Abbildung sind zwei Lösungskurven mit einigen ihrer Tangentenstücken gezeichnet und zwar

- für die Konstante $C = 1$ die Kurve $f(x) = \mathrm{e}^{0.5x}$.
- für die Konstante $C = 2$ die Kurve $f(x) = 2\mathrm{e}^{0.5x}$.

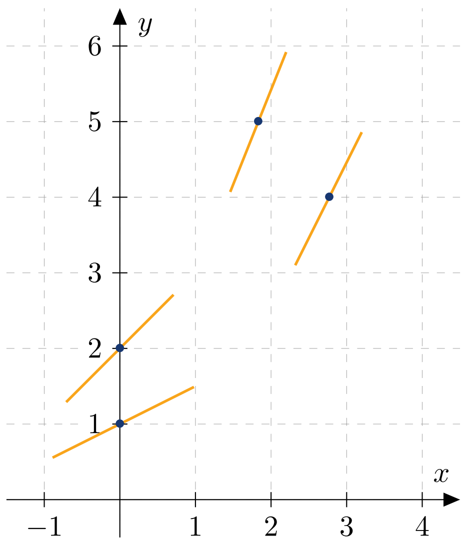
Wenn wir die Steigungen in den einzelnen Punkten betrachten, ist es genau so, wie in der Differentialgleichung verlangt: Sie beträgt in jedem Punkt gerade die Hälfte des y-Wertes in diesem Punkt!

Im Punkt mit der y-Koordinate 4 beträgt die Steigung also $f'(x) = 0.5 \cdot 4 = 2$.

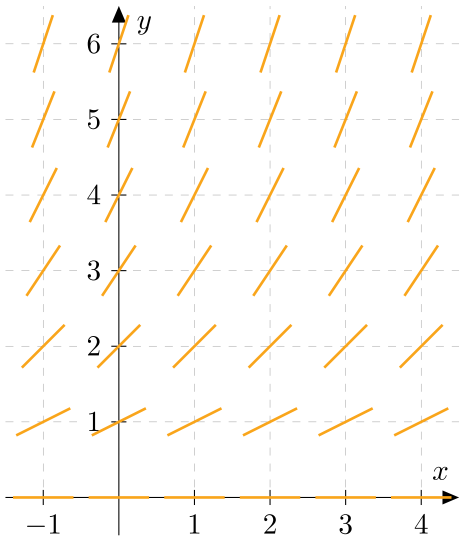


Jetzt ist es nicht mehr weit zum Richtungsfeld.

Wenn wir die eingezeichneten Kurven weglassen und nur die Steigungen stehen lassen, dann ergibt sich folgendes Bild.



Wir können aber solche Tangentenstücke für weitere Punkte einzeichnen: Zum Beispiel hat das Tangentenstück im Punkt (2|3) die Steigung des halben y-Wertes an diesem Punkt, also 1.5.

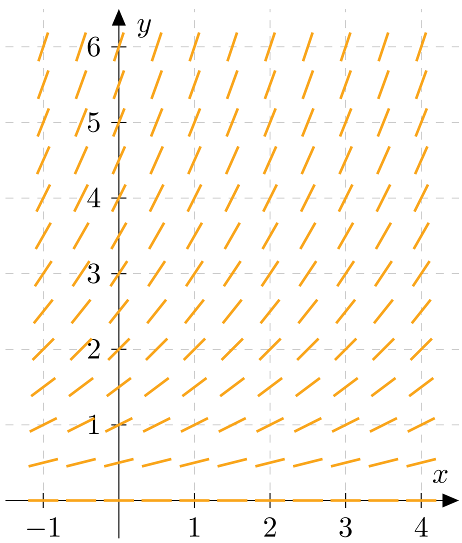


Damit erhalten wir aber umgekehrt bereits einen guten Eindruck vom Verlauf der Lösungskurven. Eine solche Darstellung heisst *Richtungsfeld der Differentialgleichung*.

Jede mögliche Lösungskurve verläuft in jedem Punkt der x-y-Ebene in Richtung des dort eingetragenen Tangentenstücks.

In diesem Beispiel sind die Steigungen auf jeder Horizontalen immer gleich gross. Das ergibt sich aus der zugehörigen Differentialgleichung $f'(x) = 0.5 \cdot f(x)$, denn die Steigung $f'(x)$ hängt nur von $f(x)$ - also vom y-Wert - ab.

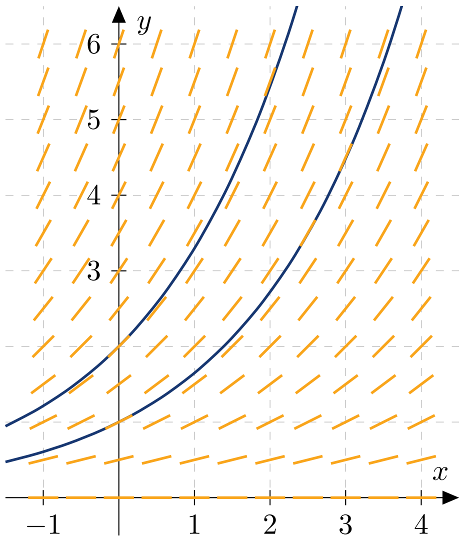
Natürlich können wir dieses Richtungsfeld noch engmaschiger zeichnen.



In einem Richtungsfeld können wir sehen, wie „der Geist der Lösungskurve lauert“ und durch das Festlegen eines „Anfangspunktes“ darauf wartet, sichtbar zu werden.

Um nun graphisch die Lösungskurve zu bestimmen, die durch einen vorgegebenen Punkt P verläuft, gehen wir von diesem Punkt P aus und zeichnen im Richtungsfeld die zugehörige Lösungskurve so ein, dass die Steigung ihrer Tangente in all ihren Punkten mit der Steigung des Tangentenstücks des Richtungsfeldes in den jeweiligen Punkten übereinstimmt.

Die eingezeichneten Kurven passen in unser Richtungsfeld: sie gehen durch die vorgegebenen Punkte $P = (0|2)$ bzw. $Q = (0|1)$.



Zum Einzeichnen einer Lösungskurve können wir bei einem beliebigen Punkt P starten und dann sowohl vorwärts als auch rückwärts in die durch das Richtungsfeld gegebene Richtung gehen. Dabei passen wir die Steigung laufend an.

Merke 6

Mit einem Richtungsfeld kann der Verlauf der Lösungskurven veranschaulicht werden, wobei oft auch qualitative Aussagen über deren Verhalten (beispielsweise über allfällige Asymptoten) möglich sind. Die Lösungskurven liegen so im Richtungsfeld, dass ihre Tangentensteigungen in jedem Punkt mit der Steigung des Tangentenstücks des Richtungsfeldes in diesem Punkt übereinstimmen. Durch das Festlegen eines Anfangspunktes kann in den meisten Fällen die entsprechende Lösungskurve gezeichnet werden. Es ist aber möglich, dass durch einen Punkt mehrere Lösungskurven gehen.

Aufgabe 19 - Richtungsfeld I

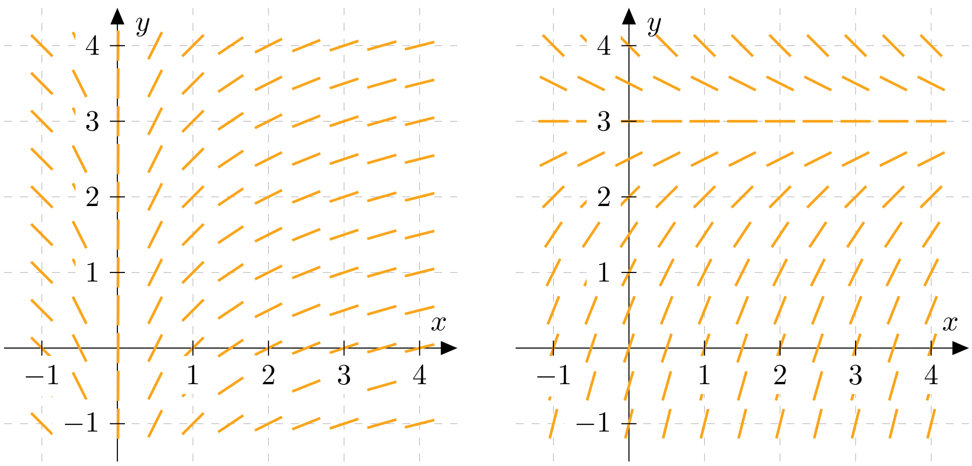
a) Sei $f'(x) = -0.25 \cdot f(x)$.

- Zeichne ein Richtungsfeld im Bereich von $(-2|-2)$ bis $(4|4)$.
- Zeichne die Lösungskurve, welche durch den Punkt $(2|1)$ verläuft.
- Warum sind die Steigungen auf jeder Horizontalen gleich gross?

b) Sei $f'(x) = -0.25 \cdot x$.

- Zeichne ein Richtungsfeld im Bereich von $(-2|-2)$ bis $(4|4)$.
- Zeichne die Lösungskurve, welche durch den Punkt $(4|0)$ verläuft.
- Die rechte Seite der Differentialgleichung hängt nur von der Variable x ab. Wie macht sich dies im Richtungsfeld bemerkbar?

c) Abgebildet sind die Richtungsfelder der Differentialgleichungen $f'(x) = -f(x) + 3$ und $f'(x) = \frac{1}{x}$.



- Welches Feld gehört zu welcher Gleichung?
- Zeichne jeweils die Lösungskurve ein, welche durch den Punkt $(1|0)$ verläuft.
- Zeichne jeweils die Lösungskurve ein, welche durch den Punkt $(0|3)$ verläuft.
- Was denkst du: Besitzen die Kurven Asymptoten? Oder anders gefragt: Lässt sich etwas aussagen über das Langzeitverhalten von y für $x \to \infty$?

Das Richtungsfeld gibt uns also einen Eindruck vom Verlauf der Lösungskurven. Das werden wir nun am Beispiel der logistischen Differentialgleichung

$$P'(t) = a \cdot P(t) \cdot \left(1 - \frac{P(t)}{G}\right)$$

„sehen“.

Aufgabe 20 - Richtungsfeld bei logistischer Kurve

Wir betrachten die logistische Differentialgleichung

$$P'(t) = 0.6 \cdot P(t) \cdot \left(1 - \frac{P(t)}{6}\right).$$

a) Zeichne ein Richtungsfeld im Bereich von $(0|0)$ bis $(10|6)$.

Hinweis: Weil die Gleichung komplizierter ist als die bisherigen, können wir uns die einzelnen Steigungen zuerst in einer Steigungstabelle notieren und zeichnen sie dann ein.

Punkt $(t\|P)$	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$	$t=5$	$t=6$
$P=0$	0	0	0	0	0	0	0
$P=1$	0.5	0.5	...				
$P=2$	0.8	...					
$P=3$	...						
$P=4$							

Die Steigungen bleiben hier auf jeder Zeile (Horizontale!) gleich. Du weisst jetzt auch warum!

b) Zeichne - so gut wie möglich! - die Lösungskurve ein, welche im Punkt $(0|1)$ beginnt.

Hinweis: Ist dir deine Steigungstabelle zu „weitmaschig“, kannst du einzelne Steigungen zusätzlich berechnen.

c) Wie lautet die Asymptote? Begründe mit Hilfe

- des Richtungsfeldes.
- der Gleichung.

d) An welcher Stelle steigt die Kurve am stärksten an? Oder: wann besitzt die Lösung die maximale Wachstumsgeschwindigkeit?

Zum Schluss dieses Abschnittes wenden wir uns noch zwei Beispielen von Differentialgleichungen zu, bei denen auf der rechten Seite auch die Variable x auftritt. Solche Gleichungen haben wir bisher noch nicht angetroffen; sie sind aber nicht weiter aussergewöhnlich.

