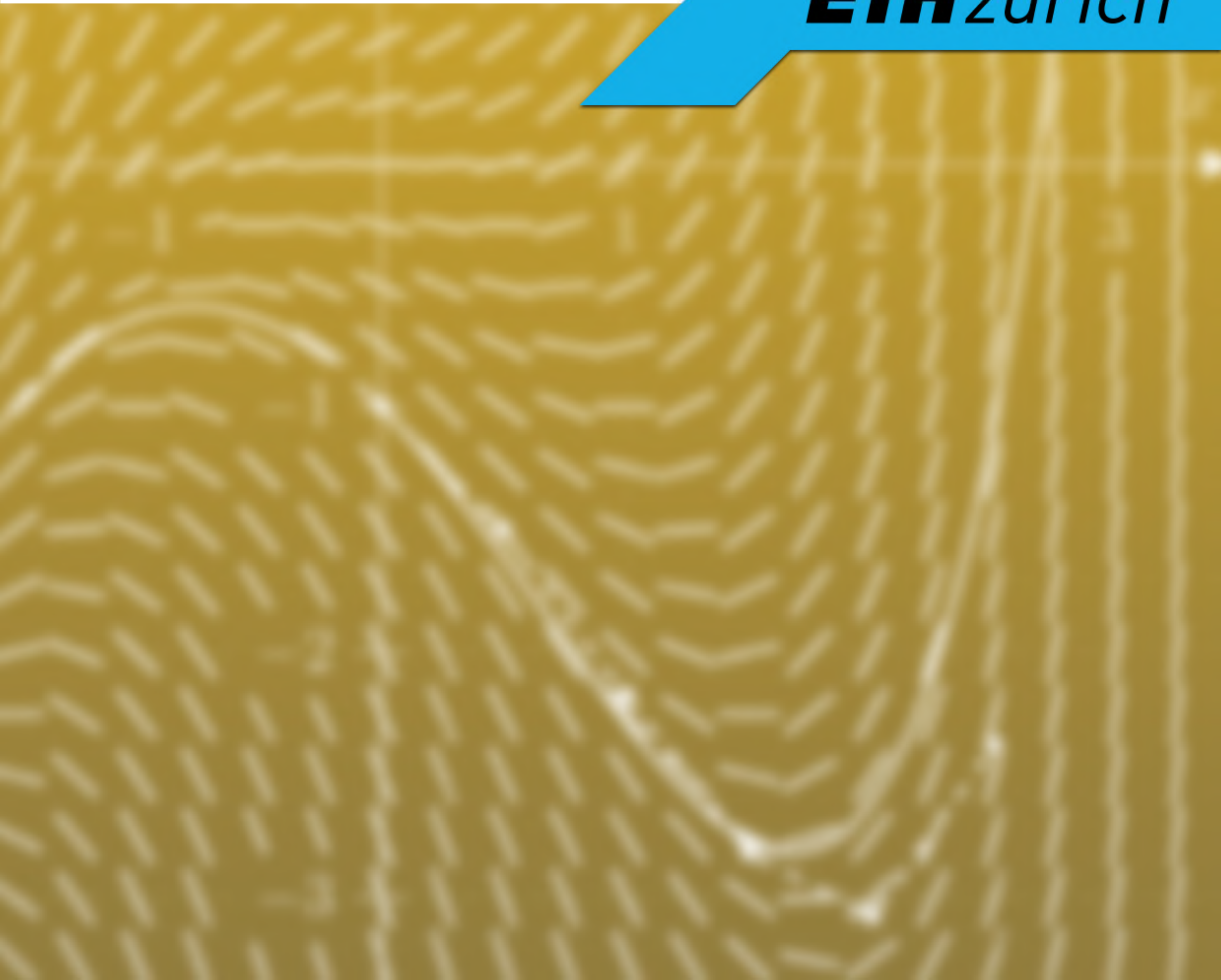
Modellieren mit Differentialgleichungen

Michael Bucher
Arno Gropengiesser

ETH zürich



Modellieren mit Differentialgleichungen

Michael Bucher
Arno Gropengiesser

ETH zürich

Michael Bucher
Zürich
michael.bucher@ksstadelhofen.ch

Arno Gropengiesser
Solduno
arno.gropengiesser@edu.ti.ch

Impressum

Das vorliegende Skript und die Anhänge stehen den Mathematiklehrpersonen der Maturitätsschulen zur freien Verfügung. Neben der gedruckten Version kann das Material als PDF und auch in Form der LaTeX-Quelldateien auf

http://math.ch/dgl

heruntergeladen werden. Die Verwendung des Textes als Ganzes oder in Teilen, sowie die Modifikation zur Anpassung an den jeweiligen Unterricht, ist unter Angabe der Quelle ausdrücklich gestattet. Eine Haftung der Autoren ist ausgeschlossen.

Gestaltung, Layout und LaTeX-Typesetting

Alessandro Fasse

Druck

ETH Zürich, Print + Publish
HG D 33.5
Rämistrasse 101
8092 Zürich

E-Mail: print-publish@services.ethz.ch
Telefon: +41 44 632 50 13

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Die Hochschulrektorenkonferenz hat 1990 einen Katalog Grundkenntnisse in Mathematik veröffentlicht. Darin wurde festgelegt, welcher Stoff zu Studienbeginn als bekannt vorausgesetzt wird. Nach der Maturitätsreform 1995 wurde der Katalog von der DMK, der CRM und einer Kommission der ETH Zürich 1997 überarbeitet und nach einer umfassenden Vernehmlassung gesamtschweizerisch zur Umsetzung empfohlen. Seit der Jahrtausendwende haben sich die Rahmenbedingungen wiederum geändert. So wurde vielerorts die Schulzeit verkürzt, graphikfähige Taschenrechner und CAS (Computer Algebra Systeme) sowie Geometriesoftware bieten neue Möglichkeiten im gymnasialen Mathematikunterricht.

An der Konferenz Übergang Gymnasium-Hochschule im Oktober 2010 im Centro Stefano Franscini wurde deshalb angeregt, den Katalog neu zu gestalten. Die Kommission Gymnasium-Universität hat daraufhin die DMK beauftragt, eine breit abgestützte Gruppe aus Vertretern von DMK/CRM/CMSI und der Hochschulen zu bilden, um die Arbeit auszuführen und das Resultat in eine allgemeine Vernehmlassung zu geben.

Das Resultat dieser Arbeiten ist der *Kanon Mathematik* (http://math.ch/kanon). Eine wichtige Neuerung besteht darin, dass eine Einführung in die Modellierung mit Differentialgleichungen nicht nur im mathematisch–naturwissenschaftlichen Profil, sondern in jedem Profil im Grundlagenfach erfolgen soll. Es zeigte sich allerdings, dass dafür ein sowohl für die Schülerinnen und Schüler, als auch für die Lehrpersonen brauchbares Lehrmittel fehlt.

