Universität Zürich[UZH]

Knoten, Kettenbrüche und DNA

Anna Beliakova

Gordischer Knoten

O time! thou must untangle this, not I;
It is too hard a knot for me to untie!

WILLIAM SHAKESPEARE, *Twelfth Night*

Der erster Knotentheoretiker

Lord Kelvin hat 1867 die Vermutung geäussert, dass Atome verknotete Fäden aus Äther sind.

Er wollte damit die Stabilität, die Vielfältigkeit und die Spektren von Atomen erklären.

Es entstand also das Problem, Knoten zu klassifizieren.

P.G. Tait, Lord Kelvins Mitarbeiter, hat 25 Jahre daran gearbeitet und ist zu dem Schluss gekommen, dass das Problem sehr schwierig ist.

Der erster Knotentheoretiker

Lord Kelvin hat 1867 die Vermutung geäussert, dass Atome verknotete Fäden aus Äther sind.

Er wollte damit die Stabilität, die Vielfältigkeit und die Spektren von Atomen erklären.

Es entstand also das Problem, Knoten zu klassifizieren.

P.G. Tait, Lord Kelvins Mitarbeiter, hat 25 Jahre daran gearbeitet und ist zu dem Schluss gekommen, dass das Problem sehr schwierig ist.

Der erster Knotentheoretiker

Lord Kelvin hat 1867 die Vermutung geäussert, dass Atome verknotete Fäden aus Äther sind.

Er wollte damit die Stabilität, die Vielfältigkeit und die Spektren von Atomen erklären.

Es entstand also das Problem, Knoten zu klassifizieren.

P.G. Tait, Lord Kelvins Mitarbeiter, hat 25 Jahre daran gearbeitet und ist zu dem Schluss gekommen, dass das Problem sehr schwierig ist.

Der erster Knotentheoretiker

Lord Kelvin hat 1867 die Vermutung geäussert, dass Atome verknotete Fäden aus Äther sind.

Er wollte damit die Stabilität, die Vielfältigkeit und die Spektren von Atomen erklären.

Es entstand also das Problem, Knoten zu klassifizieren.

P.G. Tait, Lord Kelvins Mitarbeiter, hat 25 Jahre daran gearbeitet und ist zu dem Schluss gekommen, dass das Problem sehr schwierig ist.

Was ist ein Knoten?

Sei $S^1 = \{x^2 + y^2 = 1 : x, y \in \mathbb{R}\}$.
Sei $K : S^1 \to \mathbb{R}^3$ eine injektive Abbildung, d.h. $K(x) = K(y) \implies x = y$.

Zwei Abbildungen K_1 und K_2 heissen äquivalent falls man sie ineinander deformieren kann. D.h. es gibt eine Familie von Abbildungen $h_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $t \in [0, 1]$ mit $h_0(x) = x$ und $K_2 = h_1 \circ K_1$.

Die Äquivalenzklasse von K heisst ein Knoten.

Was ist ein Knoten?

Sei $S^1 = \{x^2 + y^2 = 1 : x, y \in \mathbb{R}\}$.
Sei $K : S^1 \to \mathbb{R}^3$ eine injektive Abbildung, d.h.
$K(x) = K(y) \Longrightarrow x = y$.

Zwei Abbildungen K_1 und K_2 heissen äquivalent falls man sie ineinander deformieren kann. D.h. es gibt eine Familie von Abbildungen $h_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $t \in [0, 1]$ mit $h_0(x) = x$ und $K_2 = h_1 \circ K_1$.

Die Äquivalenzklasse von K heisst ein Knoten.

Was ist ein Knoten?

Sei $S^1 = \{x^2 + y^2 = 1 : x, y \in \mathbb{R}\}$.
Sei $K : S^1 \to \mathbb{R}^3$ eine injektive Abbildung, d.h.
$K(x) = K(y) \Longrightarrow x = y$.

Zwei Abbildungen K_1 und K_2 heissen äquivalent falls man sie ineinander deformieren kann. D.h. es gibt eine Familie von Abbildungen $h_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $t \in [0, 1]$ mit $h_0(x) = x$ und $K_2 = h_1 \circ K_1$.

Die Äquivalenzklasse von K heisst ein Knoten.