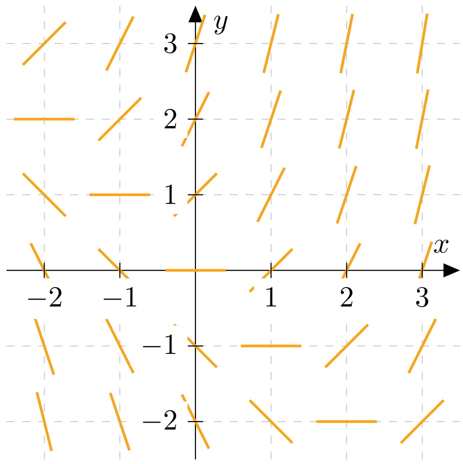
Aufgabe 21 - Richtungsfeld II

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$f'(x) = f(x) + x.$$

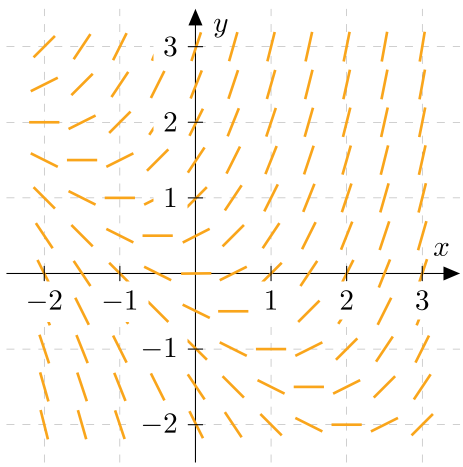
Beachte: Das ist eine Differentialgleichung, für die wir noch keine Lösung kennen. Trotzdem können wir das zugehörige Richtungsfeld zeichnen.

Das Richtungsfeld ist unten gezeichnet.



a) Überprüfe die Richtigkeit der Zeichnung. Berechne dazu die Steigungen an von dir gewählten Punkten und vergleiche.

b) Natürlich könnten wir - mit entsprechendem Aufwand - das Richtungsfeld wiederum engmaschiger zeichnen.



Wir erkennen, dass die Lösungskurven immer deutlicher zu Tage treten...

... und könnten problemlos einen Punkt wählen und die dazugehörige Lösungskurve einzeichnen. Machen wir das!

Zeichne eine Lösungskurve ein, welche durch den Punkt $(2|-1)$ verläuft.

c) Eine spezielle Lösungskurve hat eine besonders einfache Gestalt. Siehst du sie?

Gib ihre Gleichung an und überprüfe durch Einsetzen, dass sie die Differentialgleichung tatsächlich löst!

Aufgabe 22 - Richtungsfeld III (mit Steigungstabelle)

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$f'(x) = -f(x)^2 \cdot x.$$

Im nächsten Abschnitt werden wir oft y anstelle von $f(x)$ schreiben, weil das einfach kürzer und bequemer ist. Die obige Gleichung hat dann die Form

$$y' = -y^2 \cdot x.$$

a) Zeichne ein Richtungsfeld zu $y' = -y^2 \cdot x$. Erstelle dazu zuerst eine Steigungstabelle.

b) Zeichne diejenige Lösungskurve ein, welche durch den Punkt $(2|2)$ verläuft.

Bemerkung - Engmaschige Richtungsfelder lassen sich gut mit dem Computer zeichnen. Näheres findest du in Kapitel 5 - Computer und Experiment.

4.2 Separation der Variablen - analytische Lösung

Mit dem Richtungsfeld können wir uns der Lösung nur zeichnerisch annähern. Die Methode der *Separation der Variablen* hilft uns nun, gewisse Differentialgleichungen analytisch zu lösen: Wir erhalten damit die exakten *Gleichungen* der Lösungsfunktionen!

Zuerst rufen wir uns eine bekannte Integrationsregel in Erinnerung:

$$\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln(|x|) + C \quad (\text{für } x \neq 0).$$

Beachte stets: Diese Gleichung können wir auf zwei Arten lesen:

1) Die Stammfunktionen von $\frac{1}{x}$ sind $\ln(|x|) + C$.

2) Die Ableitung von $\ln(|x|) + C$ ist $\frac{1}{x}$.

Aufgabe 23

a) Begründe mit Hilfe der Kettenregel, dass gilt :

$$\int \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \mathrm{d}x = \ln(|f(x)|) + C \quad (\text{für } f(x) \neq 0).$$

Hinweis: Leite dazu die rechte Seite ab!

b) Integriere! (Man spricht von *logarithmischer Integration*.) Kontrolliere deine Ergebnis durch Ableiten!

- $\int \frac{1}{x+3}\mathrm{d}x$.
- $\int \frac{2}{2x+3}\mathrm{d}x$.
- $\int \frac{1}{2x+3}\mathrm{d}x$. Hinweis: $\int \frac{1}{2x+3}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\frac{1}{x+\frac{3}{2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{1}{x+\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$.

Jetzt sind wir bereit! Wir beginnen wiederum mit dem Beispiel

$$f'(x) = 0.5\cdot f(x)$$

und bestimmen die Funktion $f(x)$. Dazu gehen wir Schritt für Schritt vor:

Schritt 1 - Separation der Variablen (die Namensgebung wird später noch genauer erläutert; wir dividieren durch $f(x)$):

$$\frac{1}{f(x)}f'(x) = 0.5.$$

Schritt 2 - Integration (wir bilden auf beiden Seiten die Stammfunktion):

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{f(x)}f'(x)\mathrm{d}x &= \int 0.5\mathrm{d}x\\ \ln(|f(x)|) + C_1 &= 0.5x + C_2,\end{aligned}$$

wobei wir die beiden Konstanten zu einer Einzigen zusammenfassen: $D = C_2 - C_1$ Das merken wir uns: Es genügt immer, die Konstante auf einer Seite hin zu schreiben:

$$\ln(|f(x)|) = 0.5x + D.$$

Schritt 3 - Auslösen nach $\boldsymbol{f(x)}$ (wir wollen ja die Funktion $f(x)$ finden!):

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\ln(|f(x)|)} &= \mathrm{e}^{0.5x+D}\\ |f(x)| = \mathrm{e}^{0.5x+D} &= \mathrm{e}^{0.5x}\cdot\mathrm{e}^{D}.\end{aligned}$$

Kürzen wir die Konstante e^D durch L ab, erhalten wir:

$$|f(x)| = L\cdot\mathrm{e}^{0.5x}.$$

Jetzt stören nur noch die Betragsstriche. Wir lassen die Betragsstriche weg, wodurch sich höchstens das Vorzeichen ändert, d.h.

$$f(x) = \pm L\cdot\mathrm{e}^{0.5x}.$$

Wir kürzen die Konstante $\pm L$ durch C ab:

$$f(x) = C\cdot\mathrm{e}^{0.5x},$$

et voilà!

Dieses Resultat haben wir früher bereits durch „Raten“ gefunden. Jetzt haben wir aber gerechnet und damit verbindet sich die Hoffnung, auch schwierigere Differentialgleichungen analytisch lösen zu können. Zuvor üben wir die eben vorgestellte Lösungsmethode an Beispielen.

Aufgabe 24 - Differentialgleichung lösen / Separation der Variablen

Löse die folgenden Differentialgleichungen, indem du - langsam! - die oben ausgeführten Schritte durchgehst. Übe dabei auch den sicheren Umgang mit den auftretenden Konstanten.

a) $f'(x) = 3 \cdot f(x)$.

b) $y' = -0.1 \cdot y$.

c) Löse das folgende Beispiel und erkläre, warum diese Methode wohl „Separation der Variablen" heisst:

$$y' = x^2 \cdot y.$$

Unser bisheriger „Erfolg" fusst auf der Lösung von Aufgabe 23 und damit auf der Anwendung der Kettenregel. Die Kettenregel ist der *Schlüssel* für die Separation der Variablen. Wir schauen uns das noch einmal genauer an:

Die *Kettenregel* lautet bekanntlich

$$[g(f(x))]' = \underbrace{g'(f(x))}_{\text{äussere Ableitung}} \cdot \underbrace{f'(x)}_{\text{innere Ableitung}}$$

Die Schreibweise mit $f(x)$ ist ein bisschen schwerfällig. Wir schreiben deswegen y anstelle von $f(x)$ und erhalten:

$$[g(y)]' = \underbrace{g'(y)}_{\text{äussere Ableitung}} \cdot \underbrace{y'}_{\text{innere Ableitung}}$$

Diese Gleichung können wir auf „zwei Arten" lesen, wie folgt:

- Die Ableitung von $g(y)$ ist $g'(y) \cdot y'$.
- Die Stammfunktionen von $g'(y) \cdot y'$ sind $g(y) + C$.

Die Kettenregel liefert also eine Integrationsregel. Es gilt nämlich:

$$\int g'(y) \cdot y' \mathrm{d}x = g(y) + C.$$

Wenn wir uns die linke Seite anschauen, sehen wir, dass da steht:

$$\int \ldots y' \mathrm{d}x = \ldots$$

Diese Form treffen wir hier immer an. Wir lösen nun zwei Beispiele parallel vor. Lies sie langsam durch und mach dir jeden Schritt klar!

Beispiel 1	**Beispiel 2**

Wir betrachten die Differentialgleichung

$y' = 3(y+2)$	$y' = -6x \cdot y^2$

Schritt 1 - Separation der Variablen

$\frac{1}{y+2} \cdot y' = 3$	$\frac{1}{y^2} \cdot y' = -6x$

Schritt 2 - Integration

$\int \frac{1}{y+2} y' \mathrm{d}x = \int 3 \mathrm{d}x$	$\int \frac{1}{y^2} y' \mathrm{d}x = \int -6x \mathrm{d}x$

Die Kettenregel sagt: $\int g'(y) \cdot y' \mathrm{d}x = g(y) + C$. Hier ist

$g'(y) = \frac{1}{y+2}$	$g'(y) = \frac{1}{y^2}$

Wir müssen einzig eine Funktion $g(y)$ so finden, dass die jeweilige Ableitung dem gegebenen Term entspricht!

$g(y) = \ln(\lvert y+2 \rvert) + C$	$g(y) = -\frac{1}{y} + C$

Wir erhalten

$\ln(\lvert y+2 \rvert) + C_1 = 3x + C_2$	$-\frac{1}{y} + C_1 = -3x^2 + C_2$
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
$\ln(\lvert y+2 \rvert) = 3x + D$	$-\frac{1}{y} = -3x^2 + D$

Schritt 3 - Auflösen nach y

$y = C\mathrm{e}^{3x} - 2$	$y = \frac{1}{3x^2 + C}$

Merke 7

Diese oben beschriebene Methode, eine Differentialgleichung analytisch zu lösen, heisst

Separation der Variablen.

Aufgabe 25 - Separation der Variablen

Drei der vier folgenden Differentialgleichungen lassen sich mit der Separation der Variablen lösen, zwei nicht. Löse diejenigen, die möglich sind und sage, warum sich eine nicht mit dieser Methode lösen lässt.

a) $y' = 6x^2 \cdot y$.

b) $y' = (x+1) \cdot y^2$.

c) $y' = x^2 \cdot (y+1)$.

d) $y' = x^2 + y$.

Die Separation der Variablen lässt sich immer nur dann anwenden, wenn die Differentialgleichung die Form

$$y' = \text{„Funktion von } x\text{“} \times \text{„Funktion von } y\text{“ also } y' = h(x) \cdot g(y).$$

besitzt, weil wir dann die Variablen separieren können: Nach Division durch $g(y)$ erscheint y nur noch auf der linken und x nur noch auf der rechten Seite der Gleichung:

$$\frac{y'}{g(y)} = h(x).$$

Aufgabe 26 - Seperation der Variablen II

a) In Aufgabe 25 c) hast du die Differentialgleichung $y' = x^2 \cdot (y+1)$ mit der Separation der Variablen gelöst. Sie ist nämlich von der Form $y' = h(x) \cdot g(y)$ mit $h(x) = x^2$ und $g(y) = y + 1$. Auch die folgende Differentialgleichung ist - wenn auch weniger offensichtlich - von dieser Form:

$$y' = x \cdot y + 3x.$$

Wie lauten hier die Funktion $h(x)$ und $g(y)$? Löse diese Differentialgleichung!

b) Beschreibe dein Vorgehen im allgemeinem Fall $y' = h(x) \cdot g(y)$. Siehst du, welche Probleme auftreten können, wenn wir die Funktion y bestimmen wollen?

Im Folgenden wenden wir uns Differentialgleichungen zu, denen wir schon früher begegnet sind. Die Variable x tritt nicht mehr auf (es liegt also der „Spezialfall“ $h(x) = 1$ vor).

Aufgabe 27 - Lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

Löse die folgenden Differentialgleichungen mit Separation der Variablen.

Hinweis: Aufgabe 23 b)!

a) $y' = y + 5$.

b) $T' = 2T + 3$.

c) $P' = 0.5P + b$.

d) $y' = a \cdot y + b$.

