

## Mathematik

Matur 2008

Klasse 4sa

Prüfungsdauer: 4 Stunden

Hilfsmittel: Formelsammlung, TI-89

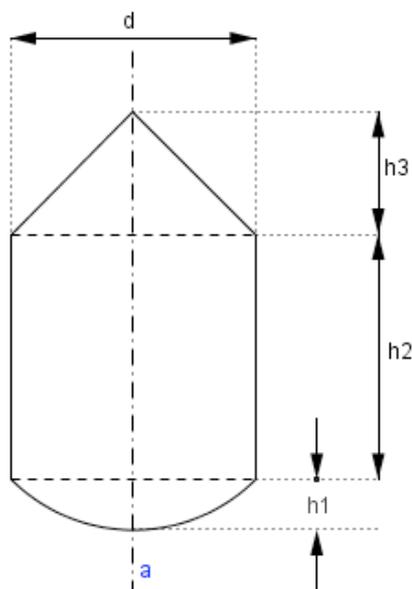
Es können maximal 45 Punkte erreicht werden. Für 40 Punkte wird die Note 6 erteilt.

Punkteverteilung:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a)			2	2	2	2			2	2
b)			2	2	3	2			2	1
c)						2				2
d)										2
total	4	3	4	4	5	6	4	4	4	7

## Stereometrie, Rentenrechnung, Wachstum und Zerfall

1. Die Figur zeigt einen Schnitt durch die Achse  $a$  eines Rotationskörpers. Berechnen Sie das Volumen und den Oberflächeninhalt des Körpers.



$$d = 6 \text{ cm}$$

$$h_1 = 1 \text{ cm}$$

$$h_2 = 5 \text{ cm}$$

$$h_3 = 4 \text{ cm}$$

2. Zur Finanzierung eines Projekts nahm eine Firma bei einer Bank anfangs 2003 Fr. 1'200'000.-, anfangs 2004 weitere Fr. 500'000.- und schliesslich anfangs 2006 nochmals Fr. 800'000.- Kredit auf. Diese Schulden müssen ab dem 1.1.2009 in zehn gleichen jährlichen Raten zurückbezahlt werden. Wie gross wird eine solche Rate, wenn wir von einem festen Zinsfuss von 4.5% ausgehen?
3. Der Ausstoss von CO<sub>2</sub>-Gasen in die Atmosphäre führt zum Treibhauseffekt und damit zur Klimaerwärmung. Im Jahr 2000 betrug der CO<sub>2</sub>-Gehalt in der Atmosphäre 360 ppm (parts per million). Es sind nun zwei Szenarien denkbar:

ungebremster Ausstoss:

Wenn der CO<sub>2</sub>-Ausstoss so weitergeht wie bisher, rechnet man mit einer Verdoppelung des CO<sub>2</sub>-Gehalts alle 30 Jahre.

- a) Stellen Sie eine Funktionsgleichung auf, welche für den Zeitraum ab dem Jahr 2000 den zu erwartenden CO<sub>2</sub>-Gehalt in der Luft angibt. Wann werden bei diesem Szenario 1000 ppm erreicht?

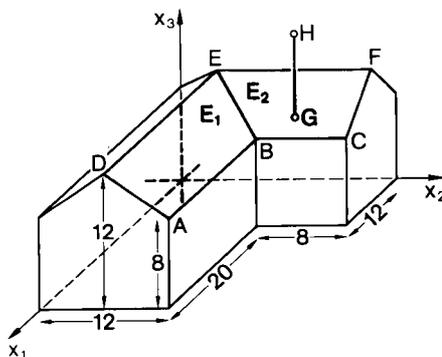
kontrollierte Reduktion:

Selbst wenn das Kyoto-Protokoll zur Verminderung des CO<sub>2</sub>-Gehalts umgesetzt wird, geht man von einem weiteren Anstieg aus. Man rechnet, dass im Jahr 2100 500 ppm erreicht werden und langfristig der CO<sub>2</sub>-Gehalt gegen einen Wert von 1000 ppm strebt. Diese Annäherung an die obere Grenze von 1000 ppm geschehe in einem exponentiellen Prozess, d.h. die Differenz zwischen dem CO<sub>2</sub>-Gehalt und dieser oberen Grenze nimmt exponentiell ab.

- b) Stellen Sie auch hierzu eine Funktionsgleichung auf, welche den zu erwartenden CO<sub>2</sub>-Gehalt in der Luft angibt. Mit welchem CO<sub>2</sub>-Gehalt ist im Jahr 2200 zu rechnen?

## Vektorgeometrie

4. a) Berechnen Sie den Winkel zwischen den Dachflächen E<sub>1</sub>(A, B, E) und E<sub>2</sub>(B, C, E).
- b) Die Antenne HG ist parallel zur x<sub>3</sub>-Achse. Der Punkt H hat die Koordinaten (10 | 15 | 15). In welchem Punkt G der Dachfläche E<sub>2</sub> ist die Antenne befestigt?