Was ist ein Knoten?

Sei $S^1 = \{x^2 + y^2 = 1 : x, y \in \mathbb{R}\}$.
Sei $K : S^1 \to \mathbb{R}^3$ eine injektive Abbildung, d.h.
$K(x) = K(y) \Longrightarrow x = y$.

Zwei Abbildungen K_1 und K_2 heissen äquivalent falls man sie ineinander deformieren kann. D.h. es gibt eine Familie von Abbildungen $h_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $t \in [0, 1]$ mit $h_0(x) = x$ und $K_2 = h_1 \circ K_1$.

Die Äquivalenzklasse von K heisst ein Knoten.

Was ist ein Knoten?

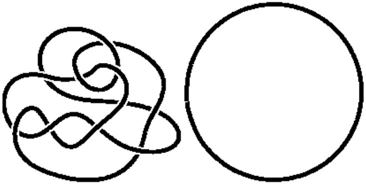
Sei $S^1 = \{x^2 + y^2 = 1 : x, y \in \mathbb{R}\}$.
Sei $K : S^1 \to \mathbb{R}^3$ eine injektive Abbildung, d.h.
$K(x) = K(y) \Longrightarrow x = y$.

Zwei Abbildungen K_1 und K_2 heissen äquivalent falls man sie ineinander deformieren kann. D.h. es gibt eine Familie von Abbildungen $h_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $t \in [0, 1]$ mit $h_0(x) = x$ und $K_2 = h_1 \circ K_1$.

Die Äquivalenzklasse von K heisst ein Knoten.

Knotendiagramme

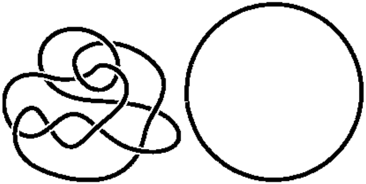
Man stellt Knoten mit Hilfe von Diagrammen dar, d.h. ihren generischen Projektionen auf eine Ebene.



Hauptproblem: Wann repräsentieren zwei Diagramme denselben Knoten?

Knotendiagramme

Man stellt Knoten mit Hilfe von Diagrammen dar, d.h. ihren generischen Projektionen auf eine Ebene.

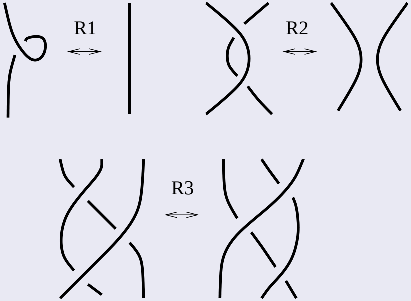


Hauptproblem: Wann repräsentieren zwei Diagramme denselben Knoten?

Reidemeister–Bewegungen

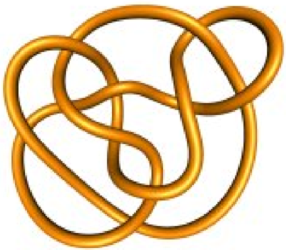
Satz

Zwei Knotendiagramme stellen dann und nur dann ein- und denselben Knoten dar, wenn man sie mit Hilfe von Reidemeister–Bewegungen ineinander überführen kann.



Wann repräsentieren zwei Diagramme den gleichen Knoten?

In 1974 zeigte der amerikanische Anwalt K.A. Perko, dass beide Diagramme denselben Knoten repräsentieren.



Knoteninvarianten

Definition

Jede Eigenschaft eines Knotendiagramms, die sich unter Reidemeister–Bewegungen nicht ändert, heisst Knoteninvariante.

- Alle Invarianten äquivalenter Knoten müssen übereinstimmen.
- Selbst wenn 2009 Invarianten zweier Diagramme übereinstimmen, müssen die Knoten nicht äquivalent sein.

Knoteninvarianten

Definition

Jede Eigenschaft eines Knotendiagramms, die sich unter Reidemeister–Bewegungen nicht ändert, heisst Knoteninvariante.

- Alle Invarianten äquivalenter Knoten müssen übereinstimmen.
- Selbst wenn 2009 Invarianten zweier Diagramme übereinstimmen, müssen die Knoten nicht äquivalent sein.