Wir widmen uns nun der logistischen Differentialgleichung

$$P'(t) = a \cdot P(t) \cdot \left(1 - \frac{P(t)}{G}\right) \quad (a > 0).$$

Diese Gleichung haben wir bereits mit dem Richtungsfeld näherungsweise gelöst!

Sie lässt sich aber mit der „Separation der Variablen“ lösen, die Integration ist ein weniger schwieriger als bisher. Du findest die Herleitung auf Seite 63.

Wir geben uns hier mit der Angabe der Lösung zufrieden.

Wir betrachten dazu das folgende, konkrete Beispiel einer logistischen Gleichung:

$$P'(t) = 0.5 \cdot P(t) \cdot \left(1 - \frac{P(t)}{6}\right).$$

Die Lösung lautet

$$P(t) = \frac{6}{1 + C \cdot \mathrm{e}^{-0.5t}}.$$

Siehst du, wo die Parameter $a = 0.5$ und $G = 6$ in der Lösung zum Vorschein kommen? Dann kannst du die folgende Aufgabe lösen!

Aufgabe 28 - Lösung der logistischen Gleichung

a) Wie lautet vermutlich die Lösung der logistischen Gleichung

$$P'(t) = a \cdot P(t) \cdot \left(1 - \frac{P(t)}{G}\right)?$$

b) Überprüfe durch Einsetzen, ob deine in a) gefundene Lösung stimmt.

c) Welchen Grenzwert besitzt $P(t)$ für $t \to +\infty$?

Aufgabe 29

a) Ist der Anfangswert $P(0) = A$ bekannt, dann lässt sich die logistische Wachstumsgleichung in der Form

$$P(t) = \frac{A \cdot G}{A + (G - A) \cdot \mathrm{e}^{-at}}$$

schreiben. Begründe dies!

Hinweis: Löse $P(0) = \frac{G}{1+C\cdot \mathrm{e}^{-a\cdot 0}} = A$ zuerst nach C auf. Ersetze dann C in der Funktionsgleichung und forme um.

b) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$P'(t) = 0.2 \cdot P(t) \cdot \left(1 - \frac{P(t)}{5}\right)$$

mit dem Startwert $(0|1)$.

- Wie lautet $P(t)$?
- Skizziere die Kurve $P(t)$ qualitativ.
- Für welches t gilt $P(t) = 4$?

4.3 Euler-Verfahren - numerische Lösung

Leider lassen sich nur die wenigsten Differentialgleichungen explizit lösen. In vielen Fällen sind wir auf numerische Näherungsmethoden angewiesen. Dabei wird mit dem Computer eine gegebene Differentialgleichung zu einem gegebenen Anfangswert numerisch, d.h. näherungsweise, aber beliebig genau, gelöst: Der Computer sucht im Richtungsfeld die Lösungskurve durch den gegebenen Punkt. Das Euler-Verfahren ist solch eine Methode, mit welcher wir schrittweise eine *Wertetabelle* mit angenäherten Werten der Lösungskurve finden können.

Wir beginnen wiederum mit dem Beispiel

$$f'(x) = 0.5 \cdot f(x).$$

Konkreter können wir uns wieder vorstellen, dass $P(t)$ beispielsweise die Anzahl der Hasen zu einem Zeitpunkt t (t in Monaten) angeben soll, wodurch sich nur der Name der Variable, aber nicht die Differentialgleichung ändert:

$$P'(t) = 0.5 \cdot P(t).$$

Wir geben uns einen Anfangswert vor und nehmen an, dass es zu Beginn 1000 Hasen sind, also $P(0) = 1000$.

Wie berechnen wir jetzt die Anzahl der Hasen nach einem Monat? Ganz einfach:

Hasen nach einem Monat = Hasen zu Beginn (Anfangswert) + Zuwachs in diesem Monat.

Den Zuwachs bzw. die *Änderung* in diesem Monat können wir aber - näherungsweise! - bestimmen. Wie?

Mit Hilfe der Differentialgleichung!

Die Differentialgleichung

$$P'(t) = 0.5 \cdot P(t)$$

sagt uns ja, wie gross die Änderungsrate (Geschwindigkeit, mit der die Hasenschar grösser wird) zu einem beliebigen Zeitpunkt t ist.

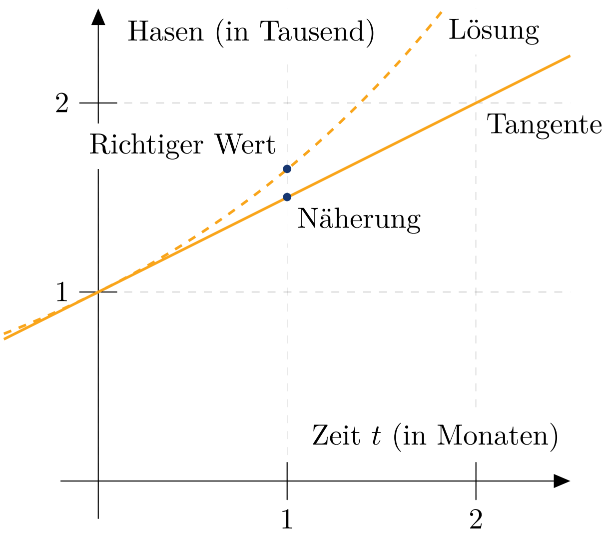
Zu Beginn, also für $t = 0$, sind es 1000 Hasen. Damit gilt für die Änderungsrate zu Beginn:

$$P'(0) = 0.5 \cdot P(0) = 0.5 \cdot 1000 = 500 \frac{\text{Hasen}}{\text{Monat}}.$$

Damit können wir nun die Anzahl Hasen nach einem Monat *näherungsweise* bestimmen:

$$\begin{aligned}\text{Hasen nach einem Monat} =& \text{Anfangswert} + \text{(momentane!) Änderungsrate} \times \text{Monat}\\ =& 1000 + 500 \frac{\text{Hasen}}{\text{Monat}} \times 1 \text{ Monat}\\ =& 1500 \text{ Hasen}\end{aligned}$$

Die Abbildung zeigt uns, was passiert:



Den Wert 1500 erhalten wir, wenn wir uns vom Punkt (0|1000) entlang der Tangente bewegen.

Der Wert 1500 ist dabei nur eine Näherung des richtigen Wertes auf der Lösungskurve. Dies ist darum der Fall, weil wir in der obigen Berechnung angenommen haben, dass die

Änderungsrate in der betrachteten Zeitspanne von einem Monat *konstant* bleibt, obwohl sie sich *kontinuierlich* vergrössert. Die Tangenten an die exakte Lösungskurve weisen ja mit zunehmender Zeit eine immer grösser werdende Steigung auf.

Dazu schreiben wir noch einmal formal auf, wie wir die Anzahl der Hasen nach einem Monat berechnet haben:

$$\begin{aligned}
\text{Anzahl Hasen nach einem Monat} &= \text{Anzahl Hasen zu Beginn} &&+ \text{Änderung in diesem Monat}\\
&= \text{Anfangswert} &&+ \text{Änderungsrate} \times 1 \text{ Monat}\\
&= P(0) &&+ \mathbf{P'(0)} \times 1 \text{ Monat}
\end{aligned}$$

und mit Hilfe der Differentialgleichung:

$$P(1) = P(0) + \mathbf{0.5} \cdot \mathbf{P(0)} \times 1 \text{ Monat.}$$

Wir haben also, um $P(1)$ zu berechnen, nur den Wert $P(0)$ verwendet.

Völlig analog können wir jetzt die Anzahl der Hasen nach zwei Monaten berechnen, wenn wir die Anzahl nach einem Monat kennen!

$$\begin{aligned}
\text{Hasen nach 2 Monaten} &= \text{Hasen nach einem Monat} &&+ \text{Änderung in diesem Monat}\\
P(2) &= P(1) &&+ P'(1) \times 1 \text{ Monat}\\
&= P(1) &&+ 0.5 \cdot P(1) \times 1 \text{ Monat.}
\end{aligned}$$

Mit dieser Vorgehensweise können wir uns hochhangeln, also $P(t)$ von Monat zu Monat angenähert berechnen und damit - mit genügend Ausdauer - die Anzahl der Hasen zu jedem beliebigen Monat näherungsweise berechnen!

Merke 8

Die oben beschriebene Methode, eine Differentialgleichung schrittweise numerisch zu lösen, heisst

Euler-Verfahren.

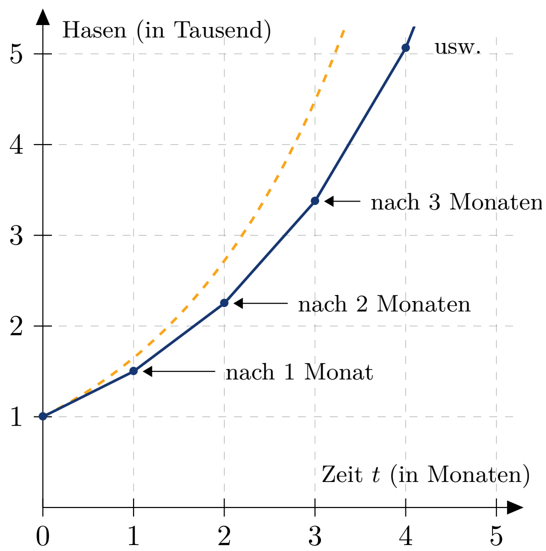
Aufgabe 30 - Anzahl Hasen mit Euler-Verfahren

Die Differentialgleichung $P'(t) = 0.5 \cdot P(t)$ mit den Anfangswerten $P(0) = 1000$ beschreibt das Wachstum einer Hasenpopulation (t in Monaten).

a) Berechne mit dem Euler-Verfahren die angegebenen Werte. Achte auf deine Darstellung. Gehe genau so vor, wie für den ersten „Schritt“ angegeben:

$$\begin{aligned} P(1) &= P(0) + P'(0) \times 1 \text{ Monat} \\ &= P(0) + 0.5 \cdot P(0) \times 1 \text{ Monat} \\ &= 1000 + 0.5 \cdot 1000 \times 1 \\ &= 1500 \\ P(2) &= \ldots \\ P(3) &= \ldots \end{aligned}$$

b) In der Abbildung siehst du die exakte Lösungskurve (gestrichelt) und die Werte, die man über das Euler-Verfahren bekommt. Stimmen deine Werte in a) mit der Abbildung überein?



Die Abbildung zeigt, dass die Strecken während einer Zeitspanne (hier ein Monat), gleich steil bleiben, um sich dann in der nächsten Zeitspanne neu anzupassen. Dies erinnert uns nicht zufällig an das Richtungsfeld, wo es auch galt, die Lösungskurve immer wieder neu zu „orientieren“, d.h. die Steigung der Lösungskurve für jeden Schritt wieder neu vom Richtungsfeld zu übernehmen.

Natürlich können wir die Zeitspanne 1 Monat auch anders wählen, beispielsweise als 1 Woche statt eines ganzen Monats. So können wir das Wachstum der Hasenpopulation von Woche zu Woche verfolgen. Der Einfachheit halber nehmen wir hier an, dass jeder Monat vier Wochen hat.

Nach einer Woche (= 0.25 Monat) sind es

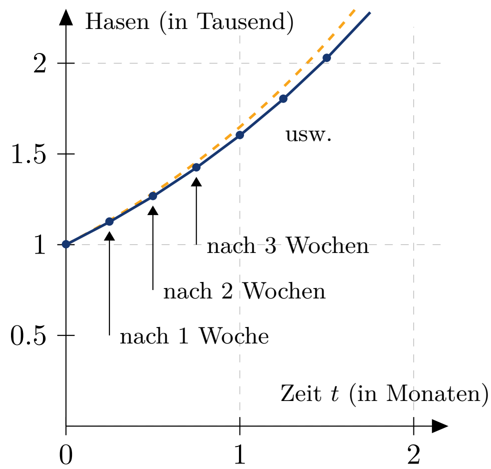
$$\begin{aligned} P(0.25) &= P(0) + P'(0) \times 1 \text{ Woche} \\ &= P(0) + P'(0) \times 0.25 \text{ Monat} \\ &= P(0) + 0.5 \cdot P(0) \times 0.25 \\ &= 1125 \text{ Hasen.} \end{aligned}$$

Aufgabe 31 - Wochenschritte

a) Berechne die Werte von 2, 3 und 4 Wochen mit dem Euler-Verfahren, also

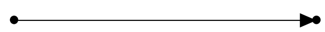
$$\begin{aligned} P(0.5) &= P(0.25) + P'(0.25) \times 1 \text{ Woche} \\ &= \ldots \\ P(0.75) &= \ldots \\ P(1) &= \ldots \end{aligned}$$

b) Der in a) berechnete Wert nach 4 Wochen stimmt nicht mit dem Wert 1500 überein, den wir in der vorangegangenen Aufgabe mit dem „Monatsschritt“ berechnet haben. Warum?