5. Gegeben sind zwei Ebenen  $\Omega_1: -x + 2y - 2z + 3 = 0$  und  $\Omega_2: x + 4y - 8z + 5 = 0$ .

- a) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden, welche parallel zu  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  ist und durch den Punkt  $C(10 \mid 14 \mid 7)$  geht.
- b) Eine Kugel berührt die Ebene  $\Omega_1$  im Punkt  $B(1 \mid 3 \mid 4)$  und berührt auch die Ebene  $\Omega_2$ . Bestimmen Sie den Mittelpunkt und auch den Radius einer solchen Kugel.

### Analysis

6. Der Graph einer ganzrationalen Funktion vom Grad 3 schneidet die x-Achse bei  $x = 10$  mit einer Steigung -6 und hat den Wendepunkt  $W(4 \mid 9)$ .

- a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

Falls man die Teilaufgabe a) nicht lösen konnte, verwende man für die Teilaufgaben b) und c) die Funktion  $y = -\frac{1}{32}x^3 + \frac{3}{8}x^2 - \frac{9}{8}x + 5$  und anstelle von P nehme man in Teilaufgabe b) den Punkt  $(4 \mid 8.5)$ .

- b) Wie lautet die Gleichung der Tangente an die Kurve, welche durch den Punkt  $(4 \mid 17)$  geht.
  - c) Die Kurventangente im Tiefpunkt schliesst mit der Kurve ein endliches Flächenstück ein, welches um die x-Achse rotiert. Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers.
7. Der umbaute Raum eines quaderförmigen Wohnblocks, der doppelt so lang wie breit sein soll, muss  $9720 \text{ m}^3$  betragen. Die Wärmeabstrahlung pro  $\text{m}^2$  durch das Flachdach ist 2.5 – mal so gross wie jene durch die Aussenwände. (Der Wärmeverlust durch den Boden kann vernachlässigt werden.) Welche Abmessungen muss das Gebäude haben, damit der Wärmeverlust möglichst klein ist?
  8. Ein Kegel ( $r = 0.1 \text{ m}$ ,  $h = 0.3 \text{ m}$ ) besteht aus einem inhomogenen Material. Die Dichte des Materials in der Höhe  $x$  über der Grundfläche ( $0 \leq x \leq h$ ) beträgt  $\rho(x) = 1000(1-x) \text{ kg/m}^3$ . Berechnen Sie die Masse dieses Kegels.

## Wahrscheinlichkeitsrechnung

9. Eine Urne enthält 20 weisse und 5 schwarze Kugeln.
- 7 Kugeln werden ohne Zurücklegen herausgegriffen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind genau zwei dieser sieben Kugeln schwarz?
  - Bei einem Spiel zieht man eine Kugel nach der andern aus dieser Urne ohne Zurücklegen. Für jede weisse Kugel erhält man einen Franken. Erscheint jedoch eine schwarze Kugel, so ist der bereits erzielte Gewinn verloren und das Spiel beendet. Man darf das Spiel aber auch jederzeit abbrechen und den Gewinn einkassieren. Lohnt es sich, eine 4. Kugel zu ziehen, wenn man bereits 3 weisse Kugeln gezogen hat?
10. A und B spielen miteinander Tennis. Spieler A bringt 60% seiner ersten Aufschläge ins Feld und macht dann in 80% der Fälle den Punkt. In 35% aller Fälle gelingt A erst der zweite Aufschlag, und mit diesem zweiten Aufschlag gewinnt er noch 50% aller Punkte. In 5% aller Fälle macht er einen Doppelfehler und verliert damit den Punkt an B.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit  $p$  erzielt A bei eigenem Aufschlag einen Punkt?

Ein Spieler gewinnt ein „game“, wenn er mindestens 4 Punkte erzielt hat und auch mindestens 2 Punkte voraus liegt. Ein game kann also 4 : 0, 4 : 1, 4 : 2, 5 : 3, 6 : 4, 7 : 5 usw. gewonnen werden. Wir betrachten nun ein game, bei dem stets A aufschlägt und mit der in Teilaufgabe a) berechneten Wahrscheinlichkeit  $p$  einen Punkt gewinnt. (Falls man a) nicht lösen konnte, nehme man  $p = 0.65$ .)

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass

- sich ein Zwischenstand von 3 : 3 ergibt, welcher die Verlängerung des games erfordert?
- A das game ohne Verlängerung, also 4 : 0, 4 : 1 oder 4 : 2 gewinnt?
- dass A das game über die Verlängerung, also 5 : 3 oder 6 : 4 oder 7 : 5 usw. gewinnt?