Knoteninvarianten

Definition

Jede Eigenschaft eines Knotendiagramms, die sich unter Reidemeister–Bewegungen nicht ändert, heisst Knoteninvariante.

- Alle Invarianten äquivalenter Knoten müssen übereinstimmen.
- Selbst wenn 2009 Invarianten zweier Diagramme übereinstimmen, müssen die Knoten nicht äquivalent sein.

Anzahl der 3–Färbungen

Definition

Ein Knotendiagramm heisst 3–gefärbt, falls die folgenden Regeln gelten.

- Jedes Intervall des Diagramms ist entweder schwarz, blau oder orange gefärbt.
- An jeder Kreuzung stossen entweder eine oder alle drei Farben zusammen.

Anzahl der 3–Färbungen

Definition

Ein Knotendiagramm heisst 3–gefärbt, falls die folgenden Regeln gelten.

- Jedes Intervall des Diagramms ist entweder schwarz, blau oder orange gefärbt.
- An jeder Kreuzung stossen entweder eine oder alle drei Farben zusammen.

Anzahl der 3–Färbungen

Definition

Ein Knotendiagramm heisst 3–gefärbt, falls die folgenden Regeln gelten.

- Jedes Intervall des Diagramms ist entweder schwarz, blau oder orange gefärbt.
- An jeder Kreuzung stossen entweder eine oder alle drei Farben zusammen.

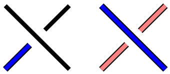
Anzahl der 3–Färbungen

Definition

Ein Knotendiagramm heisst 3–gefärbt, falls die folgenden Regeln gelten.

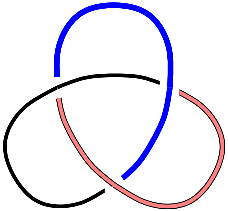
- Jedes Intervall des Diagramms ist entweder schwarz, blau oder orange gefärbt.
- An jeder Kreuzung stossen entweder eine oder alle drei Farben zusammen.

Erlaubt

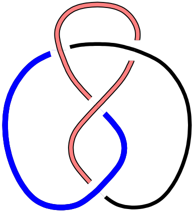


Verboten

Welches Diagramm ist 3–gefärbt?



a) Kleeblattschlinge



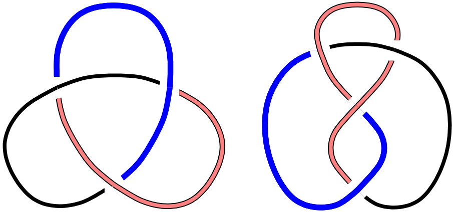
b) Achterknoten

Satz

Die Anzahl der 3–Färbungen eines Knotendiagramms ist eine Knoteninvariante.

Die Kleeblattschlinge ist kein trivialer Knoten!
Kleeblattschlinge und Achterknoten sind verschieden!

Welches Diagramm ist 3–gefärbt?



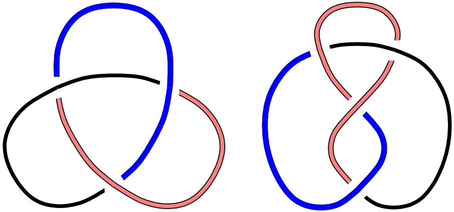
a) Kleeblattschlinge b) Achterknoten

Satz

Die Anzahl der 3–Färbungen eines Knotendiagramms ist eine Knoteninvariante.

Die Kleeblattschlinge ist kein trivialer Knoten!
Kleeblattschlinge und Achterknoten sind verschieden!

Welches Diagramm ist 3–gefärbt?



a) Kleeblattschlinge b) Achterknoten

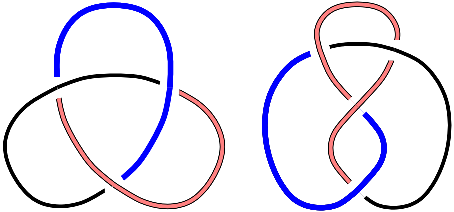
Satz

Die Anzahl der 3–Färbungen eines Knotendiagramms ist eine Knoteninvariante.

Die Kleeblattschlinge ist kein trivialer Knoten!