Das vorliegende Skript, dessen Erstellung von der ETH Zürich unterstützt wurde, möchte diese Lücke schliessen. Es zeigt an vielen Beispielen auf, was Differentialgleichungen sind, woher sie kommen und wie sie exakt gelöst werden können, falls dies möglich ist. Es werden graphische und numerische Methoden vorgestellt, mit denen in jedem Fall brauchbare angenäherte Lösungen gefunden werden können. Das Einbeziehen möglicher Software (GeoGebra) und praktische Experimente runden diese Einführung ab.

Im Anhang findet sich ein Glossar und die Lösungen zu den Aufgaben.

Die vorliegende, gedruckte Form wurde im Unterricht erprobt. Der Zeitbedarf mit Prüfung beträgt ca. 20 Lektionen. Bei Bedarf und Interesse können unter http://math.ch/dgl folgende Ergänzungen eingesehen und heruntergeladen werden:

- Differentialgleichungen zweiter Ordnung
- Differentialgleichungen und ebene Kurven
- Differentialgleichungssysteme

Die Autoren hoffen mit diesem Skript sowohl Schülerinnen und Schülern als auch Lehrpersonen den Einstieg in die Thematik zu erleichtern. Natürlich freuen wir uns über Rückmeldungen jeglicher Art.

Viel Erfolg!

KAPITEL A

Differentialgleichungen 2. Ordnung

A.1 Ein erstes Beispiel

Was denkst du, ist

$$f''(x) = f(x)$$

auch eine Differentialgleichung?

Klar! Im Unterschied zum Bisherigen kommt jetzt einfach die zweite Ableitung vor!

Ein solche Gleichung heisst *Differentialgleichung zweiter Ordnung* - weil eben eine zweite Ableitung auftritt -, wohingegen alle bisherigen Differentialgleichungen erster Ordnung waren. Unschwer sich vorzustellen, dass es auch Differentialgleichungen dritter oder höherer Ordnung gibt!

Merke 1

Eine **Differentialgleichung** heisst ***n*-ter Ordnung**, wenn (als höchste Ableitung) eine n-te Ableitung auftritt.

Zu Beginn des Kapitels 1 haben wir ein ganz einfaches Beispiel einer Differentialgleichung erster Ordnung gelöst, nämlich

$$f'(x) = -x + 3.$$

Die Lösung war denkbar einfach und mit dem jetzigen Wissen fällt es uns fast schon schwer diese Gleichung überhaupt als „richtige“ Differentialgleichung zu würdigen. (Warum?)

Trotzdem wollen wir auch bei den Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit einem einfachen Beispiel beginnen.

Aufgabe 1

a) Löse die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$f''(x) = -x + 3.$$

b) Was stellst du fest bezüglich der Anzahl der Konstanten im Vergleich mit Differentialgleichungen erster Ordnung? Wie viele „Anfangsbedingungen“ sind deshalb nötig für eine spezielle Lösung?

Aber: wo treten zweite Ableitungen auf?

Sicher hast du schon von folgenden Zusammenhängen gehört:

- Die Ableitung der Weg-Zeit-Funtkion $s(t)$ ist die Geschwindigkeit $v(t)$:

$$s'(t) = v(t).$$

- Die Ableitung der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion $v(t)$ ist die Beschleunigung $a(t)$:

$$v'(t) = a(t).$$

Mach dir nochmals klar, was damit gemeint ist!

Damit ist aber:

$$s''(t) = v'(t) = a(t).$$

Merke 2

Die **zweite Ableitung** der Weg-Zeit-Funktion $s(t)$ ist die **Beschleunigung** $a(t)$.

Damit sind wir gerüstet für die folgenden Abschnitte.

A.2 Freier Fall

Lässt man einen Körper auf die Erde fallen, erfährt dieser eine Beschleunigung, die sogenannte *Fallbeschleunigung*. Weil beim freien Fall alle Körper mit der gleichen Beschleunigung fallen, hat man als Symbol für die Fallbeschleunigung einen eigenen Buchstaben eingeführt, nämlich g.

Die Fallbeschleunigung auf der Erdoberfläche ist *konstant* und beträgt $g \approx 10\,\mathrm{m/sec^2}$.

Aufgabe 2 - Freier Fall ohne Reibung (Luftwiderstand)

Aus der Physik ist dir vielleicht folgende Formel bekannt:

$$s(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0.$$

a) Leite diese Formel her! Hinweis: $s''(t) = a(t) = g$.

b) Was bedeuten die Konstanten v_0 und s_0?

c) Ein Apfel hängt an einem Ast in drei Meter Höhe. Er fällt vom Baum. Der „freie“ Fall des Apfels wird also durch eine Differentialgleichung

$$s''(t) = g$$

mit den beiden Anfangsbedingungen:

$$s(0) = 0 \quad \text{und} \quad s'(0) = 0$$

beschrieben. Wie lautet die spezielle Lösung, die den Fall dieses Apfels beschreibt?

Der Luftwiderstand verringert beim Fallen jedoch die Beschleunigung und bewirkt so, dass ein Körper eine maximale Fallgeschwindigkeit nicht überschreitet.

Aufgabe 3 - Freier Fall mit Reibung (Luftwiderstand)

Wir nehmen zuerst als einfaches Modell an, dass der Luftwiderstand eine Verringerung der Beschleunigung bewirkt, die proportional zur Geschwindigkeit ist. Damit erhalten wir für die Beschleunigung $a(t)$:

$$a(t) = g - b \cdot v(t) \quad (b > 0),$$

die wir auch

a) in der Form schreiben können:

$$v'(t) = g - b \cdot v(t).$$

- Welche Ordnung hat diese Differentialgleichung?
- Bestimme $v(t)$.

b) in der Form schreiben können:

$$s''(t) = g - b \cdot s'(t).$$

- Welche Ordnung hat diese Differentialgleichung?

- Bestimme $s(t)$. Hinweis: Aus **a)** kennst du bereits $v(t)$.

c) In der Realität zeigt sich, dass unser einfaches Modell:

$$a(t) = g - b \cdot v(t) \quad (b > 0)$$

nicht „greift“. Ein Modell, dass bessere Resultate liefert, geht davon aus, dass der Luftwiderstand proportional zum *Quadrat* der Geschwindigkeit ist.

- Wie lautet die Differentialgleichung in diesem Modell?
- Die Lösung dieser Differentialgleichung ist schwierig (aber möglich). Wir begnügen uns mit der Frage, welche Höchstgeschwindigkeit beim freien Fall angenommen wird. Gib einen Ausdruck an in Abhängigkeit von g und b. *Hinweis:* Die Höchstgeschwindigkeit wird für $a(t) = 0$ erreicht. Warum?

A.3 Schwingungen

Ein Gewichtsklotz wird an eine Feder gehängt und aus der Ruhelage „in Schwingung“ gebracht, beispielsweise indem wir ihn nach unten ziehen und dann loslassen.