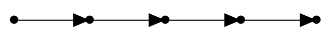


Mit dem Euler-Verfahren begehen wir bei jedem Schritt einen Fehler. Dieser Fehler ist umso kleiner, je kleiner die Zeitspanne Δt ist. Je kleiner wir aber die Zeitspanne Δt wählen, umso mehr Schritte müssen wir machen, um zum selben Ziel zu gelangen.

1 grosser Schritt erzeugt 1 grossen Fehler



4 kleine Schritte erzeugen 4 kleinere Fehler



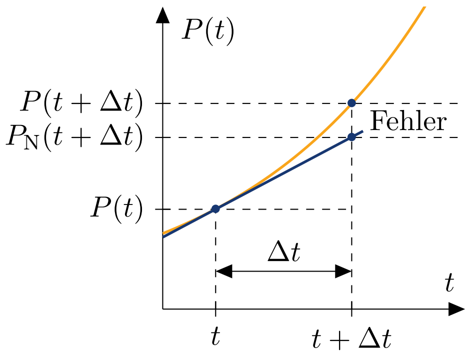
Was ist nun besser? Viele kleine Schritte mit vielen kleinen Fehlern oder wenige grosse Schritte mit wenigen grossen Fehlern?

Es lässt sich allgemein zeigen, was du vielleicht vermutest: kleine Schritte erzeugen in der Summe den kleineren Fehler. Dies bezahlt man allerdings mit dem rechnerischen Aufwand, den viele kleine Schritte mit sich bringen.

Ganz unabhängig, welche Schrittweite wir wählen, das Prinzip bleibt immer gleich:

$$\begin{aligned} \text{Neuer Wert} &= \text{momentaner Wert} && + \text{(momentane!) Änderungsrate} \times \text{verstrichene Zeit} \\ P_{\mathrm{N}}(t + \Delta t) &= P(t) && + P'(t) \cdot \Delta t, \end{aligned}$$

dabei ist $P_{\mathrm{N}}(t + \Delta t)$ der Näherungswert, mit welchem wir anschliessend beim nächsten Schritt weiter rechnen. Die momentane Änderungsrate bestimmen wir bei jedem Schritt mit Hilfe der Differentialgleichung von neuem. Der richtige Wert $P(t + \Delta t)$ stimmt mit dem Näherungswert nicht überein: Er weicht um den Fehler $P(t + \Delta t) - P_{\mathrm{N}}(t + \Delta t)$ von diesem ab, wie dies für den ersten Schritt des Euler-Verfahrens in der folgenden Skizze dargestellt ist. Entsprechend kommen zusätzliche Fehler bei jedem weiteren Schritt hinzu, die sich kumulieren.



Wir üben nun das Euler-Verfahren. Die folgenden beiden Aufgaben beinhalten Beispiele, die uns bereits bekannt sind.

Aufgabe 32 - Euler-Verfahren bei Newtons Gesetz

a) Wir untersuchen die Differentialgleichung $T'(t) = -0.5\,(T(t) - 4)$ mit dem Startwert $(0|0)$. Berechne mit dem Euler-Verfahren näherungsweise die Werte von $P(t)$ im Bereich $0 \le t \le 5$ mit der Schrittweite $\Delta t = 1$. Achte, wie immer auf eine systematische Darstellung!

$$\begin{aligned} T(0) &= 0, \quad & T(1) &= \ldots, \quad & T(2) &= \ldots, \\ T(3) &= \ldots, \quad & T(4) &= \ldots, \quad & T(5) &= \ldots \end{aligned}$$

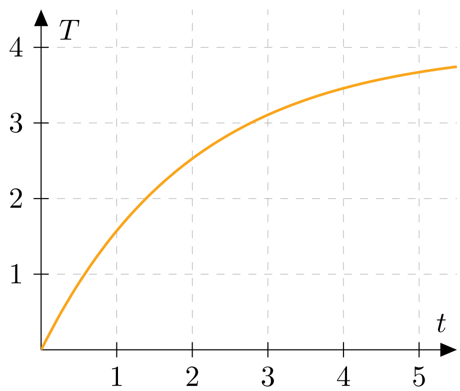
b) Du kennst bereits die exakte Lösung dieser Differentialgleichung. Sie lautet:

$$T(t) = -4 \cdot \mathrm{e}^{-0.5t} + 4.$$

Die Kurve ist in der Abbildung eingezeichnet.

Trage die Werte, die du in a) über das Euler-Verfahren erhalten hast, in die Graphik als Streckenzug ein.

Vergleiche mit der eingezeichneten (exakten) Lösungskurve.



Aufgabe 33 - Euler-Verfahren bei einer logistischen Kurve

Wir untersuchen die Differentialgleichung

$$P'(t) = P(t) \cdot \left(1 - \frac{P(t)}{5}\right)$$

mit dem Startwert $(0|1)$.

a) Berechne mit dem Euler-Verfahren näherungsweise die Werte von $P(t)$ im Bereich $0 \leq t \leq 2$ mit der Schrittweite $\Delta t = 0.5$.

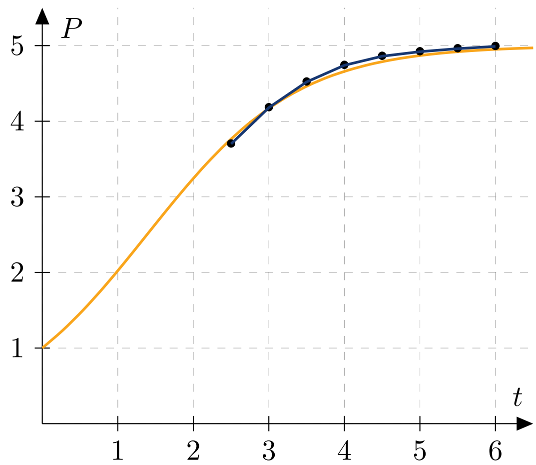
b) Du kennst bereits die exakte Lösung dieser Differentialgleichung. Sie lautet:

$$T(t) = \frac{5}{1 + 4 \cdot \mathrm{e}^{-t}}.$$

Die Kurve ist in der Abbildung dargestellt.

Trage die Werte, die du in a) über das Euler-Verfahren erhalten hast, in die Graphik als Streckenzug ein.

(Die „Euler-Punkte“ im Bereich $2,5 \leq t \leq 6$ sind bereits eingezeichnet.)



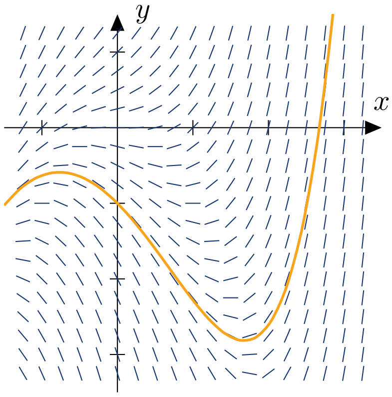
Die folgende Aufgabe zeigt ein Beispiel, das wir nicht mit der Separation der Variablen lösen können (vgl. Aufgabe 25 d)). Aber für uns ist das kein Problem mehr. Wir verfügen jetzt über das *Euler-Verfahren*!

Aufgabe 34 - Euler-Verfahren bei $y' = x^2 + y$

Wir untersuchen die Differentialgleichung $y' = x^2 + y$ mit dem Startwert $(0| - 1)$.

a) Berechne mit dem Euler-Verfahren näherungsweise die Werte von y im Bereich $0 \leq x \leq 2$ mit der Schrittweite $\Delta x = 0.5$.

b) In der Abbildung ist das zugehörige Richtungsfeld und die Lösungskurve durch den Startwert $(0|-1)$ gezeichnet.



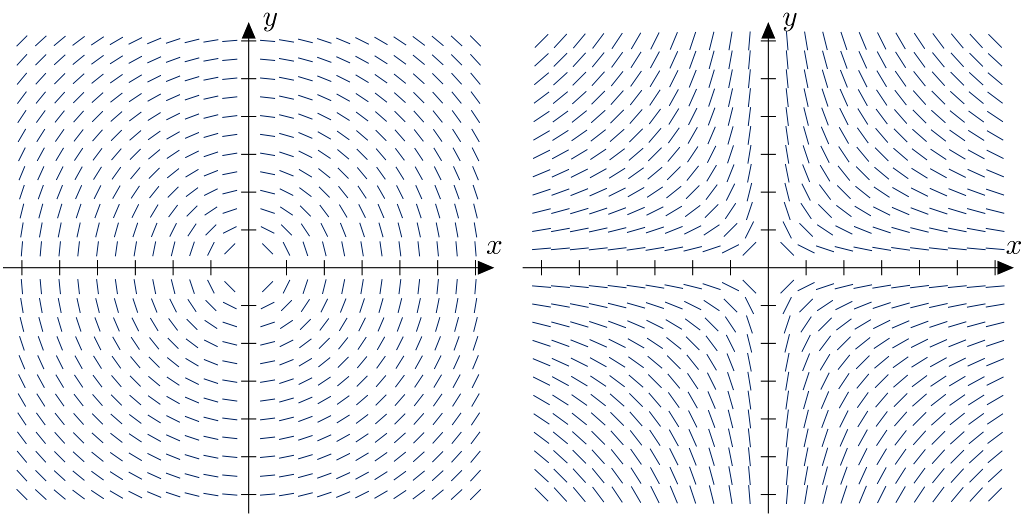
Schätze ab, ob deine in a) berechneten Werte stimmen können.

Aufgabe 35 - Verschiedene Lösungsmethoden

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

a) Entscheide, welches der beiden Richtungsfelder zur Gleichung gehört.



Du „siehst“: Das Richtungsfeld gibt uns schon einen guten Eindruck von einem möglichen Verlauf der Lösungskurven. Hast du bereits eine Vermutung?

b) Als Startwert nehmen wir den Punkt $(3|4)$. Berechne mit dem Euler-Verfahren den Wert y für $(4|y)$. Wähle als Schrittweite $\Delta x = 0.25$.

c) Lässt sich die vorliegende Differentialgleichung mit der Separation der Variablen exakt lösen?

- Wenn ja, bestimme die Lösung!
- Wenn nein, erkläre warum!

d) Zum Euler-Verfahren:

- Wie gross ist die Abweichung des in b) mit dem Euler-Verfahren berechneten Wertes vom exakten Wert? Wie könnten wir die Abweichung verringern?
- In b) haben wir den Startwert $(3|4)$ gewählt. Was passiert, wenn wir den Startwert $(5|0)$ wählen? Gibt es andere Startwerte, die dem Euler-Verfahren auch Probleme bereiten?

e) Interpretiere die Lösung dieser Differentialgleichung geometrisch.

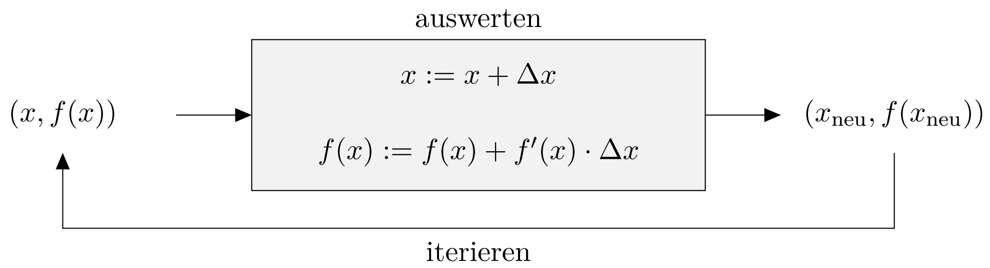
Bemerkung - Das Euler-Verfahren ist eine exakte Handlungsweise, die gut von einem Tabellenkalkulationsprogramm ausgeführt werden kann.

Algorithmus

1) Setze den Startpunkt $(x|f(x))$.

2) Schleife:

- Bewege dich zum Punkt $(x + \Delta x|f(x) + f'(x) \cdot \Delta x)$.
- Mache den neuen Punkt zum alten Punkt.



Näheres findest du in Kapitel 5.