Kleeblattschlinge und Achterknoten sind verschieden!

Welches Diagramm ist 3–gefärbt?



a) Kleeblattschlinge   b) Achterknoten

Satz

Die Anzahl der 3–Färbungen eines Knotendiagramms ist eine Knoteninvariante.

Die Kleeblattschlinge ist kein trivialer Knoten!
Kleeblattschlinge und Achterknoten sind verschieden!

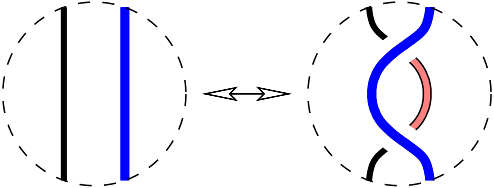
Beweis

Die Anzahl ändert sich nicht unter Reidemeister–Bewegungen.

$\square$

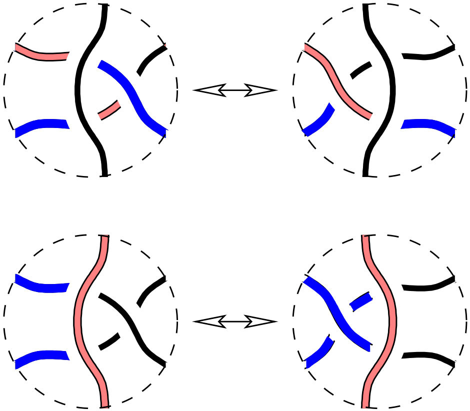
Beweis

Die Anzahl ändert sich nicht unter Reidemeister–Bewegungen.



Beweis

Die Anzahl ändert sich nicht unter Reidemeister–Bewegungen.



Verschlingungen

Definition

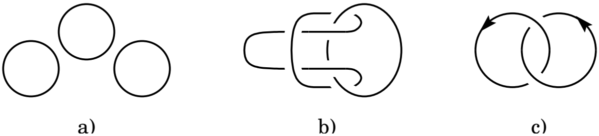
Eine Äquivalenzklasse der injektiven Abbildungen $L : S^1 \cup S^1 \cup \cdots \cup S^1 \to \mathbb{R}^3$ heisst eine Verschlingung.

a), b) Triviale Verschlingung c) Hopf–Verschlingung orientiert

Verschlingungen

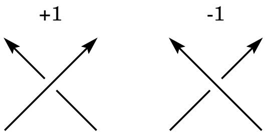
Definition

Eine Äquivalenzklasse der injektiven Abbildungen
$L : S^1 \cup S^1 \cup \cdots \cup S^1 \to \mathbb{R}^3$ heisst eine Verschlingung.



a), b) Triviale Verschlingung c) Hopf–Verschlingung orientiert

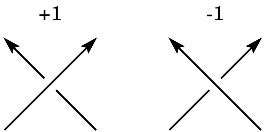
Verschlingungszahl



Definition

Die Verschlingungszahl zweier Komponenten einer orientierten Verschlingung ist die Hälfte der Summe aller Vorzeichen der Kreuzungen dieser Komponenten.

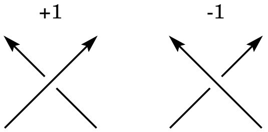
Verschlingungszahl



Definition

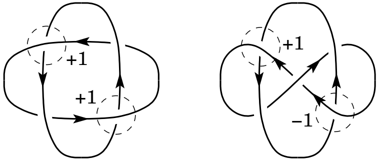
Die Verschlingungszahl zweier Komponenten einer orientierten Verschlingung ist die Hälfte der Summe aller Vorzeichen der Kreuzungen dieser Komponenten.

Verschlingungszahl



Definition

Die Verschlingungszahl zweier Komponenten einer orientierten Verschlingung ist die Hälfte der Summe aller Vorzeichen der Kreuzungen dieser Komponenten.



Verschlingungszahl

Satz

Die Verschlingungszahl ist eine Invariante der orientierten Verschlingung.

Die Hopf–Verschlingung ist nicht trivial.
Die Borromäischen Ringe kann man mit Hilfe der Verschlingungszahl von der trivialen Verschlingung nicht unterscheiden.