Wird der Klotz aus der Ruhelage gebracht, dann übt die Feder eine Kraft aus, die zur Ruhelage gerichtet ist und den Klotz in die Ruhelage „zurücktreibt“.

Dabei wird er im Allgemeinen über die Ruhelage hinaus bewegt so, dass er sich durch die Federkraft wieder in entgegengesetzter Richtung zurückbewegt usw. Es kommt also zu Schwingungen um die Ruhelage.

Mit Hilfe des Hook'schen Gesetzes aus der Physik lässt sich zeigen, dass die Beschleunigung $a(t)$ proportional ist zur Auslenkung $s(t)$. Wir erhalten damit

$$a(t). = -c \cdot s(t) \quad (c > 0).$$

Das Minuszeichen rührt daher, dass die Beschleunigung der Auslenkung entgegengesetzt ist. Ersetzen wir $a(t) = s''(t)$, erhalten wir die sogenannte *Differentialgleichung der harmonischen Schwingung*:

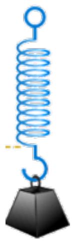
$$s''(t) = -c \cdot s(t) \quad (c > 0).$$

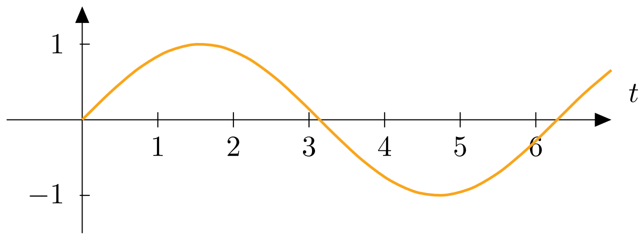
Das ist jetzt eine „echte“ Differentialgleichung zweiter Ordnung, weil auch die Funktion $s(t)$ auftritt. Die Konstante c ist abhängig vom Gewicht des Klotzes und der Stärke der Feder.

Aufgabe 4 - Schwingung ohne Reibung

a) Wir setzen zuerst $c = 1$ und betrachten also die Gleichung

$$s''(t) = -s(t).$$





Wenn wir an „Schwingungen" denken, dann ist der Sinus nicht weit! Zeige, dass die Funktion

$$s(t) = \sin t$$

die Differentialgleichung löst.

b) Die Differentialgleichung der harmonischen Schwingung wird auch oft in der Form

$$s''(t) = -\omega^2 \cdot s(t)$$

geschrieben. Die Proportionalitätskonstante c wird als Quadrat ω^2 notiert, damit die Lösung schöner aussieht.

Zeige, dass die Ausdrücke

- $s(t) = A \cdot \sin(\omega t)$ und
- $s(t) = A \cdot \sin(\omega t) + B \cdot \cos(\omega t)$

die Differentialgleichung lösen.

c) Überlege dir die Lösung für den allgemeinen Fall $c \neq 1$.

d) Ein Klotz schwingt an einer Feder. Wir betrachten den Fall:

$$s''(t) = -s(t).$$

Weiter sind die beiden Anfangsbedingungen

$$s(0) = 0 \quad \text{und} \quad s'(0) = 3$$

gegeben. Gib jeweils die spezielle Lösung an.

e) Wie **d)** mit den Anfangsbedingungen

$$s(0) = 2 \quad \text{und} \quad s'(0) = 3.$$

Aufgabe 5 - Schwingung mit Reibung

Durch Reibung wird eine Schwingung mit der Zeit abgebremst beziehungsweise die Auslenkung $s(t)$ wird kleiner. Man spricht von einer *gedämpften Schwingung*. Wie lässt sich diese nun in unsere Differentialgleichung einbauen?

a) Eine gedämpfte Schwingung lässt sich mit folgender Differentialgleichung beschreiben:

$$s''(t) = -\omega^2 \cdot s(t) - d \cdot s'(t) \quad (d > 0).$$

Erkläre!

b) Zeige durch Ableiten, dass $s(t) = 4 \cdot \mathrm{e}^{-0.5\,t} \cdot \sin(t)$ die Differentialgleichung

$$s''(t) = -\frac{5}{4}s(t) - s'(t)$$

löst.

c) Die Differentialgleichung der gedämpften Schwingung wird oft in der Form

$$s''(t) + 2\beta \cdot s'(t) + \omega^2 \cdot s(t) = 0$$

geschrieben. Erkennst du darin die Form aus **a)** wieder? Zeige durch Ableiten, dass die Funktion

$$s(t) = \mathrm{e}^{-\beta\,t} \cdot \left(A \cdot \sin\left(\sqrt{\omega^2 - \beta^2} \cdot t\right) + B \cdot \cos\left(\sqrt{\omega^2 - \beta^2} \cdot t\right)\right)$$

die Lösung der Differentialgleichung ist.

A.4 Rückblick

- Es gibt auch Differentialgleichungen, in denen höhere Ableitungen auftreten.
- Als wichtiges Beispiel haben wir die Differentialgleichung der harmonischen Schwingung kennengelernt:

  $$s''(t) = -\omega^2 \cdot s(t).$$

  Die grosse Bedeutung der harmonischen Schwingung liegt darin, dass jeder periodische Vorgang als „Überlagerung“ (das heisst, als Summe) von harmonischen Schwingungen dargestellt werden kann.

A.5 Lösungen der Aufgaben

Aufgabe 1.

a) Wir berechnen

$$f'(x) = \int (-x+3)\mathrm{d}x = -\frac{x^2}{2} + 3x + C,$$
$$f(x) = \int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(-\frac{x^2}{2} + 3x + C\right)\mathrm{d}x = -\frac{x^3}{6} + \frac{3}{2}x^2 + C\,x + D.$$

b) Durch zweimaliges Integrieren, erhalten wir zwei (verschiedene) Integrationskonstanten. Um diese bestimmen zu können, braucht es zwei zugehörige „Anfangsbedingungen".

Aufgabe 2.

a) und **b)**:

$$s'(t) = \int g\,\mathrm{d}t = g\,t + C,$$
$$s(t) = \int s'(t)\,\mathrm{d}t = \int (g\,t + C)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}g\,t^2 + C\,t + D,$$

wobei $C = v_0$, die Anfangsgeschwindigkeit und $D = s_0$, die Anfangsposition sein muss.

c) Wir haben

$$s(t) = \frac{1}{2}g\,t^2 + v_0 t + s_0 = \frac{1}{2}g\,t^2.$$

Aufgabe 3.

a) Erste Ordnung; $v(t) = \frac{g}{b} - C\,\mathrm{e}^{-b\,t}$.

b) Zweite Ordnung; durch integrieren von $s'(t) = v(t)$ erhalten wir $s(t) = \frac{g}{b}t + \frac{C\,\mathrm{e}^{-b\,t}}{b} + D$.

c) $v'(t) = g - b \cdot v^2(t)$ oder $s''(t) = g - b \cdot (s'(t))^2$. Die Gleichung $a(t) = v'(t) = 0$ bedeutet, dass die Geschwindigkeit sich nicht mehr ändert, daraus folgt: $v_{\max}(t) = \sqrt{\frac{g}{b}}$.

