Kantonale Mittelschule Seetal

Maturitätsprüfung 2008
Klassen K4 , L6a und L6b

Mathematik

- **Zeit: 3 Stunden** welche
- **Erlaubte Hilfsmittel: Formelsammlung, Taschenrechner TI-89**
- **Die Lösungswege müssen klar dargestellt sein. Sie werden bewertet.**
- **Trennen Sie die einzelnen Teilaufgaben klar durch Striche ab und beginnen Sie jede der 5 Aufgaben auf einer neuen Seite.**
- **Schreiben mit Bleistift ist nicht erlaubt.**
- **Für die Note 6 sind 43 der möglichen 50 Punkte erforderlich.**
- **Die anfallenden Gleichungen und Ableitungen sind ohne Taschenrechnerprogramme ("solve", ...) zu lösen, sofern nicht anders angegeben.**

Nun wünschen wir Ihnen einen klaren Kopf und viel Erfolg!

1. **Analysis** (a: 2P, b: 2P, c: 2P, d: 2P, e: 2P)

Gegeben ist die Funktion $f(x)=\dfrac{x^2-2ax+a^2}{x^2-4x+4}-4$

(a ist ein beliebiger reeller Parameter).

a) Bestimmen Sie die Lage und die Art der Definitionslücke.

b) Bestimmen Sie die Nullstellen.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Extremums.

d) Bestimmen Sie die x-Koordinate des Wendepunktes.

e) Setzen Sie den Parameter a=1 und skizzieren Sie den Graphen. Erhöhen Sie nun den Wert des Parameters solange, bis Sie markante Veränderungen des Verhaltens der Funktion feststellen. Diskutieren Sie diese Veränderungen ausführlich in Hinsicht auf folgende Gesichtspunkte:

I Graph der Funktion
II Art der Definitionslücken
III Nullstellen

Alle Aussagen sind zu begründen bzw. mit Zeichnungen zu erläutern.

2. **Vektoren / Extremwert** (a: 2P, b: 1P, c: 2P, d: 3P, e: 2P)

Zwei Ortschaften A und B sind durch folgende Koordinaten gegeben: A(0/300) km ! und B(400/0). Zur Zeit t=0 befindet sich ein ein Auto im Ursprung des Koordinatensystems und fährt mit der Geschwindigkeit 50 km/h in Richtung Ortschaft A.
Zur gleichen Zeit befindet sich ein Eisenbahnzug in der Ortschaft A und bewegt sich mit 100 km/h in Richtung Ortschaft B.

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen (=Ortsvektor in Funktion der Zeit) der beiden Fahrzeuge auf.

b) Zu welcher Zeit überquert der Eisenbahnzug die x-Achse?

c) Wie weit ist der Eisenbahnzug zu diesem Zeitpunkt vom Auto entfernt?

d) Entwickeln Sie die Gleichung, die den gegenseitigen Abstand der beiden Fahrzeuge im Laufe der Zeit darstellt.

e) Zu welchem Zeitpunkt ist dieser Abstand minimal?

3. **Wahrscheinlichkeitsrechnung** (a: 1P, b: 1P, c: 2P, d: 2P, e: 2P, f: 2P)

In einem Gymnasium mit 640 Personen (=Schülerinnen+Schüler) sind die Mädchen mit 65% in der Mehrheit. 12,5% der Jungs und 60 Mädchen rauchen.

a) Wie viele Personen rauchen insgesamt am Gymnasium?

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebig herausgegriffene Person raucht?

In einer Schulklasse dieses Gymnasiums befinden sich 8 Jungs und 13 Mädchen.

c) Jemand wird beim Rauchen gesehen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich dabei um einen Jungen handelt?

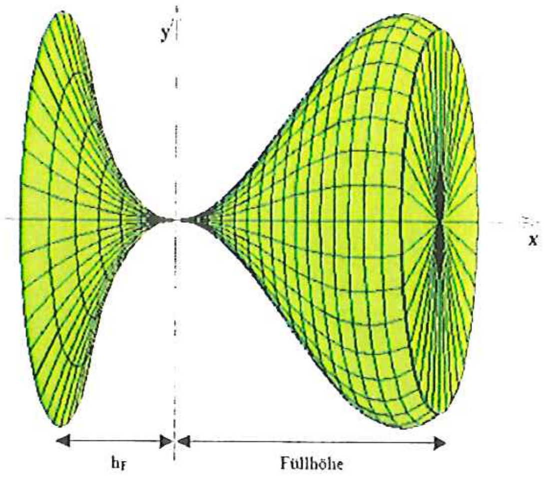
d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in dieser Klasse mindestens drei Mädchen rauchen?

e) Wie gross muss eine Gruppe von Jungs sein, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90% mindestens einer von ihnen Raucher ist?

f) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Gruppe von 100 Jungs mindestens 15 und weniger als 25 Raucher sind?

4. **Analysis** (a: 3P, b: 2P, c: 2P, d: 3P)

Eine Getränkeherstellungsfirma will einen neuen Softdrink lancieren. Dieser Drink sollte in einem neu entworfenen Glas serviert werden.



Die neuen Gläser werden entworfen mit Hilfe der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2, \quad \text{(Einheit in cm)}$$

die man um die x-Achse rotieren lässt (siehe dreidimensionale Abbildung rechts).

Der Fuss des Glases soll den gleichen Durchmesser wie der Kelch an seiner breitesten Stelle haben.
Die Lösung aller Gleichungen können mit dem TR ermittelt werden.

a) Bestimmen Sie die Nullstellen, die Extrema und den Wendepunkt der Funktion f(x)

b) Bestimmen Sie die Höhe h_F des Fusses

c) Berechnen Sie die Füllmenge (Volumen) des Glases, wenn die Füllhöhe von x=0 aus 3,5 cm beträgt.

d) Berechnen Sie die Höhe des Drinks h_D, wenn eine ganze Dose von 330 cm^3 auf einmal serviert wird.

5. Exponentialfunktion / Analysis (a: 1P, b: 2P, c: 3P, d: 1P, e: 3P)

In einer chemischen Fabrik wird für einen Herstellungsprozess ein flüssiger Rohstoff benötigt. Die Flüssigkeit wird in einem Vorratsbehälter von 228l Inhalt aufbewahrt, aus welchem kontinuierlich entnommen wird.

Zu einem bestimmten Zeitpunkt beträgt die momentane Entnahmerate 3.2 l/Tag und 46% des Vorrats sind aufgebraucht. Nun wird bekannt, dass der Rohstoff auf dem Markt nicht mehr erhältlich ist, und der Verantwortliche für den Prozess macht sich Gedanken über die Zukunft des Herstellungsprozesses: Wie lange würde der noch verbleibende Vorrat ausreichen,

a) wenn die Entnahmerate konstant auf 3.2 l/Tag gehalten wird?

b) wenn die anfängliche Entnahmerate von 3.2 l/Tag jeden Tag ~~kontinuierlich~~ um 0.04 l/Tg zunimmt?

c) wenn die Entnahmerate jeden Tag kontinuierlich um 2% zunimmt?

d) wenn die Entnahmerate jeden Tag kontinuierlich um 1% reduziert werden kann?

e) Um wieviel Prozent müsste die Entnahmerate täglich reduziert werden, damit der Vorrat theoretisch unendlich lange hält? Wie gross wäre dann der momentane Entnahmerate nach 105 Tagen?