Verschlingungszahl

Satz

Die Verschlingungszahl ist eine Invariante der orientierten Verschlingung.

Die Hopf–Verschlingung ist nicht trivial.

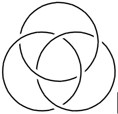
Die Borromäischen Ringe kann man mit Hilfe der Verschlingungszahl von der trivialen Verschlingung nicht unterscheiden.

Verschlingungszahl

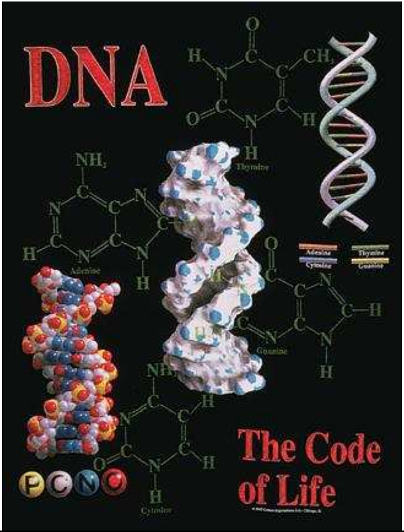
Satz

Die Verschlingungszahl ist eine Invariante der orientierten Verschlingung.

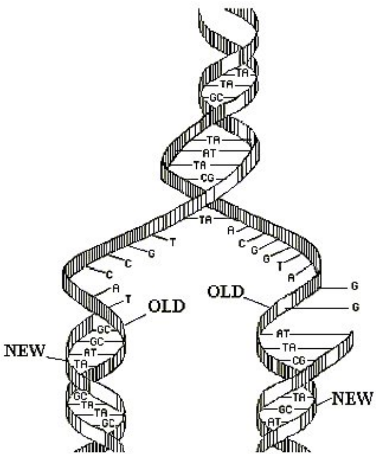
Die Hopf–Verschlingung ist nicht trivial.

Die Borromäischen Ringe  kann man mit Hilfe der Verschlingungszahl von der trivialen Verschlingung nicht unterscheiden.

Crick–Watson Modell des DNA-Moleküls (1953)



Teilung der DNA



Teilung der DNA

Was ist die Verschlingungszahl der Mutter– und Tochter–Moleküle nach der Teilung?

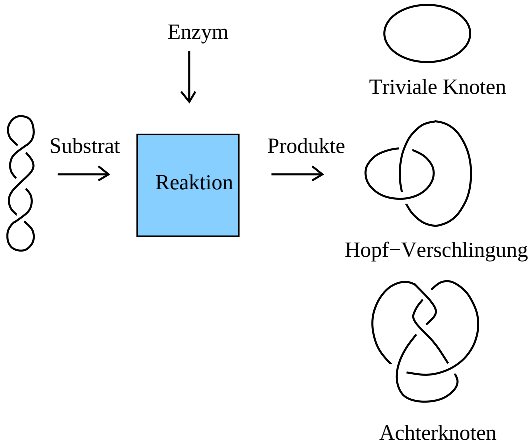
250 000 !

Teilung der DNA

Was ist die Verschlingungszahl der Mutter– und Tochter–Moleküle nach der Teilung?

250 000 !

Topoenzymologie

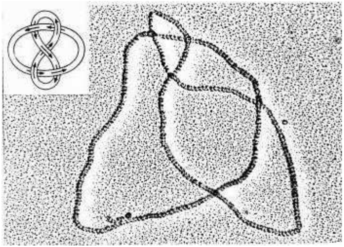


Topoenzymologie

Hauptproblem: Die lokale Wirkung des Enzyms aus der Form der Produkte abzuleiten.