4.4 Rückblick

- In diesem Kapitel haben wir **drei verschiedene Vorgehensweisen** kennengelernt:
  - eine graphische: das Richtungsfeld.
  - eine analytische: die Separation der Variablen.
  - eine numerische: das Euler-Verfahren.

- Mit dem **Richtungsfeld** verschaffen wir uns einen Überblick über den Verlauf der Lösungskurven einer Differentialgleichung. Das Richtungsfeld stellt in ausgewählten Gitterpunkten mit einem Tangentenstück die dortige Steigung der Lösungskurve dar. Ausgehend von einem gegebenen Punkt zeichnet man die Lösungskurve durch diesen Punkt, indem man die Steigung so gut wie möglich laufend dem Richtungsfeld anpasst. Dabei lässt sich gut sehen, was wir bereits wissen: Die Lösung einer Differentialgleichung besteht aus (unendlich) vielen Funktionen. Wählen wir einen Anfangspunkt $(x|y)$, dann gibt es in den meisten Fällen genau eine Lösungskurve, die durch diesen Punkt verläuft.

  „Einfache Richtungsfelder“ zeichnen wir von Hand oder mit einer Steigungstabelle. Für schwierigere oder engmaschigere Richtungsfelder können wir einen Computer verwenden.

- Die Methode der **Separation der Variablen** hilft uns, gewisse Differentialgleichungen analytisch zu lösen, indem wir die Funktionsgleichung bestimmen. Die Separation der Variablen lässt sich anwenden, wenn die Differentialgleichung auf die Form

$$y' = h(x) \cdot g(y)$$

  gebracht werden kann. Wir gehen dann in drei Schritten vor:

  1) Separation der Variablen durch Division der Gleichung von $g(y)$: y kommt nur noch auf der linken und x nur noch auf der reichen Seite vor.

  2) Integration beider Seiten.

  3) Auflösen der gefundenen Gleichung nach y.

- Mit dem **Euler-Verfahren** bestimmen wir die Lösung einer Differentialgleichung für einen gegebenen Anfangswert indem wir eine Wertetabelle der Lösungskurve näherungsweise berechnen. Ist für ein bestimmtes x ein Anfangswert $y(x)$ bekannt, können wir mit der Formel

$$y(x + \Delta x) = y(x) + y'(x) \cdot \Delta x$$

  von $y(x)$ ausgehend, den nächsten Wert $y(x + \Delta x)$ näherungsweise berechnen. Dieser Wert ist umso genauer, je kleiner Δx ist. Im Prinzip kann die exakte Lösung durch das Euler-Verfahren beliebig genau approximiert werden. Bei kleinen Δx erhöht sich aber der Rechenaufwand, weil dann viele einzelne Berechnungen durchgeführt werden müssen. Um numerische Verfahren sinnvoll einzusetzen, ist es unumgänglich, mit einem Computer zu arbeiten. Es gibt Differentialgleichungen, die nicht exakt durch eine Formel gelöst werden können. In solchen Fällen helfen numerische Verfahren.

KAPITEL 5

Computer und Experiment

Das Motto dieses Kapitel lautet: Experimentiere! Am Computer oder ganz real.

5.1 Computer

Der Computer kann Berechnungen, die von Hand viel zu aufwändig wären, in kurzer Zeit ausführen und die entstehenden Resultate visualisieren. Vielleicht kennst du bereits das Computerprogramm GeoGebra. Mit GeoGebra kannst du problemlos Richtungsfelder zeichnen und das Euler-Verfahren durchführen.

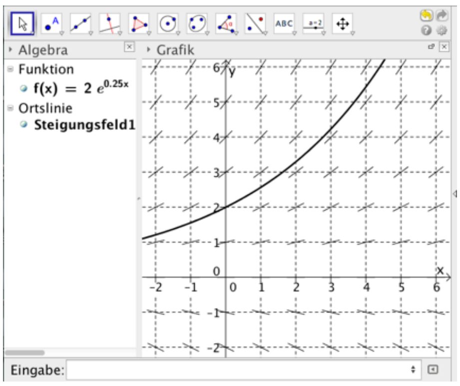
5.1.1 Richtungsfeld

Mit GeoGebra kannst du *Richtungsfelder* zeichnen.

Der Befehl um z.B. das Richtungsfeld der Differentialgleichung

$$y' = x(y - 2)$$

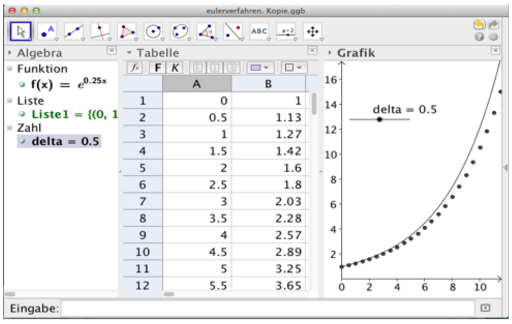
zu erzeugen lautet `Richtungsfeld[x(y-2)]`. Natürlich lässt sich die Anzahl Tangentenstücke, deren Länge etc. nach eigenen Wünschen einstellen oder eine Lösungskurve durch einen festgelegten Punkt zu "ziehen". Probiere es aus!

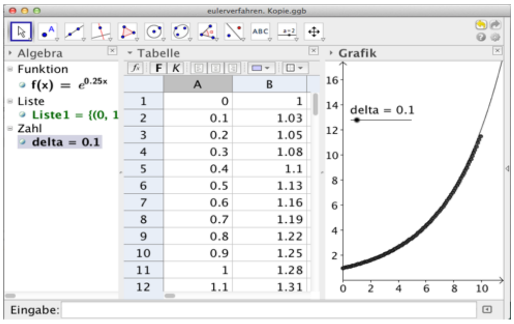


Die obige Abbildung zeigt das Richtungsfeld von $y' = 0.25y$. Zusätzlich ist die Lösung $y = 2\mathrm{e}^{0.25x}$ durch den Punkt $(0|2)$ dargestellt.

5.1.2 Euler-Verfahren

Das Euler-Verfahren lässt sich mit der Tabellenkalkulation von GeoGebra durchführen.





In der Abbildung ist die Schrittweite über einen Schieberegler `delta` so gesteuert, dass sie beliebig variiert werden kann. Du siehst sehr gut: Je kleiner delta ist, umso kleiner ist der Fehler!

Aufgabe 36 - Logistisches Modell

Die logistische Differentialgleichung lautet:

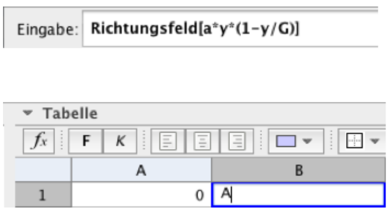
$$P' = a \cdot P \cdot \left(1 - \frac{P}{G}\right) \quad (a > 0).$$

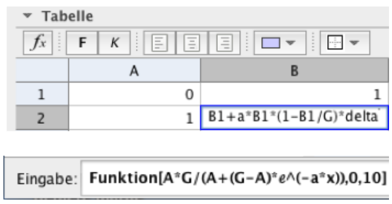
Lege als Schieberegler fest:

- Faktor a
- Grenze G
- Anfangswert A (zu $t = 0$)
- `delta`

a) Zeichne ein Richtungsfeld.

b) Führe das Euler-Verfahren durch. Lege dazu eine Tabelle (100 Werte) an und stelle sie als Liste von Punkten dar. **Hinweis:** Zelle $\texttt{A2} = \texttt{A1} + \texttt{delta}$ und $\texttt{B2} = \texttt{B1} + a \cdot \texttt{B1} \cdot (1 - \frac{\texttt{B1}}{G}) \cdot \texttt{delta}$ (vgl. Abbildung).



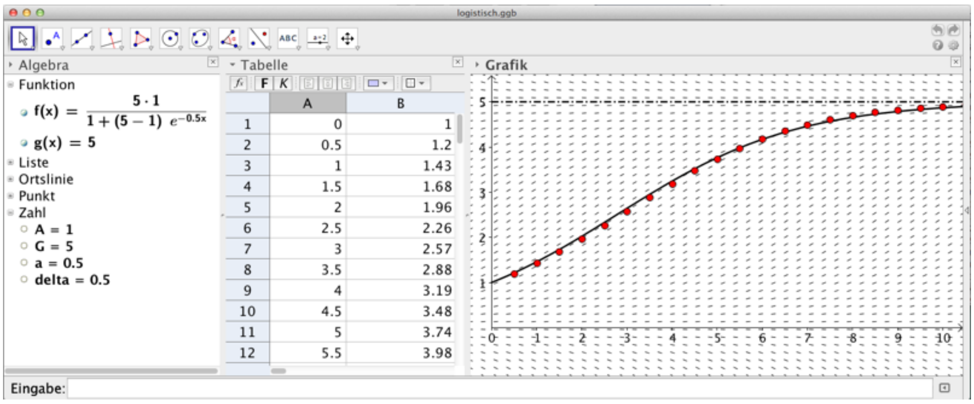


c) Plotte die Lösungskurve $P(x) = \frac{A \cdot G}{A + (G-A) \cdot \mathrm{e}^{-ax}}$.

d) Stelle alles geeignet und schön(!) dar, indem du entsprechende Einstellungen wählst.

e) Variiere die Schieberegler. Beobachte! Experimentiere!

Unser Bild sieht so aus. Und deines?



5.2 Experiment

5.2.1 Experiment: Modell des Bierschaum-Zerfalls

Der Bierschaum gibt dem Bier nicht nur sein typisches Aussehen, sondern wirkt sich auch positiv auf den Genuss des Bieres aus, denn der Bierschaum trägt unter anderem dazu bei, dass sich das Bier langsamer erwärmt und die Kohlensäure am Austreten gehindert wird. Anhand der Bierschaumqualität lässt sich auch erkennen, ob qualitativ hochwertige Zutaten verwendet wurden. Der Bierschaum „zerfällt“ aber nach dem Einschenken des Bieres...

Wie schnell zerfällt Bierschaum oder:
wie viel Zeit kann man sich beim Trinken lassen?

Bei einem Experiment musst du **sorgfältig** arbeiten und am besten in einer **Gruppe**. Lies zuerst den ganzen Text durch.

Materialien

- Gefäss mit konstantem Querschnitt, z.B. Zylinder
- Messinstrumente (Lineal, Stoppuhr)
- Bier
- Heft, Schreibzeug

Wenn du dein eigenes Material mitbringst und dafür Verantwortung trägst, dass das Experiment durchgeführt werden kann, hast du mehr Freude am Experiment und es bleibt dir besser im Gedächtnis.

Durchführung

- in deinem Heft eine genügend grosse Tabelle vorbereiten, wie folgt:

Zeit t in s	Schaumhöhe $h(t)$ in cm	Schaumhöhenänderung $\Delta h = h(t+\Delta t) - h(t)$	Zeitdifferenz Δt	Zerfallsgeschwindigkeit $h'(t) \approx \Delta h/\Delta t$	Proportionalitätsfaktor $a = h'(t)/h(t)$
0	...	...	30	...	...
30			30		
60			30		
90			30		
...			...		

- Bier so in das Gefäss giessen, dass sich viel (aber nicht zu viel!) Schaum bildet
- ein wenig warten, bis der Zerfall einsetzt
- alle *30 Sekunden* die Höhe h des Bierschaumes messen (nur die Schaumhöhe messen, die Flüssigkeit unten gehört nicht dazu!)
- mindestens 12 Messungen vornehmen

Während des Experimentes trägst du in die graue Spalte deine Messwerte ein. Die restlichen Spalten werden später ausgefüllt.

Auswertung

- Übertrage deine Messungen in ein Koordinatensystem. Vielleicht hast du bereits eine Vermutung, nach welchem „Gesetz“ der Bierschaum zerfällt.
- Vervollständige in der Tabelle die restlichen Spalten.

Das Experiment zeigt dir: die Zerfallsgeschwindigkeit h' nimmt mit der Zeit ab. Dies ist im Grund genommen leicht einsichtig: wenn viel Bierschaum vorhanden ist, zerfällt auch mehr Bierschaum, als wenn wenig vorhanden ist.

Mathematisch ausgedrückt: die Zerfallsgeschwindigkeit ist abhängig von der vorhandenen Schaumhöhe (bzw. -menge). Wie du weisst, lautet das einfachste Modell dazu: $h'(t) = a \cdot h(t)$.

- Ist der Ansatz: $h'(t) = -a \cdot h(t)$ gerechtfertigt?

