

Aus: Beiträge zum Mathematikunterricht 2012

Heinz SCHUMANN, Weingarten

Ungleichungen ?

Ein Beispiel für den mathematischen Substanzverlust in den Curricula

Wir gehen aus von der These: Unter dem Einfluss gesellschaftlicher Verhältnisse (egalitäre, populistische, hedonistische, konsumistische, wertrelativistische, egozentrische, ... Tendenzen) entwickeln sich die Curricula des Faches Mathematik an allgemeinbildenden Schulen von substanziellen mathematischen Inhalten weg. – Man kann den Eindruck gewinnen, dass unsere Gesellschaft, einschließlich ihrer die Bildungspolitik bestimmenden bzw. beeinflussenden Kreise, sich endlich von den harten Fakten und Prozeduren der Elementarmathematik emanzipieren möchte. – Ein Beispiel für den damit verbundenen Verlust an elementarmathematischer Substanz ist der Unterrichtsgegenstand „Ungleichungen“. Das zeigen u. a. folgende Auszüge aus den **gymnasialen Lehrplänen/Bildungsplänen (Baden-Württemberg) über Ungleichungen:**

(Vorläufiger) Lehrplan 1978-1981

Klasse 7: Lineare Ungleichungen

Klasse 8: Bruch-Ungleichungen, Lineare Optimierung

Klasse 9: Quadratische Ungleichungen

Klasse 10: Exponentielle und logarithmische Ungleichungen

Bildungsplan 1994

Klasse 8: Lineare Ungleichungen, Bruch-Ungleichungen (fakultativ)

Klasse 9: Quadratische Ungleichungen (fakultativ)

Bildungsplan 2004

Klasse 8: Lineare Ungleichungen mit einer Variablen.

Der Schwund ist offensichtlich. Möglicherweise verdankt der Verbleib der linearen Ungleichungen im Bildungsplan der Existenz von PISA-Testaufgaben zum Lösen solcher Ungleichungen. Ein verhängnisvolle Rolle spielt bei der Reduzierung der mathematischen Inhalte auch die 2004 eingeführte Trennung des Curriculums in das Kern-Curriculum und das Schul-Curriculum – ein allgemeiner curricularer ‚Sündenfall‘ – mit dem Effekt, dass die Unterrichtszeit für das Schul-Curriculum missbraucht wird zum Üben des Kerncurriculum-Stoffes.

Fazit: *Die aktuellen mathematischen Curricula allgemeinbildender Schulen in Deutschland (B.-W.) enthalten keine bzw. nicht konsistente Inhalte über „Ungleichungen“ im Gegensatz zu vielen anderen Ländern (z. B. USA, Japan, China, Russische Föderation, Griechenland).*

Es sei noch angemerkt, dass die in mathematischen Bundeswettbewerben und den deutschen Mathematik-Olympiaden gestellten Beweisaufgaben zu

Ungleichungen keinen Bezug zum Mathematikunterricht allgemeinbildender Schulen haben, also auch von dort keine vorbereitende Unterstützung erfahren.

Ungleichungen lösen - Leistungen deutscher Schüler/Studierender

Zu der Ungleichung $5x + 5/3 \leq -2x - 2/3$ (TIMSS/III-Mehrfachauswahlaufgabe, 1995) bestimmen nur 53% der Schüler der gymnasialen Abschlussklassen die richtige Lösung im Gegensatz zum internationalen Mittel von 73%. Zusammen mit weiteren entsprechenden TIMSS-Ergebnissen kann man feststellen:

Fazit: *Die Leistungen deutscher Schüler und Schülerinnen beim Lösen von linearen Ungleichungen sind im internationalen Vergleich als schwach zu bewerten.*

Einen Hinweis auf die Auswirkungen des Ungleichungsschwundes gibt eine Voruntersuchung zum Thema „Lösen von Ungleichungen durch Lehramtsstudierende“: Ca. Dreiviertel von 38 Studierenden des 4. Semesters im Studiengang Mathematik/Realschule an einer Pädagogische Hochschule in B.-W. (Teilnehmer einer Lehrveranstaltung zur Didaktik der Algebra, Wintersemester 2011/2012) lösen die Ungleichung $ax + b > 0$ für $a \neq 0$ wie die entsprechende lineare Gleichung, also ohne Fallunterscheidung!

