

## Mathematik

2009

## Maturitätsprüfung

Klasse 4na

**Zeit: 4 Stunden**

**Die Aufgaben Nr.1-6 geben jeweils maximal 6 Punkte.**

**Die Aufgaben Nr.7-10 geben jeweils maximal 3 Punkte.**

**Bewertet wird ausser dem richtigen Ergebnis auch der korrekt dargestellte Lösungsweg.**

1. Der Graph einer Polynomfunktion  $f$  3.Grades hat in  $W(-1.5/-2.5)$  seinen Wendepunkt. Zudem berührt der Graph an der Stelle  $x = 1$  die Tangente  $t: y = 2.5 \cdot x + 2.5$ 
  - a) Bestimme die Funktionsgleichung von  $f$  und zeichne den Graphen in einem Koordinatensystem auf.
  - b) Die Gerade  $t$  und der Graph von  $f$  begrenzen zusammen ein endliches Flächenstück  $F$ . Berechne dessen Flächeninhalt.
  - c) Es gibt eine zu  $t$  parallele Tangente an  $f$ . Bestimme ihre Gleichung und berechne den Abstand der beiden parallelen Geraden.
  
2. Gegeben ist die Funktion  $f_p(x) = \sqrt{x^2 + 4} - p \cdot x$ .
  - a) Es sei  $p = 0.5$ .

Der Graph von  $f_{0.5}$  schliesst im Intervall  $[0, 5]$  zusammen mit der  $x$ -Achse ein Flächenstück ein. Dieses Flächenstück wird um die  $y$ -Achse rotiert.  
Welches Volumen besitzt der Rotationskörper ?
  - b) Es ist weiterhin  $p = 0.5$ :

Man lege nun an der Stelle  $x = 4$  die Tangente  $t$  an den Graphen von  $f_{0.5}$ . Die Gerade  $t$  bildet zusammen mit der (negativen)  $x$ -Achse und der  $y$ -Achse ein Dreieck.  
Berechne den Flächeninhalt dieses Dreiecks.
  - c) Nun ist  $p \in \mathbb{R}$  beliebig.

Drücke den Flächeninhalt  $A$  des oben beschriebenen Dreiecks mittels einer Funktion  $A(p)$  aus, indem Du die Rechnung aus b) allgemein durchführst !  
Für welchen Wert von  $p$  ist die Fläche nicht definiert und warum nicht ?

3. Ein Düsen-Jet hat eine Landegeschwindigkeit von 125m/s. Bei der Landung auf einem Flugzeugträger wird er mit einem Fangseil und mit Bremsschirmen abgebremst. Die Bremskraft, die der Jet dabei nach dem Aufsetzen erfährt, ist näherungsweise proportional zur dritten Wurzel aus dem Quadrat der Momentangeschwindigkeit.

Die Masse des Jets soll  $m = 15'000$  kg betragen.

- Stelle in Abhängigkeit des Proportionalitätsfaktors  $k$  ein AWP für  $v(t)$  auf und löse es mit Hilfe des TI-89.
- Wie lange dauert es, bis der Jet steht und welche Strecke hat er in dieser Zeit zurückgelegt ?  
Bestimme den Proportionalitätsfaktor  $k$ , wenn der Jet nach 150m stehen muss !
- Berechne die maximale Bremsbeschleunigung, die während des Bremsvorgangs auftritt.  
Das wievielfache der 'üblichen' Erdbeschleunigung ( $=9.81\text{m/s}^2$ ) muss der Pilot dabei aushalten ?

4. Gegeben ist die komplexe Funktion  $f$  mit  $f(z) = \frac{z - 4i}{1 - 2z}$ .

- Bestimme die Fixpunkte der Abbildung und erkläre, warum es genau zwei Fixpunkte geben muss.
- Bestimme das Bild des Einheitskreises (Mittelpunkt  $M(0/0)$ , Radius  $r = 1$ ) unter  $f$ .
- Welchen Radius müsste ein Kreis mit Mittelpunkt  $M(0/0)$  haben, damit er bei der Abbildung unter  $f$  in eine Gerade übergeht ?