Aufgabe 4.

a) $s'(t) = \cos(t)$, $s''(t) = -\sin(t) = -s(t)$.

b) $s(t) = A \cdot \sin(\sqrt{c} \cdot t)$.

c) Wir berechnen

$$\begin{aligned} s''(t) &= -A \cdot \sin(\omega\,t) \cdot \omega^2 = -\omega^2 \cdot s(t) \text{ und} \\ s''(t) &= -A \cdot \sin(\omega\,t) \cdot \omega^2 - B \cdot \cos(\omega\,t) \cdot \omega^2 \\ &= -\omega^2\,(A \cdot \sin(\omega\,t) + B \cdot \cos(\omega\,t)) \\ &= -\omega^2 \cdot s(t). \end{aligned}$$

d) Ansatz: $s(t) = A\,\sin(t) + B\,\cos(t)$. Mit $s(0) = 0$ und $s'(0) = 3$ ergibt sich $s(t) = 3\,\sin(t)$.

e) Ansatz: $s(t) = A\,\sin(t) + B\,\cos(t)$. Mit $s(0) = 2$ und $s'(0) = 3$ ergibt sich $s(t) = 3\,\sin(t) + 2\,\cos(t)$.

Aufgabe 5.

a) Mit $d > 0$ ist der Beschleunigung zusätzlich zum Hook'schen Gesetz eine Dämpfung, proportional zur Geschwindigkeit $s'(t)$, entgegen gesetzt: die Schwingung wird gebremst.

b) Wir berechnen

$$s'(t) = 4 \cdot \mathrm{e}^{-0.5\,t} \cdot (-0.5 \cdot \sin(t) + \cos(t)) = -2 \cdot \mathrm{e}^{-0.5\,t} \cdot \sin(t) + 4 \cdot \mathrm{e}^{-0.5\,t} \cdot \cos(t) \text{ und}$$
$$s''(t) = -3 \cdot \mathrm{e}^{-0.5\,t} \cdot \sin(t) - 4 \cdot \mathrm{e}^{-0.5\,t} \cdot \cos(t).$$

Durch Einsetzen: $-\frac{5}{4} \cdot s(t) - s'(t) = s''(t) = -3 \cdot \mathrm{e}^{-0.5\,t} \cdot \sin(t) - 4 \cdot \mathrm{e}^{-0.5\,t} \cdot \cos(t)$.

c) $d = 2\beta$ und wir berechnen

$$\begin{aligned}
s'(t) =& \beta \cdot \mathrm{e}^{-\beta\,t} \cdot \left(A \cdot \sin\left(\sqrt{\omega^2 - \beta^2} \cdot t\right) + B \cdot \cos\left(\sqrt{\omega^2 - \beta^2} \cdot t\right)\right) + \mathrm{e}^{-\beta\,t} \\
&\cdot \left(A \cdot \cos\left(\sqrt{\omega^2 - \beta^2} \cdot t\right) \cdot \sqrt{\omega^2 - \beta^2} - B \cdot \sin\left(\sqrt{\omega^2 - \beta^2} \cdot t\right) \cdot \sqrt{\omega^2 - \beta^2}\right), \\
s''(t) =& 2\beta^2 \cdot \mathrm{e}^{-\beta\,t} \cdot \left(A \sin\left(\sqrt{\omega^2 - \beta^2} \cdot t\right) + B \cdot \cos\left(\sqrt{\omega^2 - \beta^2} \cdot t\right)\right) + \omega^2 \cdot \mathrm{e}^{-\beta\,t} \\
&\cdot \left(-A \cdot \sin\left(\sqrt{\omega^2 - \beta^2} \cdot t\right) - B \cdot \cos\left(\sqrt{\omega^2 - \beta^2} \cdot t\right)\right) - 2\beta \cdot \mathrm{e}^{-\beta\,t} \\
&\cdot \left(A \cdot \cos\left(\sqrt{\omega^2 - \beta^2} \cdot t\right) \cdot \sqrt{\omega^2 - \beta^2} - B \cdot \sin\left(\sqrt{\omega^2 - \beta^2} \cdot t\right) \cdot \sqrt{\omega^2 - \beta^2}\right) \\
2\beta \cdot s'(t) =& -2\,\beta^2 \cdot \mathrm{e}^{-\beta\,t} \cdot \left(A \cdot \sin\left(\sqrt{\omega^2 - \beta^2} \cdot t\right) + B \cdot \cos\left(\sqrt{\omega^2 - \beta^2} \cdot t\right)\right) + 2\beta \cdot \mathrm{e}^{-\beta\,t} \\
&\cdot \left(A \cdot \cos\left(\sqrt{\omega^2 - \beta^2} \cdot t\right) \cdot \sqrt{\omega^2 - \beta^2} - B \cdot \sin\left(\sqrt{\omega^2 - \beta^2} \cdot t\right) \cdot \sqrt{\omega^2 - \beta^2}\right) \\
\omega^2 \cdot s(t) =& \omega^2 \cdot \mathrm{e}^{-\beta\,t} \cdot \left(A \cdot \sin\left(\sqrt{\omega^2 - \beta^2} \cdot t\right) + B \cdot \cos\left(\sqrt{\omega^2 - \beta^2} \cdot t\right)\right)
\end{aligned}$$

Man erkennt $2\beta \cdot s'(t) + \omega^2 \cdot s(t) = -s''(t)$, die Lösung ist geprüft.

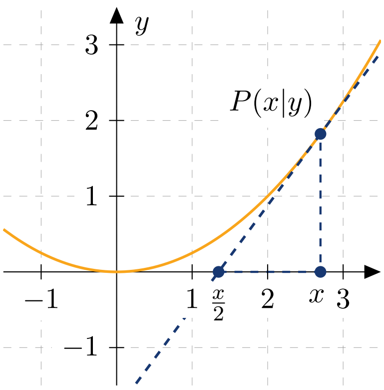
KAPITEL B

Differentialgleichungen und Kurven

B.1 Einfache Beispiele

Aufgabe 6 - Kurven mit Tangenten und Subtangenten

a) Wir suchen Kurven, die folgende Eigenschaften besitzen: Die Tangenten in jedem Punkt $P(x|y)$ der Kurve schneidet die x-Achse im Punkt $(\frac{x}{2}|0)$.



Die Kurve ist der Graph einer unbekannten Funktion $y(x)$. Die Tangente im Punkt $P(x|y)$ hat die Steigung $y'(x)$.