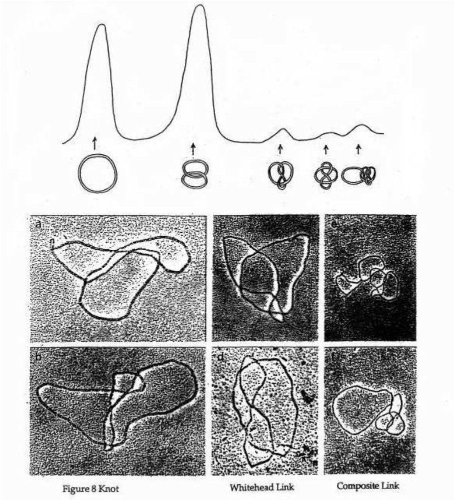
Wirkung der Tn3 Resolvase auf die DNA

Produkte: Hopf-Verschlingung, Achterknoten, Whitehead-Verschlingung

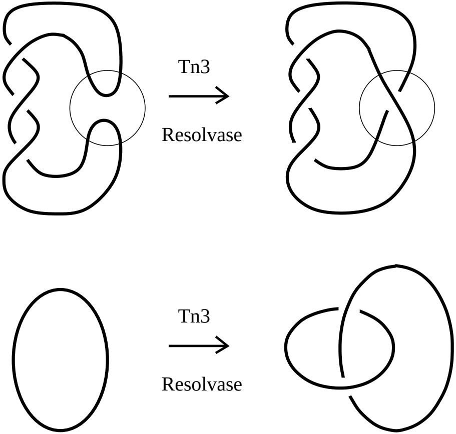


Bilder von Prof. N. Cozzarelli (Berkeley)

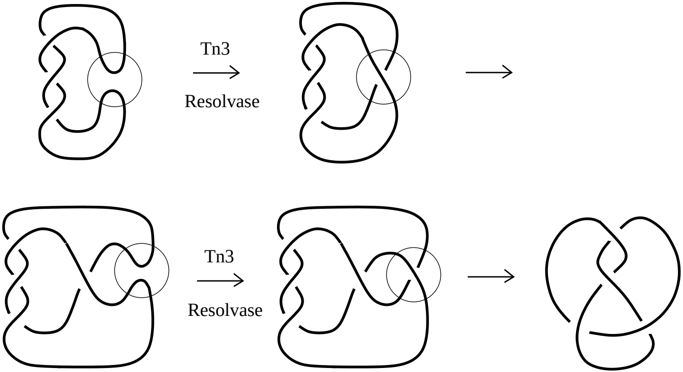
Spektrum der Produkte der Tn3 Resolvase



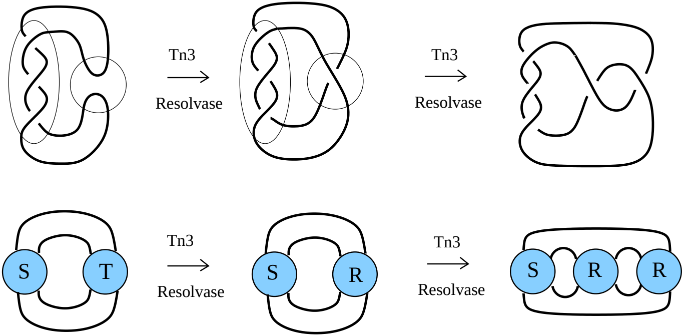
Vermutung: Einfache Wirkung



Vermutung: Zweifache Wirkung

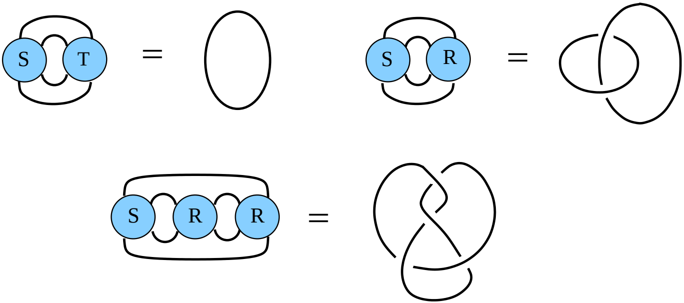


Notation


Tn3
Resolvase
Tn3
Resolvase
S
T
Tn3
Resolvase
S
R
Tn3
Resolvase
S
R
R

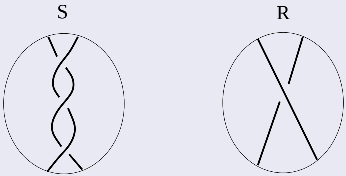
Problem

Finde alle **S** und **R**, für welche die folgenden Relationen gelten.