5. Eine Brauerei veranstaltet ein Gewinnspiel und bedruckt dazu die Innenseiten der Kronkorken mit 10 verschiedenen Buchstaben, darunter 'B', 'E', 'I' und 'R'. Wir nehmen zuerst an, jeder der 10 Buchstaben erscheine mit derselben Wahrscheinlichkeit.

Ziel des Gewinnspiels ist es, mit vier Deckeln das Wort 'BIER' zu schreiben und an die Brauerei einzusenden. Jemand kauft ein Sixpack mit 6 Flaschen.

- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter diesen 6 Deckeln, die gewünschten 4 Buchstaben auftauchen ?
- Wie viele Flaschen muss man kaufen, um mit mindestens 98%-iger Sicherheit wenigstens einmal den Buchstaben 'B' zu erwischen ?

Jemand hegt den Verdacht, dass die Buchstaben nicht mit denselben Wahrscheinlichkeiten auftauchen und die vier 'Ziel-Buchstaben' absichtlich seltener als die übrigen vorhanden sind. Eine Stichprobe bei 500 Flaschen ergibt folgendes Ergebnis: 178 der 500 gesammelten Buchstaben sind 'B', 'E', 'I' oder 'R'; unter den restlichen 322 Deckeln befinden sich andere Buchstaben.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit tauchen in einer 500er-Stichprobe die Buchstaben 'B', 'E', 'I', 'R' höchstens 178 mal auf, wenn man von gleicher Verteilung aller 10 Buchstabensorten ausgeht ?
- Ermittle aufgrund der obigen Stichprobe das zweiseitige 98%-Konfidenzintervall für den Anteil der vier 'Ziel-Buchstaben'.

6. Gegeben sind die Punkte  $A(12/0/-3)$ ,  $B(0/12/-3)$  und  $C(12/12/9)$ , sowie die

$$\text{Gerade } g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- Weise nach, dass das Dreieck ABC gleichseitig ist.
- Bestimme die Koordinaten beider Spitzen D, für die der Körper ABCD ein reguläres Tetraeder ist.
- Es gibt eine Pyramide ABCS mit der Spitze S auf g, so dass ihre Seitenflächen rechtwinklig sind mit den rechten Winkeln in S.  
Bestimme die Koordinaten von S und berechne das Volumen der Pyramide ABCS.

### Kurzaufgaben:

7. Ein 1m langer Draht wird in zwei Teile geteilt. Aus dem einen Teil wird ein Quadrat geformt, aus dem anderen ein Kreis.  
Wie lang müssen die beiden Stücke sein, damit die Summe der Flächeninhalte von Quadrat und Kreis minimal wird ?

8. Wir betrachten die Folge der Vektoren  $(\vec{v}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\vec{v}_n = \begin{pmatrix} n \\ 2 \\ 3/n \end{pmatrix}$ .

Die Vektoren  $\vec{v}_n$  schliessen zusammen mit der Ebene  $\Omega: 3x - y + 4z = 5$  den Winkel  $\varphi_n$  ein.  
Gegen welchen Wert konvergiert der Winkel  $\varphi_n$  ?

9. Man wirft drei faire Münzen. Es werden die Münzen, welche „Zahl“ zeigen beiseite gelegt und die restlichen Münzen werden erneut geworfen.  
Kann man bereits nach einem Wurf alle Münzen beiseite legen, gewinnt man 10 Franken, ist dies nach zwei Würfen der Fall, gewinnt man noch 5 Franken.  
In allen anderen Fällen verliert man 3 Franken.  
Berechne den Erwartungswert des Gewinns.

10. Beweise mit Hilfe der vollständigen Induktion, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$  gilt:

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = \frac{n^n}{n!}.$$

Schaffhausen, 8. Juni 2009  
M. Gerike