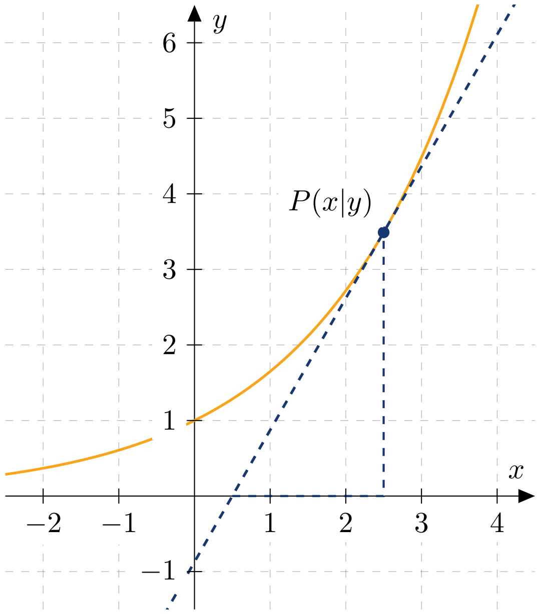
Weil nun die Tangente durch den Punkt $(\frac{x}{2}|0)$ verlaufen soll, muss ihre Steigung aber auch gleich $\frac{y}{x/2} = \frac{2\,y}{x}$ sein. Dies führt uns sofort auf die Differentialgleichung

$$y' = \frac{2\,y}{x}.$$

- Löse diese Gleichung allgemein!
- Eingezeichnet ist die Kurve, die durch den Punkt $(2|1)$ veräuft. Wie lautet diese spezielle Lösung?

b) Als Subtangente wird dasjenige Stück der x-Achse bezeichnet, dass senkrecht unter der Tangente der Kurve im Punkt $P(x|y)$ liegt, und zwar von ihrem Schnittpunkt mit der x-Acse bis zum Punkt $(x|0)$.

Gesucht sind hier Kurven mit der Eigenschaft, dass ihre Subtangenten in jedem Punkt $P(x|y)$ eine konstante Länge aufweisen.

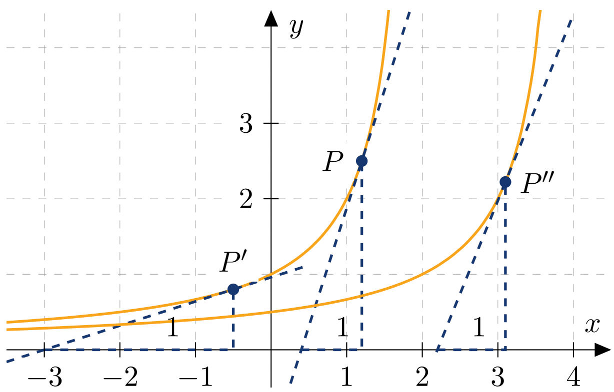


In der obigen Abbildung ist diejenige Kurve eingezeichnet, die eine Subtangente der Länge 2 hat und die zusätzlich durch den Punkt $(0|1.5)$ geht.

Finde die Gleichung dieser Kurve!

Aufgabe 7 - Kurven mit Dreiecken

a) Gesucht sind Kurven, deren Tangenten in einem Punkt $P(x|y)$ mit dem Lot zur x-Achse durch diesen Punkt $P(x|y)$ und der x-Achse rechtwinklige Dreiecke mit einem vorgegebenen, konstanten Flächeninhalt A bestimmen.



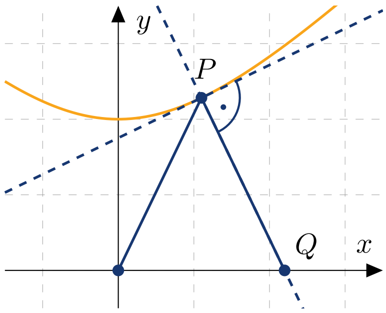
Die Tangente schneidet die x-Achse an der Stelle a.

- Überzeuge dich zuerst davon, dass $x - a = \frac{y}{y'}$ gilt.

- Berechne damit allgemein den Flächeninhalt A.
- Löse die erhaltene Differentialgleichung.
- Finde für $A = 1$ die Gleichungen der eingezeichneten Kurven. Sie verlaufen durch $(0|1)$ bzw. $(0|0.5)$!

b) Die Kurve soll die folgende Eigenschaft besitzen:

Für jeden Kurvenpunkt P ist das Dreieck OPQ gleichschenklig, wobei O der Ursprung, Q der Schnittpunkt der Normale an die Kurve durch P mit der x-Achse ist.



- Versuche zuerst eine Differentialgleichung aufzustellen!

  Hinweis: Die Steigung der Normalen ist gleich dem negativem Kehrwert der Steigung der Tangente. Die Steigung des Schenkels OP is gleich der Steigung der Normalen.
- Löse die Differentialgleichung.
- Wähle aus all diesen Kurven diejenige aus, die durch den Punkt $(0|2)$ geht.

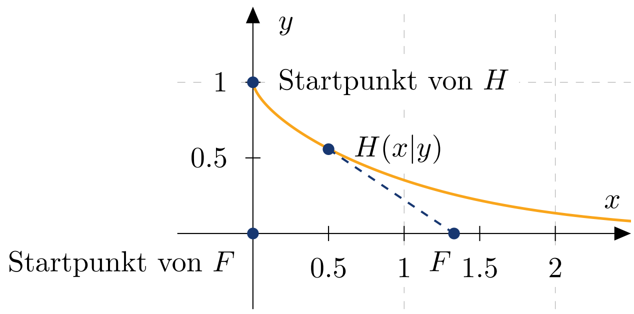
B.2 Schleppkurve (Traktrix)

Stell dir einen störrischen Hund H vor, der im Koordinatensystem im Punkt $(0|1)$ sitzt. Die Frau F steht im Ursprung und läuft entlang der x-Achse. Der störrische Hund H „hängt" dabei an der Leine der Länge 1 und sträubt sich vergebens mit allen Vieren dagegen, „abgeschleppt" zu werden.

Aufgabe 8 - Schleppkurve

a) Versuche mit Hilfe der Abbildung die Differentialgleichung dieser Schleppkurve aufzustellen!

Hinweis: Die Strecke HF hat stets die Länge 1.



b) Die Lösung dieser Differentialgleichung ist schwierig und übersteigt unser Wissen.

Du könntest das Problem aber zumindest numerisch, also nährungsweise, lösen. Wie? Näheres findest du im Kapitel 4 Lösungsmethoden.

B.3 Rückblick

- Kurven lassen sich auch mit Hilfe von Differentialgleichungen beschreiben.
- Unter dem Stichwort „Verfolgungsprobleme“ gibt es eine grosse Anzahl verschiedenster Kurven, die durch Differentialgleichungen festgelegt sind. Achtung: diese Kurven sind teilweise sehr anspruchsvoll!

B.4 Lösungen der Aufgaben

Aufgabe 6.

a) $y(x) = C \cdot x^2$; $y(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2$.

b) Sei l die konstante Länge: $y(x) = C \cdot \mathrm{e}^{\frac{x}{l}}$; $y(x) = 1.5 \cdot \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$.