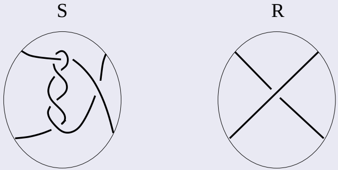


Satz (De Witt Sumners, 1988)

Das Problem hat nur die folgenden zwei Lösungen:



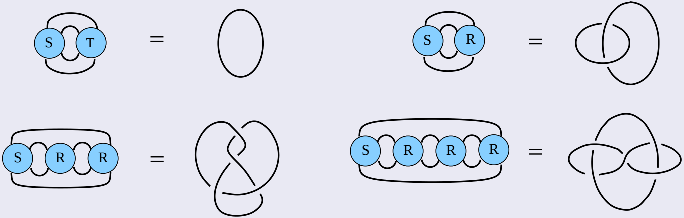
oder



Der Beweis basiert auf der John H. Conway Klassifizierung der rationalen Tangles.

Lemma (De Witt Sumners)

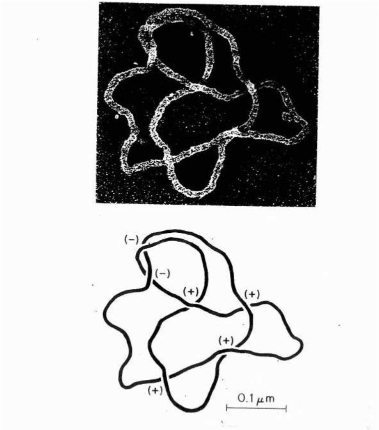
Falls S und R die folgenden Relationen erfüllen,



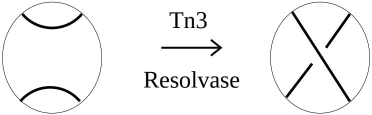
dann gilt nur die erste Lösung.

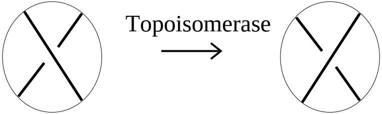
Vorhersage der Theorie

6_2 Knot als Resultat der 4-fachen Wirkung von Tn3 wurde experimentell beobachtet!



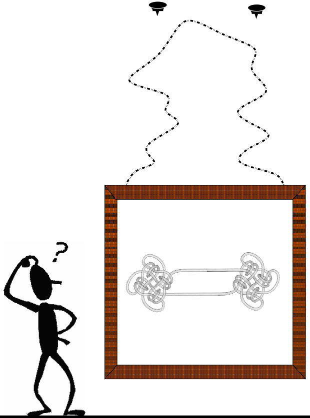
Lokale Wirkung von Enzymen





Aufgabe

Wie kann man ein Bild mit einer genügend langen Schnur an zwei vorgegebenen Nägeln aufhängen, so dass das Bild runterfällt, wenn irgendeiner der beiden Nägel entfernt wird?

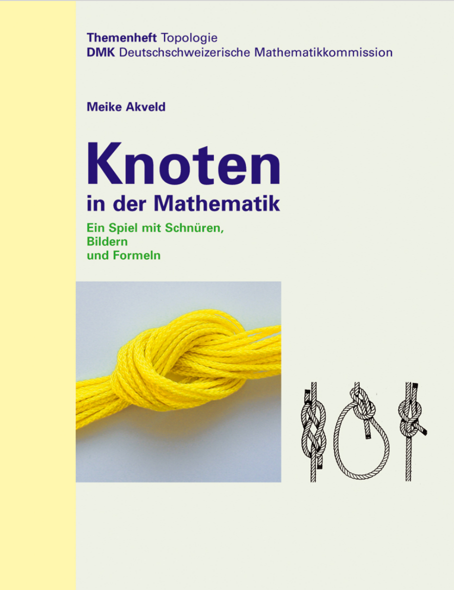


Junior Euler Society

JES schafft ein Forum, in dem grundlegenden mathematischen Fragen bearbeiten werden:

- an der Universität Zürich
- im Kreis von Gleichgesinnten
- unter wissenschaftlicher Anteilung.

Angesprochen sind MittelschülerInnen.


Themenheft Topologie
DMK Deutschschweizerische Mathematikkommission
Meike Akveld
Knoten
in der Mathematik
Ein Spiel mit Schnüren,
Bildern
und Formeln