Didaktik der „Ungleichungslehre“ heute und gestern

Als aktuelles Standardwerk für die Didaktik der Algebra ist das Werk von Vollrath & Weigand, 3. Aufl. 2007: „Algebra in der Sekundarstufe“ zu bezeichnen. Bereits auf S. 7 „Auswahl und Anordnung von Inhalten der Algebra – Gerüst des Lehrgangs“ wird die Ordnungsstruktur von $\mathbb{N}(+, \cdot, <)$, $\mathbb{B}^+(+, \cdot, <)$, $\mathbb{Z}(+, \cdot, <)$, $\mathbb{Q}(+, \cdot, <)$, $\mathbb{R}(+, \cdot, <)$ ausgeklammert und damit der Aspekt des Arbeitens mit bzw. Lösens von Ungleichungen. Fachinhaltlich kommt also zum Gleichungslösen gegenüber Leonhard Eulers „Vollständigen Anleitung zur Niederen und Höheren Algebra“, Teil 2, 1797, nicht viel Neues hinzu. Den Ungleichungsmangel findet man auch auf der zu diesem Buch passenden Website <http://www.schulalgebra.de/>. Obwohl die klassischen Argumente für die unterrichtliche Behandlung von Ungleichungen aufgeführt sind (S. 215), wird mit der nebulösen Begründung (S. 216) „In der Praxis wollten sich allerdings die erwarteten Folgen nicht einstellen.“ die Bedeutung von Ungleichungen herabgesetzt. Ist das ‚Praxisargument‘ auch eines für die didaktische Nichtbehandlung eines Gegenstands? In diesem Zusammenhang sei erwähnt, dass ein junger Mathematikdidaktiker, angesprochen auf einen in seinem Mathematikdidaktik-Buch fehlenden Ungleichungsinhalt äußerte: ‚Das kommt doch nicht mehr in den Lehrplänen vor!‘. Immerhin steht im gleichnamigen Vorläufer des Buches von Vollrath & Weigand noch: „Entsprechend dem unterschiedlichen Gewicht von Gleichungen und Ungleichungen in der Mathematik sollte man Un-

gleichungen gegenüber den Gleichungen wieder etwas zurücknehmen. Sie kommen vor allem als Kontrastbeispiele infrage, um deutlich zu machen, daß es mehrelementige Lösungsmengen gibt.“ (Vollrath 1994/1999 S. 191). In diesem Buch werden wenigstens noch die Bruchgleichungen und die quadratischen Ungleichungen behandelt – und auch das Lineare Optimieren, eine bedeutenden Methode des Operation Research (die komplexen linearen Optimierungsaufgaben passen wohl nicht in das Format der heutigen Sachaufgaben für Tests). Das Lineare Optimieren kommt auch in Greefrath 2010: Didaktik des Sachrechnens, einem ebenfalls aktuellen Werk für die Lehrerbildung, nicht vor. In diesem Buch fehlt zudem die vielfältige Nutzung bzw. Interpretation von „ $<$ “ und „ $>$ “ im Alltag und damit in Sachaufgaben.

– Problematisch wird die Behandlung von Wurzelgleichungen, wenn man „ \geq “ vermeiden will und dann nach sogenannten Gewinn-Umformungen durch eine Probe auf richtige Lösungen prüfen muss (Vollrath & Weigand, 2007, S. 258-259). Wie kann ein Schüler bei diesem Missbrauch der Probe unterscheiden, ob es sich um einen Umformungs- bzw. Rechenfehler oder eine falsche Lösung handelt? Im Vergleich mit der mathematisch angemessenen Methode der Äquivalenzumformung (Vollrath 1974: Didaktik der Algebra, S. 113) wäre hier eine didaktische Diskussion unter dem Motto: „Erst denken, dann umformen!“ angebracht.

Fazit: *Die aktuelle mathematikdidaktische Standardliteratur spiegelt den Verlust bzw. Mangel an „Ungleichungslehre“ wider.*

Folgerung: *Angehende Lehrer und Lehrerinnen erfahren wenig oder nichts über die betreffende Didaktik.*

Wie steht es um die Thematisierung von Lernprozessen beim Lösen von Ungleichungen?