Aufgabe 7.

a) $y' = \frac{y}{x-a}$; $A = \frac{y^2}{2y'}$; $y(x) = \frac{-2A}{x+C\cdot 2A}$; $y(x) = \frac{-2}{x-2}$ und $y(x) = \frac{-2}{x-4}$.

b) $y \cdot y' = x$; $y() = \pm\sqrt{x^2 + 2C} = \pm\sqrt{x^2 + K}$ und $y(x) = \sqrt{x^2 + 4}$.

Aufgabe 8.

Wir berechnen

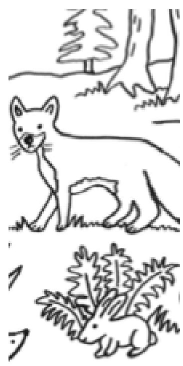
$$y'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-y}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Mit der Euler-Methode könnte das Problem numerisch angegangen werden.

Allerdings bekommen wir ein Problem mit der Anfangsbedingung, also mit dem Startpunkt $H(0|1)$, da $y'(0)$ nicht definiert ist. In der Tat, ist in $H(0|1)$ die Hundeleine senkrecht zur x-Achse. Es müsste also ein anderer Startpunkt gewählt werden.

KAPITEL C

Differentialgleichungssysteme



Bisher haben wir uns mit dem Wachsen einer Population befasst, also mit der Veränderung *einer* Grösse.
Wo es aber Hasen gibt, sind die Füchse meistens nicht weit! Dann findet ein „Wechselspiel“ statt: viele Hasen ziehen viele Füchse an und die fressen wiederum viele Hase... und dann? In diesem Kapitel befassen wir uns mit dem Wachstum von Populationen, die miteinander wechselwirken.

Die Beschreibung gelingt uns mit Hilfe von Differerentialgleichungssystemen.

Keine Angst: Du hast bereits viel früher den Sprung von Gleichungen zu Gleichungssystemen (mit mehreren Unbekannten) geschafft. Jetzt machen wir den Sprung von Differentialgleichungen zu Differentialgleichungssystemen (mit mehreren unbekannten Funktionen)!

C.1 Räuber-Beute Modell

Wir entwickeln ein Modell, in dem die Hasen H die Beute und die Füchse F die Räuber sind.

Gibt es keine Füchse, haben die Hasen nichts zu befürchten. Wir nehmen an, dass die Hasen sich exponentiell („natürlich“) vermehren gemäss

$$H' = a \cdot H \quad (a > 0).$$

Gibt es keine Hasen, dann haben die Füchse nichts zu fressen. Wir nehmen an, dass dann die Füchse sterben gemäss

$$F' = -b \cdot F \quad (b > 0).$$

Treffen nun Hasen und Füchse aufeinander, wirkt sich das natürlich auf das Wachstum (auf die Änderungsrate) der jeweiligen Population aus. Sicher hat die Anwesenheit von Füchsen auf die Hasen eine negative „Auswirkung“, also:

$$H' = a \cdot H - \text{ „Auswirkung“ der Füchse auf die Hasen }.$$

Auf der anderen Seite hat es für die Füchse eine positive „Auswirkung“, wenn es Hasen gibt:

$$F' = -b \cdot F + \text{ „Auswirkung“ der Hasen auf die Füchse }.$$

Wie lassen sich diese „Auswirkungen“ modellieren?

Die einfachste Annahme ist, dass die Auswirkungen proportional zu der Anzahl der Begegnungen von Hasen und Füchsen ist. Die Anzahl der Begegnungen ihrerseits ist proportional zur jeweilen Anzahl von Hasen und Füchsen, also zum Produkt $H \cdot F$.

Damit erhalten wir ein System von zwei Differentialgleichungen:

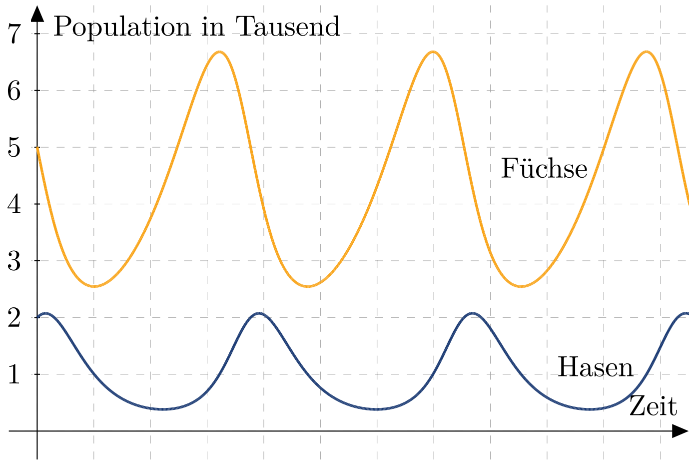
$$\begin{aligned} H' &= a \cdot H - c \cdot H \cdot F \\ F' &= -b \cdot F + d \cdot H \cdot F, \end{aligned}$$

wobei a, b, c und d positive Konstanten sind.

Aufgabe 9 - Räuber-Beute-Modell

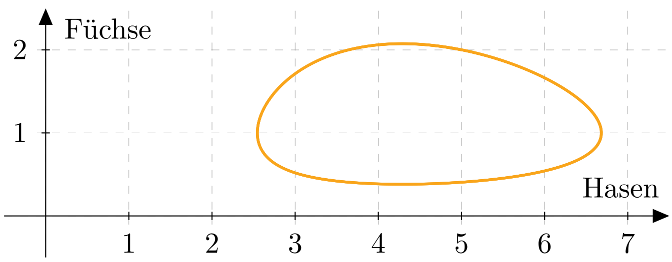
Wir nehmen an, dass es zu Beginn 5000 Hasen und 2000 Füchse sind.

a) Die Abbildung zeigt den typischen (zeitlichen) Verlauf eines Räuber-Beute-Modells.



Wann nimmt welche Population zu? Warum? Beschreibe den Verlauf mit Worten!

b) Manchmal trägt man auch die Population gegeneinander ab: die Hasen bzw. die Beute auf der x-Achse und die Füchse bzw. die Räuber auf der y-Achse. Eine solche Darstellung heisst *Phasendiagramm*.



Wir sehen gut den „Kreislauf“-Charakter des Räuber-Beute-Modells. Aus der geschlossenen Kurve kann man auf ein „periodisches Verhalten“ schliessen.

Überlege dir in welche Richtung der Kreislauf, oder besser die geschlossene Kurve - ausgehend vom Startwert (5|2) - durchlaufen wird! Beziehe dich hier auf Aufgabenteil **a)**.

Das Räuber-Beute-Modell wurde entwickelt vom italienischen Mathematiker Volterra und dem österreicherisch-amerikanischen Biologen Lotka.

Es besitzt - für die Beute B und die Räuber R - die folgende Gestalt:

$$B' = a \cdot B - c \cdot B \cdot R$$
$$R' = -b \cdot R + d \cdot B \cdot R,$$

wobei a, b, c und d positive Konstanten sind. Diese Konstanten geben dabei wie folgt Auskunft:

- a, wie die Beutepopulation wächst ohne Wechselwirkung.
- b, wie die Räuberpopulation abnimmt ohne Wechselwirkung.
- c, wie die Beute von den Räubern dezimiert wird.
- d, wie die Räuber von der Beute profitieren.