  Dies ist dann der Fall, wenn in der letzten Spalte der Proportionalitätsfaktor $a = \frac{h'(t)}{h(t)}$, zumindest näherungsweise, für alle deine Messungen immer denselben Wert ergibt. Dies sollte der Fall sein!

  Um einen möglichst „genauen“ Faktor a zu erhalten kannst du die einzelnen Werte „mitteln“.

- Löse die Differentialgleichung! (Beachte: den „Anfangswert“ kennst du!)
- Zeichne den Graphen der Lösungsfunktion in dein Koordinatensystem. Passt er zu den gemessenen Werten? Was könnten Gründe für mögliche Abweichungen sein? (vergleiche mit den Bemerkungen unten)

- Kenner behaupten, dass der Schaum eines guten Bieres eine Halbwertszeit von (mindestens) 110 Sekunden hat. Ist dies bei deinem Bier der Fall?

Bemerkungen

- Oben wurde das Modell
$$h'(t) = -a \cdot h(t)$$
gewählt. Wäre auch das modifizierte Modell
$$h'(t) = -a \cdot (h(t))^2$$
tauglich? Diese Gleichung lässt sich auch mit Hilfe der Separation der Variablen lösen. Ergibt sich eine bessere Anpassung an die erhobenen Daten?

- Zum „Bierschaumexperiment“ findet sich ganz viel im Internet!

5.2.2 Experiment: Modell des Wasserausflusses bei einer PET-Flasche

Wer beobachtet, wie viel Wasser aus einem Behälter ausfliesst, stellt fest, dass dies zuerst schell und dann - mit sinkendem Wasserspiegel - immer langsamer passiert. Das wollen wir genauer wissen!

Welche Funktion $h(t)$ beschreibt das Absinken des Wasserspiegels während der Entleerung?

Bei einem Experiment musst du **sorgfältig** arbeiten und am besten in einer **Gruppe**. Lies zuerst den ganzen Text durch.

Materialien

- Leere 1.5 Liter PET-Flasche
- Messinstrumente (Lineal, Stoppuhr). Praktischer Hinweis: Eventuell einen Streifen Milimeterpapier auf die Flasche kleben
- Werkzeug, um in die PET-Flasche ein Loch zu bohren. Praktischer Hinweis: Eventuell das Loch mit einem erhitztem Nagel bohren
- Heft, Schreibzeug

Wenn du eigenes Material mitbringst und dafür die Verantwortung trägst, dass das Experiment durchgeführt werden kann, hast du mehr Freude am Experiment und es bleibt dir besser im Gedächtnis.

Durchführung

- Loch mit ca. 3 mm Durchmesser in den unteren Teil der PET-Flasche bohren (das Loch soll unten am zylinderförmingen Teil der Flasche sein, bevor sich die Flasche wieder verengt)
- Ca. 1 Liter Wasser in die Flasche giessen

- alle *10 Sekunden* die Höhe h des Wasserspiegels messen
- mindestens 12 Messungen vornehmen
- in deinem Heft eine genügend grosse Tabelle vorbereiten, wie folgt

Zeit t in s	Höhe $h(t)$ in cm	Höhenänderung $\Delta h = h(t{+}\Delta t){-}h(t)$	Zeitdifferenz Δt	Sinkgeschwindigkeit $h'(t) \approx \Delta h/\Delta t$	Proportionalitätsfaktor $a = h'(t)/h(t)$
0	...	...	10	...	...
10			10		
20			10		
30			10		
...			...		

Während des Experiments trägst du in die graue Spalte deine Messwerte ein. Die restlichen Spalten werden später ausgefüllt.

Auswertung

- Übertrage deine Messungen in ein Koordinatensystem. Vielleicht hast du bereits eine Vermutung, nach welchem „Gesetz“ der Wasserspiegel absinkt.
- Vervollständige in der Tabelle die rechten Spalten.
- Das Experiment zeigt dir: die Sinkgeschwindigkeit h' nimmt ab. Was könnte ein Grund dafür sein?

Mathematisch ausgedrückt: die Sinkgeschwindigkeit ist abhängig von der Wasserhöhe. Wie du weisst, lautet das einfachste Modell dazu: $h'(t) = -a \cdot h(t)$.

- Ist der Ansatz: $h'(t) = -a \cdot h(t)$ gerechtfertigt?

  Dies ist dann der Fall, wenn in der letzten Spalte der Proportionalitätsfaktor $a = \frac{h'(t)}{h(t)}$, zumindest näherungsweise, für alle deine Messungen immer denselben Wert ergibt. Dies schien hier aber nicht der Fall zu sein...

Die Messergebnisse und theoretische Überlegungen (vergleiche Bemerkungen) zeigen, dass das Modell

$$h'(t) = -a \cdot \sqrt{h(t)}$$

den Prozess des Absinkens besser beschreibt.

- Ist der Ansatz: $h'(t) = -a \cdot \sqrt{h(t)}$ gerechtfertigt?

  Dies ist dann der Fall, wenn in der letzten Spalte der Proportionalitätsfaktor $a = \frac{h'(t)}{\sqrt{h(t)}}$, zumindest näherungsweise, für alle deine Messungen immer denselben Wert ergibt. Dies sollte der Fall sein!

  Um einen möglichst „genauen“ Faktor zu erhalten, kannst du die einzelnen Werte „mitteln“.

- Löse die Differentialgleichung! (Beachte: den „Anfangswert“ kennst du!)
- Zeichne den Graphen der Lösungsfunktion in dein Koordinatensystem. Passt er zu den gemessenen Werten? Was könnte der Grund für mögliche Abweichungen sein? (Vergleiche dazu auch die Bemerkungen unten)

Bemerkungen

- Vergleicht man die Lösung $h(t)$ mit den tatsächlichen Messwerten stellt man eine gute Übereinstimmung nur für nicht zu kleine Werte von $h(t)$ fest. Tatsächlich spielen für kleine Werte von $h(t)$ weitere Effekte eine Rolle, die wir bei unserem Ansatz vernachlässigt haben.
- Wir wollen noch die oben angegebene Differentialgleichung für die gesuchte Funktion $h(t)$ begründen. Die Herleitung beruht auf zwei Grundprinzipien der Physik, nämlich auf der *Energieerhaltung* und der *Massenerhaltung*.

  Den Energieerhaltungssatz kennst du aus der Physik:

  $$m \cdot g \cdot h(t) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v(t)^2.$$

  In unserem Beispiel ist $h(t)$ der Pegelstand und $v(t)$ die Geschwindigkeit, mit der das Wasser ausströmt. Diese Gleichung lösen wir nach $v(t)$ auf und erhalten

  $$v(t) = \sqrt{2 \cdot g \cdot h(t)} \tag{$*$}$$

  Der Massenerhaltungssatz meint in unserem Beispiel, dass das Volumen an Wasser, welches im Gefäss „verschwindet“, gerade dem Volumen an Wasser entspricht, das unten ausströmt. Ist Q der Querschnitt des Gefässes und q der Querschnitt der Öffnung, dann ergibt sich für eine Zeitspanne Δt:

  $$\begin{aligned} \text{Volumen „oben“} &= \text{Volumen „unten“} \\ Q \cdot (h(t) - h(t + \Delta t)) &= q \cdot v_{\text{mittel}} \cdot \Delta t \\ Q \cdot (h(t) - h(t + \Delta t)) &= q \cdot \frac{v(t) + v(t + \Delta t)}{2} \cdot \Delta t \qquad (**) \end{aligned}$$

  Kannst du mit ($*$) und ($**$) und für $\Delta t \to 0$ die Differentialgleichung herleiten?

5.2.3 Gedanken zur Modellierung in der Mathematik

Die Mathematik versucht verschiedene Prozesse zu untersuchen.

Weichen die mathematischen Ergebnisse zu stark von der Messung in der Realität ab, muss ein neues, besseres Modell - basierend auf anderen Annahmen - aufgestellt werden! Allerdings muss eine quantitative Anpassung an die Realität nicht in jedem Fall sinnvoll sein - auch Messungen können fehlerhaft sein.

Bedenke: Ein Modell entspricht nie ganz der Realität, es gibt nur Modelle, die es besser machen als andere.

Modelle können helfen, *die Prozesse selbst* besser zu verstehen.

Beim Modellieren gehen wir - natürlich (!) - von der Annahme aus, dass der Natur überhaupt eine gewisse Regelmässigkeit zu Grunde liegt. Diese Annahme wird gestützt durch ein Zitat von Galileo Galilei:

„Die Natur ist in der Sprache der Mathematik geschrieben.“

Lösungen der Aufgaben

Aufgabe 1.

a) $T(5) = 12.3\,°\text{C}$; die (momentane) Temperatur des Joghurts nach 5 Minuten. $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{T(20)-T(5)}{20-5} = 0.66\,°\text{C/min}$; um wie viel die Temperatur im Mittel im Zeitintervall $[5, 20]$ steigt $T'(t) = 1.27\,°\text{C/min}$; um wie viel die Temperatur momentan im Zeitpunkt $t = 5$ steigt $\lim_{\Delta\to\infty} T(t) = 25\,°\text{C}$; die Temperatur nähert sich immer mehr (der Umgebungstemperatur) $25\,°\text{C}$ an.

b) $T(t) = 15 - 15 \cdot \mathrm{e}^{-0.2\cdot t}$.

Aufgabe 2.

a) $f(t) = \frac{2}{3}t^3 - 0.5\,t^2 + t + C$.

b) $f(t) = \frac{2}{3}t^3 - 0.5\,t^2 + t + 3$.

Aufgabe 3.

Der rechte Graph.

Aufgabe 4.

$a \approx 0.7$.

Aufgabe 5.

a) Linke und rechte Seite ergeben $C \cdot a\,e^{a\,x}$. Die Funktionen $f(x) = C \cdot \mathrm{e}^{a\,x}$ sind Lösungen der Gleichung.

b) Linke Seite: $a\,\mathrm{e}^{a\,x}$; rechte Seite $a(\mathrm{e}^{a\,x} + C)$; die beiden Seiten sind nicht gleich (ausser für $C = 0$). Die Funktionen $f(x) = \mathrm{e}^{a\,x} + C$ sind keine Lösungen der Gleichung.

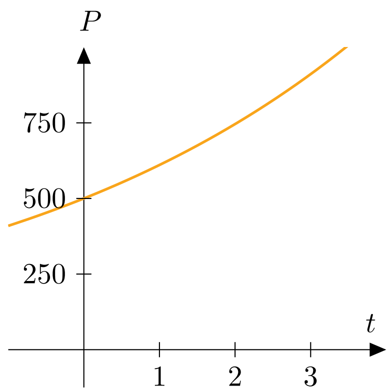
Aufgabe 6.

a) $P'(t) = 0.2 \cdot P(t)$,

b) $P(t) = C\,\mathrm{e}^{0.2\,t}$,

c) $P(0) = C \cdot \mathrm{e}^0 = C = 500$; also ist $P(t) = 500\,\mathrm{e}^{0.2\,t}$,

d) Siehe Abbildung



e) ca. 910 Fische; ca. 9 Jahre,

f) Die Wachtumsgeschwindigkeit P' ist proportional zur Grösse der Population P. Die Lösungen haben die Form $P(t) = C\,\mathrm{e}^{a\,x}$. C ist der Anfangswert, a der Proportionalitätsfaktor.

Aufgabe 7.

Annahme: $g(x)$ ist ebenfalls eine Lösung. Dann gilt $g'(x) = a\,g(x)$. Damit folgt für die Funktion $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ mit Hilfe der Quotientenregel, dass

$$h'(x) = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{(f(x))^2} = \frac{a \cdot g(x)f(x) - g(x) \cdot a \cdot f(x)}{(f(x))^2} = 0$$

gelten muss. Damit gilt: $h(x)$ is konstant, also $\frac{g(x)}{f(x)} = k$. Somit ist $g(x) = k \cdot f(x) = k \cdot C\,\mathrm{e}^{a\,x} = C'\,\mathrm{e}^{a\,x}$, wobei wir C' also $k \cdot C$ auffassen können. Die Funktion $g(x)$ besitzt also auch diese „Form“ und damit folgt die Behauptung.