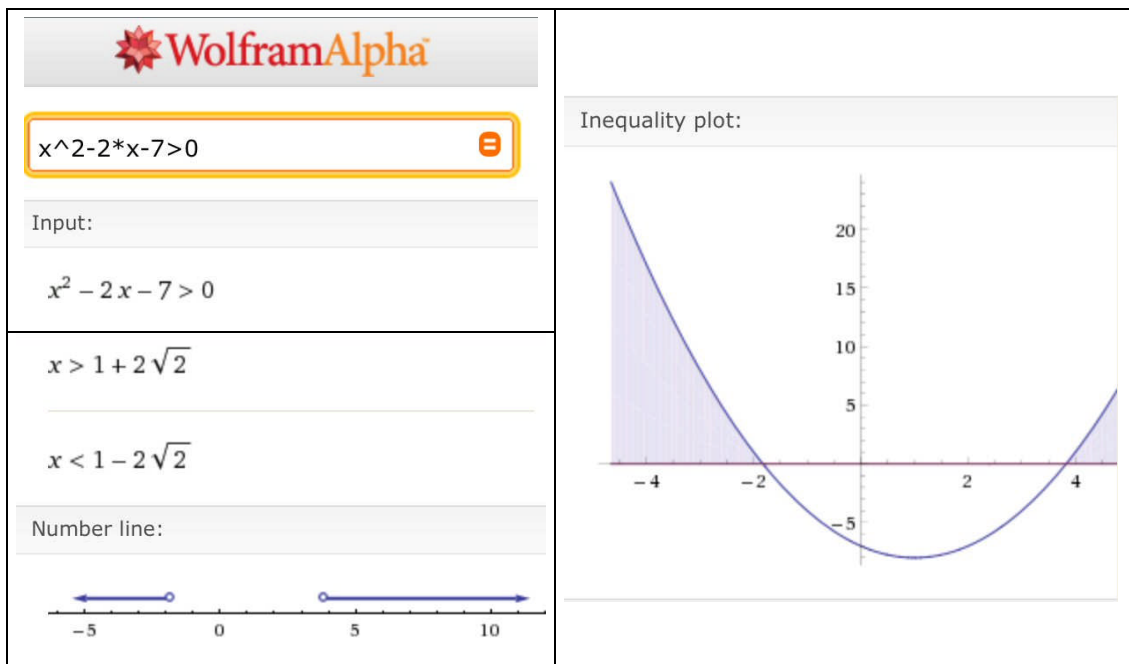
In Malle 1992: „Didaktische Probleme der elementaren Algebra“ findet sich keine Berücksichtigung des Lösens von Ungleichungen im Gegensatz zu den im Internet recherchierbaren Forschungsbeiträgen in entsprechenden internationalen Zeitschriften. Neuere deutsche Forschungsbeiträge darüber gibt es wohl nicht. – Also, kann und soll ein Thema beforscht werden, wenn es nicht mehr in der Schule behandelt wird?

Fazit: *Die lernprozessorientierte Erforschung des aspektreichen Unterrichtsgegenstandes „Ungleichungen“ weist in Deutschland erhebliche Defizite auf.*

Ungleichungen und Neue Medien

Wir beschränken uns hier auf die im Internet vorhandenen Neuen Medien, so wie sie auch auf Smartphones verfügbar sind. Google weist ca. 443 000 deutschsprachige Links zum Thema Ungleichungen auf (Februar 2012).

Fast komplette computeralgebraische Ungleichungslösungen bieten: web-Mathematica-widgets und WolframAlpha. Ein Smartphone-App-Beispiel:



Nicht professionelle Lösungsautomaten für Ungleichungen haben z. T. fehlerhafte Lösungsausgaben: z. B. gibt der Solver von WebMATH für $(7x - 4)/(x^2 + x - 6) > 0$ nur die Teillösung $x > 4/7$ aus.

Es gibt eine Vielzahl tutorieller Materialien u. a. YouTube-Instruktionsvideos über das Lösen von Ungleichungen.

Fazit: *Das Potenzial der im Internet verfügbaren didaktisch relevanten Materialien zum Thema „Ungleichungen“ muss genutzt werden. Es ist eine mathematikdidaktische Aufgabe, die Online-Materialien zu sichten, auf ihre Eignung für den Mathematikunterricht hin zu bewerten, ihre Lernwirksamkeit zu untersuchen und Unterrichtskonzepte für ihre Nutzung zu entwickeln.*

Zusammenfassung: *Das Lösen, Beweisen und Anwenden von Ungleichungen ist ein wichtiger Gegenstand der Elementarmathematik (Arithmetik, Algebra, Geometrie, Analysis, Stochastik und Angewandte Mathematik). Die Inhalte der Elementarmathematik sind Bestandteil einer globalen (mathematischen) Kultur; als solche sind sie intersubjektiv und interkulturell vermittelbar; sie haben deswegen weltweit für den Mathematikunterricht normative Bedeutung.*

Folgerung: *Der Unterrichtsgegenstand „Ungleichungen“ ist in den Curricula sowohl allgemeinbildender Schulen als auch der Lehrerbildung in Deutschland angemessen zu berücksichtigen. – Das bloße Lösen von Ungleichungen genügt nicht.*