Wie können wir nun die Lösungen $B(t)$ und $R(t)$ für das Räuber-Beute-Modell finden?

Zuerst eine kleine Ernüchterung: Es lässt sich zeigen, dass man für $B(t)$ und $R(t)$ gar keine (expliziten) Funktionsgleichungen angeben kann!

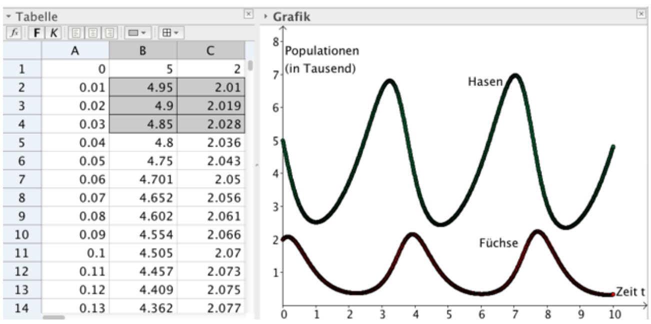
Die Funktionen $B(t)$ und $R(t)$ können wir aber auf numerischem Weg ermitteln.

Aufgabe 10 - Räuber-Beute-Modell mit dem Euler-Verfahren

Wir betrachten das Räuber-Beute-Modell für die Konstanten $a = 1$, $b = 3$, $c = 1$ und $d = 0.7$, also

$$B' = B - B \cdot R$$
$$R' = -3 \cdot R + 0.7 \cdot B \cdot R.$$

Wir wählen die Anfangswerte $B(0) = 5$ und $R(0) = 2$. Die Abbildung zeigt die mit dem Eulerverfahren erzeugte Wertetabelle mit Zeitschritt $\Delta = 0.01$.



Tabelle

	A	B	C
1	0	5	2
2	0.01	4.95	2.01
3	0.02	4.9	2.019
4	0.03	4.85	2.028
5	0.04	4.8	2.036
6	0.05	4.75	2.043
7	0.06	4.701	2.05
8	0.07	4.652	2.056
9	0.08	4.602	2.061
10	0.09	4.554	2.066
11	0.1	4.505	2.07
12	0.11	4.457	2.073
13	0.12	4.409	2.075
14	0.13	4.362	2.077

Berechne von *Hand* die Werte im grauen Kasten. Verwende das Euler-Verfahren

$$B(t+\Delta t) = B(t) + B'(t)\cdot \Delta t \quad \text{bzw.} \quad R(t+\Delta t) = R(t) + R'(t)\cdot \Delta t.$$

Du kannst selber versuchen solche Tabellen und Graphiken mit Hilfe von GeoGebra zu erstellen!

Zwei Populationen können auch auf andere Weise miteinander „wechselwirken“ als im Räuber-Beute-Modell. In der nächsten Aufgabe lernst du weitere Möglichkeiten kennen.

Aufgabe 11 - Weitere Wechselwirkungen

Folgende Differentialgleichungssysteme modellieren die Wechselwirkung zwischen zwei Populationen x und y. Ordne das Gleichungssystem dem entsprechenden Text zu.

a)
$$\begin{aligned} x' &= 0.5\cdot x - x\,y \\ y' &= 0.7\cdot y - 0.6\cdot x\,y \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x' &= 0.5\cdot x \\ y' &= -y + 2\cdot x\,y \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x' &= 0.3\cdot x - 1,2\cdot x\,y \\ y' &= -0.7\cdot y + 2.5\cdot x\,y \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x' &= -2\cdot x + 5\cdot x\,y \\ y' &= -y + 0.2\cdot x\,y \end{aligned}$$

i) Lassen wir die „Wechselwirkungsterme $x\,y$“ ausser Acht, dann sehen wir, dass sich beide Populationen natürlich vermehren. Weil beide Wechselwirkungsterme negativ sind, heisst das, dass sich die Populationen gegenseitig am Vermehren hindern.

Beispiel: Füchse und Luchse kämpfen um dieselbe Nahrungsquelle.

ii) Ohne Wechselwirkung sterben x und y aus. Die Wechselwirkung zeigt, dass x und y voneinander profitieren. Eine solche Wechselwirkung heisst auch Symbiose. Beispiel: Bienen bestäuben und ernähren sich vom Blumen.

iii) Ohne Wechselwirkung vermehrt sich x, während y ausstirbt. Die Wechselwirkung zeigt, dass y von x profitiert.

Beispiel: Vögel können in Bäumen Nester bauen.

iv) Ohne Wechselwirkung vermehrt sich x, während y ausstirbt. Die Wechselwirkung zeigt, dass x von y behindert wird, während y von x profitiert.

Beispiel: Räuber-Beute-Modell, vergleiche oben.

C.2 S-I-R Modell

Das S-I-R Modell beschreibt die Ausbreitung einer Krankheit.

Die Bevölkerung lässt sich in drei Gruppen aufteilen:

- Gruppe S: ansteckbare Personen (engl. susceptibles). Sie sind bisher gesund.
- Gruppe I: infizierte Personen (engl. infecteds). Sie sind momentan krank.
- Gruppe R: geheilte Personen (engl. recovered). Sie können nicht noch einmal krank werden und stecken auch andere nicht mehr an.

Breitet sich die Krankheit aus, dann ändert sich auch die Anzahl der Personen S, I und R in den einzelnen Gruppen. Wie lassen sich diese „Auswirkungen“ der Gruppen aufeinander modellieren?

Aufgabe 12 - Gleichung im S-I-R Modell

Begründe die einzelnen Differentialgleichungen.

a) Für die Änderungsrate der Gruppe S gilt:

$$S' = -a \cdot S \cdot I \quad (a > 0).$$

Hinweis: Vergleiche mit dem Räuber-Beute-Modell.

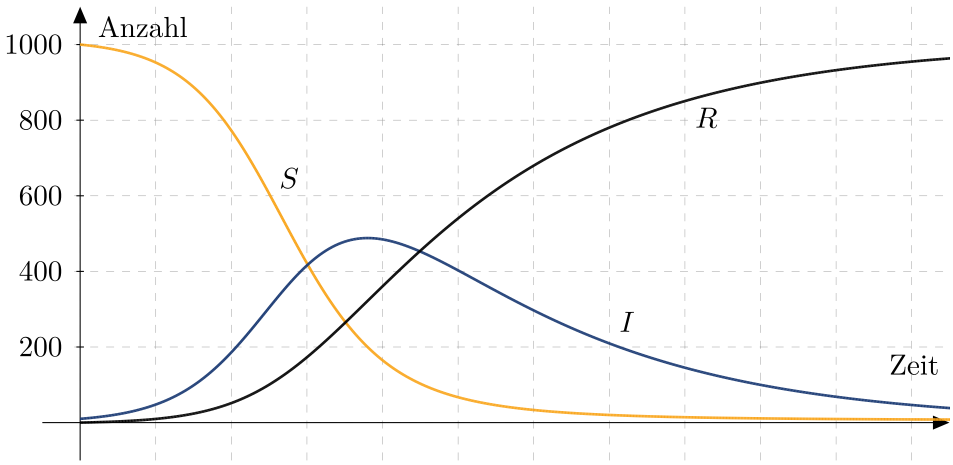
b) Für die Änderungsrate der Gruppe I gilt:

$$I' = a \cdot S \cdot I - b \cdot I.$$

c) Für die Änderungsrate der Gruppe R gilt:

$$R' = b \cdot I \quad (b > 0).$$

Bemerkung - Die Abbildung zeigt den typischen Verlauf eines S-I-R Modells.