Aufgabe 8.

a) Der rechte Graph.

b) a ist abhängig von der Zuflussmenge bzw. Abflussmenge des Wassers.

c) $Q(t) = C\,\mathrm{e}^{-0.05\,t}$.

d) $Q(t) = 12\,\mathrm{e}^{-0.05\,t}$, wobei Q in kg und t in Tagen angegeben ist.

e) ca. 14 Tage.

f) Die Geschwindigkeit Q', mit der die Verschmutzung abnimmt, ist proportional zur Grösse der Verschmutzung Q. Die Lösungen haben die Form $Q(t) = C\,\mathrm{e}^{-a\,x}$, wobei C der Anfangswert und a der Proportionalitätsfaktor ist.

Aufgabe 9.

Der linke Graph; je kühler der Kaffee ist, um so weniger schnell nimmt seine Temperatur ab.

Aufgabe 10.

a) $T'(t) = -a\,(T(t) - 15)$.

b) a ist grösser beim linken Graphen.

Aufgabe 11.

Linke Seite: $T'(t) = -a\,C\,\mathrm{e}^{-a\,t}$; rechte Seite $-a \cdot (T(t) - U) = -a\,\left(C \cdot \mathrm{e}^{-a\,t} + U - U\right) = -a\,C\,\mathrm{e}^{-a\,t}$. Daraus folgt, dass $T(t) = C\,\mathrm{e}^{-a\,t}{+}U$ die Differentialgleichung $T'(t) = -a\,(T(t) - U)$ löst.

Aufgabe 12.

a) $T'(t) = -0.2 \cdot (T(t) - 20)$.

b) $T(t) = C\,\mathrm{e}^{-0.2\,t} + 20$, wobei T in °C und t in min.

c) wie gut die Kaffeetasse „isoliert“.

d) $T(t) = 50 \cdot \mathrm{e}^{-0.2\,t} + 20$, wobei T in °C und t in min; 26.8 °C; 8.05 min.

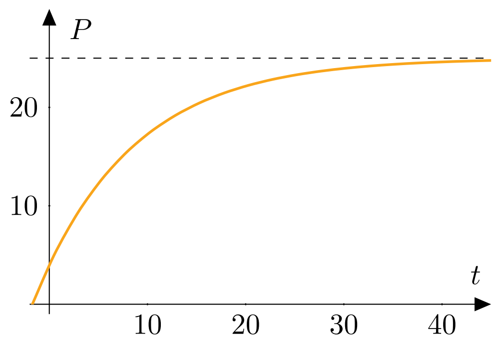
e) T' wird nie ganz 0; erst im „Grenzfall“ $t \to \infty$ wird theoretisch die Umgebungstemperatur erreicht.

Aufgabe 13.

a) $T'(t) = -0.1\,(T(t) - 25)$.

b) $T(t) = C\,\mathrm{e}^{-0.1t} + 25$, wobei T in °C und t in min.

c) $T(t) = 25 - 21\,\mathrm{e}^{-0.1t}$.



d) 7.4 min.

Aufgabe 14.

a) $C_1 = 6$; $C_2 = -8$.

b) Gleichgewicht herrscht dann, wenn sich T nicht mehr ändert, also wenn gilt $T' = 0$. Die Gleichgewichtslösung erhalten wir also dann, wenn wir die Differentialgleichung $T' = 0$ lösen.

Aufgabe 15.

a) $f(x) = C\,\mathrm{e}^{a\,x} - \frac{b}{a}$.

b) Linke Seite: $C \cdot a\,\mathrm{e}^{a\,x}$; rechte Seite: $a \cdot \left(C\,\mathrm{e}^{a\,x} - \frac{b}{a}\right) + b = C \cdot a\,\mathrm{e}^{a\,x}$.

Aufgabe 16.

a) Ist $P(t)$ klein im Vergleich zu G, dann ist $\frac{P(t)}{G} \approx 0$, also $\left(1 - \frac{P(t)}{G}\right) \approx 1$. Damit ist $P'(t) \approx a\,P(t)$. Dass heisst: Zu Beginn hat der Faktor einen geringen Einfluss. Das logistische Wachstum entspricht in dieser Phase ungefähr dem natürlichen Wachstum. Die Population wächst ungehindert.

b) Ist $P(t)$ nahe bei G, dann ist $\frac{P(t)}{G} \approx 1$, also $\left(1 - \frac{P(t)}{G}\right) \approx 0$. Damit ist $P'(t) \approx 0$. Das heisst: Nähert sich $P(t)$ der Sättigungsgrenze G, hat der Faktor einen starken Einfluss. Das Wachstum wird immer mehr verlangsamt.

Aufgabe 17.

a) $P'(t) = 0.01 \cdot P(t)\left(1 - \frac{P(t)}{1000}\right)$.

b) Siehe Aufgabe 16.

c) Die Population nimmt ab und nähert sich „von oben“ der Sättigungsgrenze.

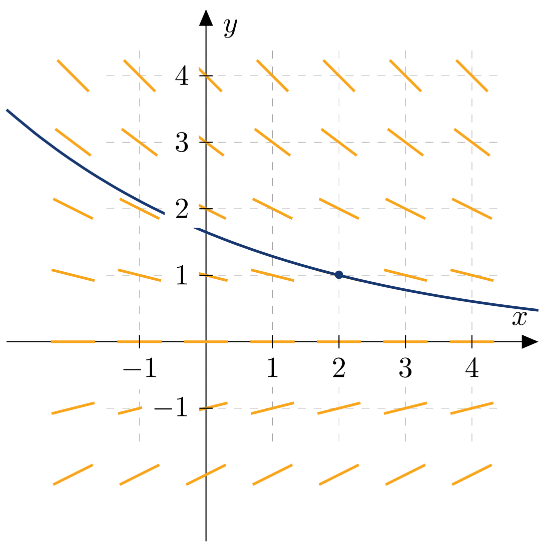
Aufgabe 18.

a) Die relative Wachstumsrate $\frac{P'(t)}{P(t)}$ ist beim natürlichen Wachstum konstant.

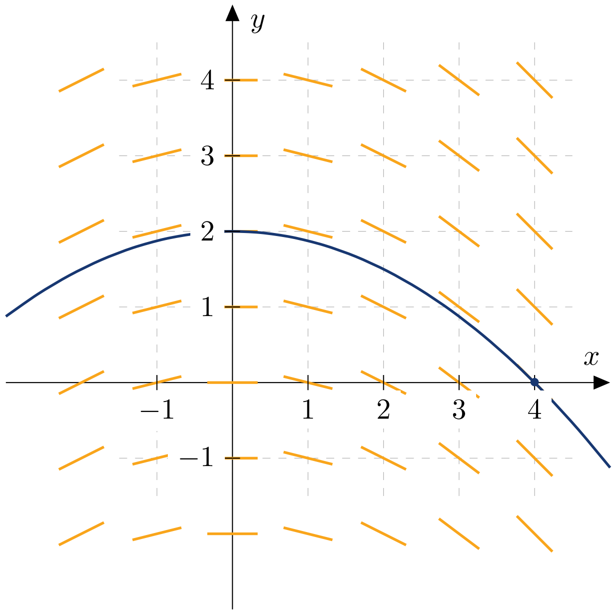
b) Beim logistischen Wachstum hängt sie linear von $P(t)$ ab: je grösseer $P(t)$ umso kleiner die Wachstumsrate.

Aufgabe 19.

a) $f'(x)$ ist auf jeder Horizontalen jeweils gleich, da $f'(x)$ überall proportional zum jeweiligen y-Wert ist und damit allein von y, aber nicht von x selber, abhängig ist.



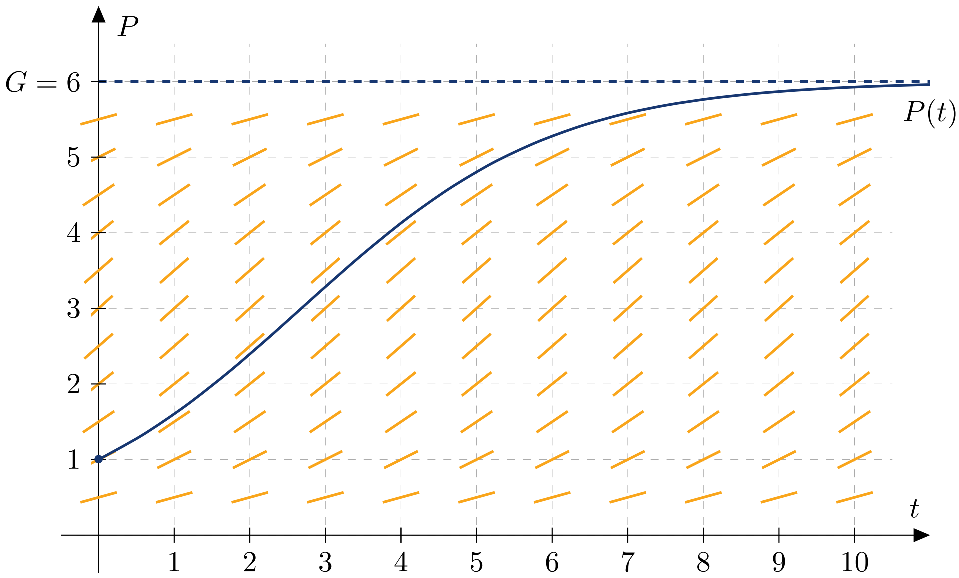
b) Die Steigungen sind auf jeder Vertikalen gleich gross, da $f'(x)$ nur von x, aber nicht von y abhängig ist.



c) Das linke Feld gehört zu $f'(x) = \frac{1}{x}$, keine Asymptote; das rechte Feld gehört zu $f'(x) = -f(x) + 3$, Asymptote: $y = 3$.

Aufgabe 20.

a) Wir haben die folgende Zeichnung:



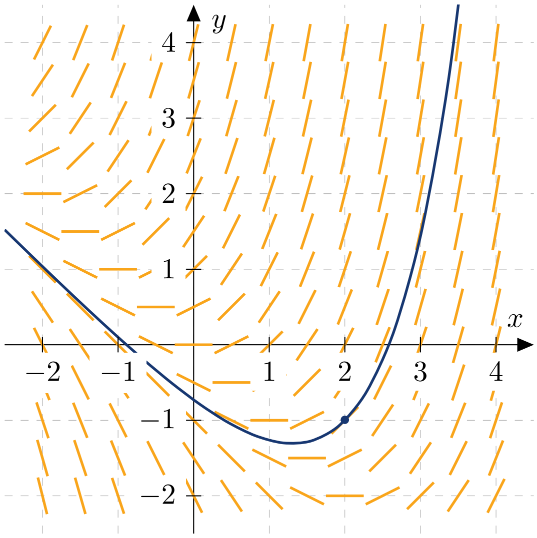
b) Siehe Abbildung

c) Asymptote: $y = 6$. Begründung: Für $P(t) = 6$ ist $P'(t) = 0$.

d) Bei $P(t) = \frac{G}{2} = 3$; also bei etwa $t = 2.7$.

Aufgabe 21.

a) Wir haben die folgende Abbildung



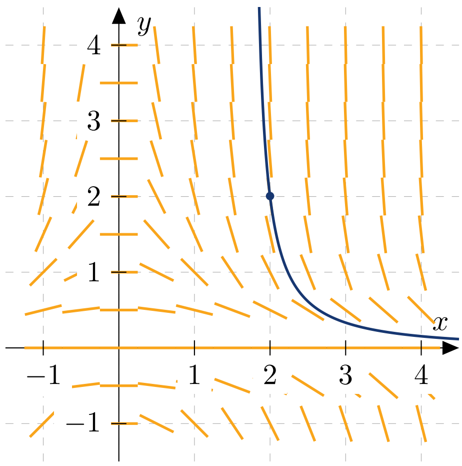
b) Siehe Abbildung.

c) $f(x) = -x - 1$.

Aufgabe 22.

a) Wir haben die folgende Steigungstabelle und Skizze.

Punkt $(x\|y)$	$x=-1$	$x=0$	$x=1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$
$y=-1$	1	0	−1	−2	−3	−4
$y=0$	0	0	0	0	0	0
$y=1$	1	0	−1	−2	−3	−4
$y=2$	4	0	−4	−8	−12	−16
$y=3$	9	0	−9	−18	−27	−36
$y=4$	16	0	−16	−32	−48	−64



b) Siehe Abbildung.

Aufgabe 23.

a) $(\log|f(x)| + C')' = \underbrace{\frac{1}{f(x)}}_{\text{äussere Ableitung}} \cdot \underbrace{f'(x)}_{\text{innere Ableitung}}.$

b) $\log|x+3| + C$; $\log|2x+3| + C$; $\frac{\log|x+\frac{3}{2}|}{2} + C$.