In den folgenden Aufgaben werden wir das S-I-R Modell noch ein wenig untersuchen.

Aufgabe 13

a) Zeige: erfüllen S, I und R die genannten Differentialgleichungen, dann bleibt die Gesamtbevölkerung

$$G = S + I + R$$

konstant.

Hinweis: G ist konstant wenn $G' = 0$ gilt.

b) Weil die Gesamtbevölkerung konstant ist, genügt es S und I zu kennen, weil sich dann R direkt bestimmten lässt. Man kann sich also auf das folgende Differentialgleichungssystem beschränken:

$$\begin{aligned} S' &= -a \cdot S \cdot I \\ I' &= a \cdot S \cdot I - b \cdot I. \end{aligned}$$

Siehst du eine Ähnlichkeit mit dem Räuber-Beute-Modell?

Aufgabe 14 - Schwellenwert, $\mathbf{I}' = 0$, Impfung

Wir betrachten das S-I-R Modell für $a = 0.002$ und $b = 0.4$, also das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} S' &= -0.002 \cdot S \cdot I \\ I' &= 0.002 \cdot S \cdot I - 0.4 \cdot I. \end{aligned}$$

Wir wählen die Anfangswerte $S(0) = 1000$ und $I(0) = 10$. Aus medizinischer Sicht ist es interessant, wann die Krankheit ihren „Höhepunkt" erreicht - also das Maximum der Funktion I.

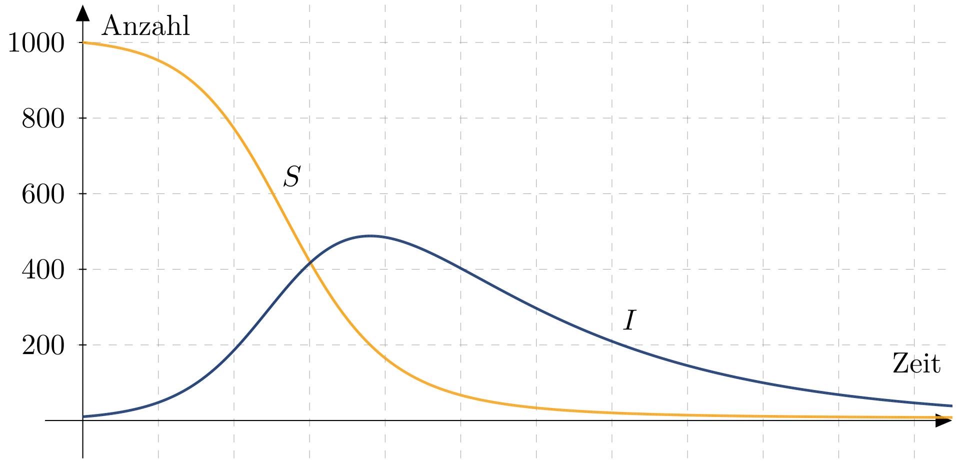
a) Zeige: Die Funktion I hat ihr Maximum bei

$$S = \frac{0.4}{0.0002} = 200$$

ansteckbaren Personen. Der Wert $S = 200$, bei dem I das Maximum erreicht (bzw. I' das Vorzeichen wechselt), heisst *Schwellenwert*.

b) Um eine Ausbreitung der Krankheit zu verringern wird eine Impfung durchgeführt. Wie viele Personen müssten zu Beginn von den 1000 ansteckbaren Personen geimpft werden?

c) Löse Aufgabenteile **a)** und **b)** allgemein, das heisst für $S' = -a \cdot S \cdot I$ and $I' = a \cdot S \cdot I - b \cdot I$.



C.3 Rückblick

- Oft spielen mehrere Grössen zusammen. Solche Wechselwirkungen können wir mit Differentialgleichungssystemen beschreiben.
- Ein bekanntes Beispiel ist das Räuber-Beute-Modell. Für die Mengen der Räuber R und der Beute B besitzt es die Form:

$$\begin{aligned} B' &= a \cdot B - c \cdot B \cdot R \\ R' &= -b \cdot R + d \cdot B \cdot R, \end{aligned}$$

wobei a, b, c und d positive Konstanten sind.

C.4 Lösungen der Aufgaben

Aufgabe 9.

a) Bei maximaler Anzahl der Jäger nimmt die Beutepopulation ab. Bei maximaler Beutepopulation nimmt die Jägerpopulation zu.

b) Im Uhrzeigersinn.

Aufgabe 10.

Lösungen im Text.

Aufgabe 11.

a) und **i)**; **b)** und **iii)**; **c)** und **iv)**; **d)** und **ii)**.

Aufgabe 12.

a) Die Abnahmerate der Anzahl der Gesunden ist proportional zu ihrer eigenen Anzahl und proportional zur Anzahl der Infizierten.

b) Die Zunahmerate der Anzahl der Infizierten ist gleich der Abnahmerate der Anzahl der Gesunden, vermindert um einen Anteil, der proportional zu der Anzahl der Infizierten ist: Diese können nicht noch einmal angesteckt werden.

c) Die Zunahmerate der Anzahl der geheilten Personen is proportional zu der Anzahl der Infizierten.

Aufgabe 13.

a) Die Summe der Zuwachsraten $S' + I' + R'$ ist gleich 0.

b) S geht gegen 0; damit geht I schliesslich auch gegen 0: S und I „sterben aus“.

Aufgabe 14.

a) I erreich sein Maximum dann, wenn $I' = 0$.

b) Die Zahl S muss so reduziert werden, dass zu Beginn der möglichen Epidemie I' auf 0 reduziert wird. S darf damit maximal 200 sein: Es müssen 800 Personen geimpft werden (unter der Voraussetzung, dass diese Impfung vor dieser Infektion sicher schützt!). Dies gilt unabhängig von $I(0)$.

c) Es gilt:

$$S' = -a \cdot S \cdot I \text{ und } I' = a \cdot S \cdot I - b \cdot I.$$

Es muss gelten $I' = 0$, also $S_{\max} = \frac{b}{a}$. Es sollten mindestens $I(0) - S_{\max} = I(0) - \frac{b}{a}$ Personen geimpft werden.