Aufgabe 24.

a) $f(x) = C\,\mathrm{e}^{3x}$.

b) $y = C\,\mathrm{e}^{-0.1\,x}$.

c) $y = C\,\mathrm{e}^{\frac{x^3}{3}}$. Die Gleichung $y' = x^2 y$ wird umgeformt zu $\frac{y'}{y} = x^2$. Die Variablen sind „separiert" worden: die „y" stehen auf der linken Seite, die „x" auf der Rechten.

Aufgabe 25.

a) $y = C\,\mathrm{e}^{2\,x^3}$.

b) $y = -\frac{1}{\frac{1}{2}x^2+x+C} = -\frac{2}{x^2+2x+C}$.

c) $y = C\,\mathrm{e}^{\frac{x^3}{3}} - 1$.

d) nicht separierbar.

Aufgabe 26.

a) $y' = x(y+3)$; separierbar mit $h(x) = x$ und $g(y) = y+3$; es ist $y = C\,\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} - 3$.

b) Schritt 1: Separation der Variablen: $\frac{y'}{g(y)} = h(x)$.

Schritt 2: Integration: $\int \frac{y'}{g(y)}\,\mathrm{d}y = \int h(x)\,\mathrm{d}x$.

Schritt 3: Auflösen nach y: $y = \ldots$.

Probleme, die auftreten können: Finden einer Stammfunktion (Schritt 2), Auflösen nach y (Schritt 3).

Aufgabe 27.

a) $y = C\,\mathrm{e}^{x} - 5$.

b) $T = C\,\mathrm{e}^{2x} - \frac{3}{2}$.

c) $P = C\,\mathrm{e}^{0.5\,x} - 2b$.

d) $y' = a\,y + b = a\left(y + \frac{b}{a}\right)$; $y = C\,\mathrm{e}^{a\,x} - \frac{b}{a}$.

Aufgabe 28.

a) $P(t) = \frac{G}{1+C\,\mathrm{e}^{-a\,t}}$.

b) Selber.

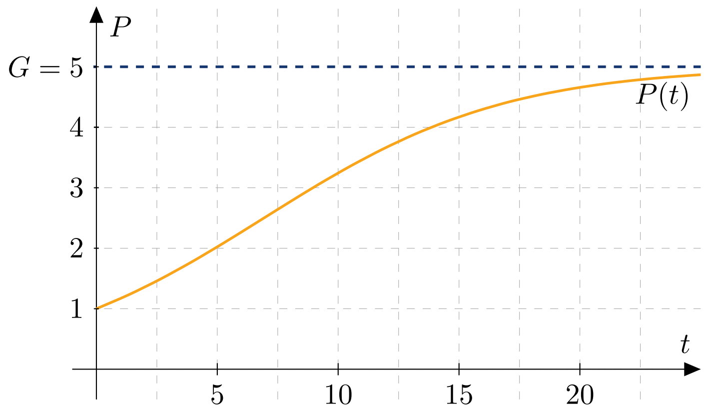
c) $\lim_{t\to\infty} P(t) = G$.

Aufgabe 29.

a) Es ist: $P(0) = \frac{G}{1+C} = A$, $\Rightarrow$ $C = \frac{G-A}{A}$ und

$$\Rightarrow \quad P(t) = \frac{G}{1+\frac{G-A}{A}\mathrm{e}^{-a\,t}} = \frac{A\cdot G}{A+(G-A)\cdot \mathrm{e}^{-a\,t}}.$$

b) $P(t) = \frac{5}{1+4\,\mathrm{e}^{-0.2\,t}}$; $t = 13.86$.



Aufgabe 30.

a) $P(2) = 2250$; $P(3) = 3375$; (weiter wäre: $P(4) = 5063$).

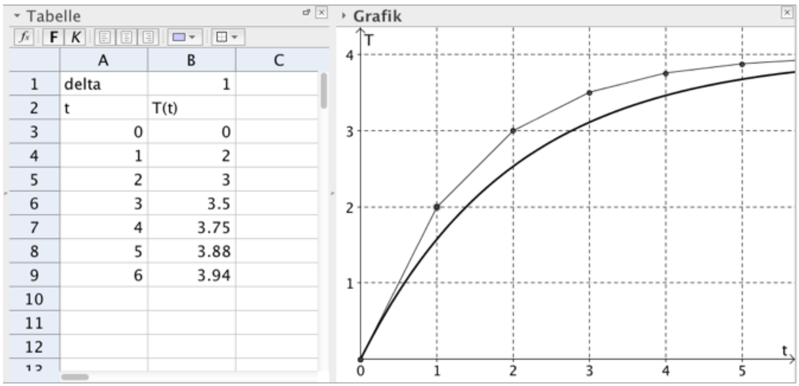
Aufgabe 31.

a) $P(0) = 1000$; $P(0.25) = 1125$; $P(0.5) = 1266$; $P(0.75) = 1424$; $P(1) = 1602$; (weiter wäre: $P(1.25) = 1802$).

b) Dank der kleineren Schrittweite (Woche statt Monat) werden die Steigungen häufiger angepasst: die Lösungskurve wird damit immer besser angenähert als mit grösseren Schritten.

Aufgabe 32.

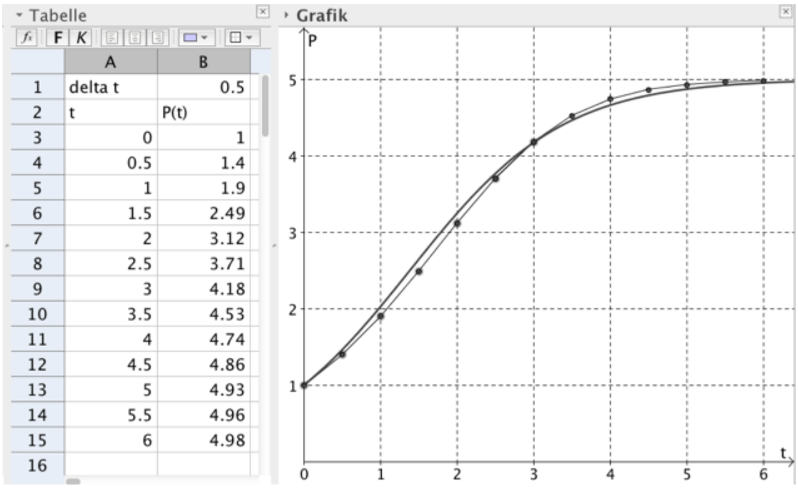
a) Siehe Abbildung.



	A	B	C
1	delta	1	
2	t	T(t)	
3	0	0	
4	1	2	
5	2	3	
6	3	3.5	
7	4	3.75	
8	5	3.88	
9	6	3.94	
10			
11			
12			

Aufgabe 33.

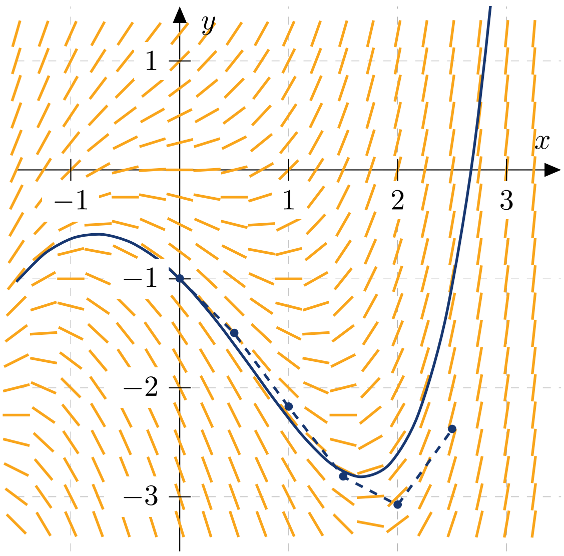
a) Siehe Abbildung.



	A	B
1	delta t	0.5
2	t	P(t)
3	0	1
4	0.5	1.4
5	1	1.9
6	1.5	2.49
7	2	3.12
8	2.5	3.71
9	3	4.18
10	3.5	4.53
11	4	4.74
12	4.5	4.86
13	5	4.93
14	5.5	4.96
15	6	4.98
16		

Aufgabe 34.

a) Siehe Abbildung.



Aufgabe 35.

a) Das Richtungsfeld in der linken Abbildung passt: Die Lösungskurven sind Kreise um den Ursprung.

b) $y = 3.08$.

c) Diese Gleichung eignet sich für die Lösung mit der Methode der Separation der Variablen: $y'\,y = -x$ lässt sich integrieren. Die Lösungskurven sind Kreise mit der Gleichung $x^2 + y^2 = 2C = r^2$.

d) Exakter Wert: $y = 3$; Abweichung $3.08-3 = 0.08$; Verbesserung durch kleine Schrittweite. Das Euler-Verfahren kann nicht in „Startwerten“ auf der x-Achse beginnen, da dort $y' = \infty$ ist.

Lösung der logistischen Gleichung

Als Beispiel betrachten wir die Differentialgleichung

$$P'(t) = 0.5 \cdot P \cdot \left(1 - \frac{P(t)}{6}\right)$$

bzw. in einfacherer Schreibweise

$$P' = 0.5 \cdot P \cdot \left(1 - \frac{P}{6}\right).$$

Wir lösen diese Gleichung mit Hilfe der Separation der Variablen.

Schritt 1 - Separation der Variablen

$$\frac{1}{P \cdot \left(1 - \frac{P}{6}\right)} \cdot P' = 0.5.$$

Die Schwierigkeit ist offensichtlich: Wie soll man bloss eine Stammfunktion für die linke Seite finden?

Hier hilft eine Technik mit dem Namen „Partialbruchzerlegung“.

Es handelt sich um ein (nicht offensichtliches!) Umformen des Quotienten $\frac{1}{P \cdot \left(1 - \frac{P}{6}\right)}$. Zuerst vereinfachen wir:

$$\frac{1}{P \cdot \left(1 - \frac{P}{6}\right)} = \frac{6}{P \cdot (6 - P)}$$

und ziehen dann das Ganze auseinander:

$$\frac{6}{P \cdot (6 - P)} = \frac{P + 6 - P}{P \cdot (6 - P)} = \frac{P}{P \cdot (6 - P)} + \frac{6 - P}{P \cdot (6 - P)} = \frac{1}{6 - P} + \frac{1}{P}$$

und bekommen so:

$$0.5 = \left(\frac{1}{6 - P} + \frac{1}{P}\right) \cdot P' = \frac{1}{6 - P} \cdot P' + \frac{1}{P} P'.$$

Schritt 2 - Integration

Wir berechnen durch Integration:

$$-\log |6 - P| + \log |P| = 0.5 \cdot t + D.$$

Schritt 3 - Auflösen nach P

Die erhaltene Gleichung lösen wir nach der Funktion P auf.

Dazu multiplizieren wir die Gleichung zuerst mit (-1):

$$\log|6-P| - \log|P| = -0.5 \cdot t - D.$$

Wir fassen zu einem Logarithmus zusammen:

$$\log\left|\frac{6-P}{P}\right| = -0.5t - D$$

und beseitigen ihn:

$$\left|\frac{6-P}{P}\right| = \mathrm{e}^{-0.5\cdot t} \cdot \mathrm{e}^{-D} = L \cdot \mathrm{e}^{-0.5\cdot t}.$$

Da $P < 6$ können wir auf die Betragsstriche weglassen und erhalten:

$$\frac{6-P}{P} = C \cdot \mathrm{e}^{-0.5\cdot t}.$$

Der Rest ist nicht mehr schwierig:

$$\begin{aligned} \frac{6}{P} - 1 &= C \cdot \mathrm{e}^{-0.5\cdot t} \\ \frac{6}{P} &= 1 + C \cdot \mathrm{e}^{-0.5\cdot t} \\ \frac{P}{6} &= \frac{1}{1 + C \cdot \mathrm{e}^{-0.5\cdot t}} \\ P &= \frac{6}{1 + C \cdot \mathrm{e}^{-0.5\cdot t}}. \end{aligned}$$

Aus dem Text war dir diese Lösung bereits bekannt. Jetzt hast du aber auch den Weg zur Lösung verfolgen können!

Als kleine Aufgabe: Versuch den Weg zur Lösung der allgemeinen logistischen Gleichung

$$P'(t) = a \cdot P(t) \cdot \left(1 - \frac{P(t)}{G}\right) \quad (a > 0)$$

zu finden, indem du die oben gemachten Schritte anpasst!