

Mathematik

2008

Maturitätsprüfung

Klasse 4mb

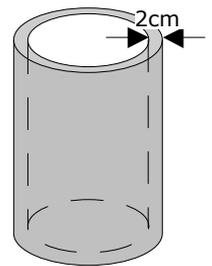
Zeit: 4 Stunden

Jede Aufgabe gibt maximal 6 Punkte.

Bewertet wird ausser dem richtigen Ergebnis auch der korrekt dargestellte Lösungsweg.

1. Der Graph einer Polynomfunktion f 3. Grades hat in $W(0.5/-2.5)$ seinen Wendepunkt. Die zugehörige Wendetangente w hat die Steigung -5.5 . Zudem geht der Graph durch den Punkt $P(-2/5)$.
 - a) Bestimme die Funktionsgleichung von f .
 - b) Die Tangente t im Punkt P an f begrenzt zusammen mit dem Graphen von f ein endliches Flächenstück. Berechne dessen Flächeninhalt.
 - c) Bestimme die Koordinaten des Schnittpunktes S der Wendetangente w mit der Tangente t , sowie den Schnittwinkel der beiden Tangenten in S .

2. Es soll ein zylinderförmiger Isolierbehälter geschaffen werden. Der Behälter ist oben offen und soll ein Volumen von 1000cm^3 fassen. Die Aussenwand und der Boden müssen 2cm dick sein und bestehen aus einem wärmeisolierenden Material, das 3Rp./cm^3 kostet. Zudem ist die Aussenfläche [grau] inkl. Boden mit einer Legierung überzogen, welche mit 5Rp./cm^2 zu Buche schlägt. Wie sind der Radius und die Höhe des Behälters zu wählen, damit er möglichst kostengünstig ausfällt? Wie teuer wird er?



3. Gegeben ist die Funktion $f_a(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot (x + 4) \cdot \sqrt{a - x}$

a) Es sei $a = 16$:

Bestimme die Nullstellen der Funktion $f_{16}(x)$ und berechne das Flächenstück, das der Graph von f_{16} mit der x -Achse einschliesst. Zeichne die Situation in einem Koordinatensystem auf.

Es sei nun $a > 0$. Wir betrachten nach wie vor das Flächenstück, das der Graph von f_a zwischen seinen Nullstellen mit der x -Achse einschliesst:

- b) Für welchen Wert von a ist das Flächenstück an seiner breitesten Stelle (in y -Richtung gemessen) halb so dick, wie es lang ist (in x -Richtung)?
- c) Das Flächenstück unter dem Graphen von f_a wird nun zwischen seinen beiden Nullstellen um die x -Achse rotiert. Bestimme den Wert von a so, dass der Rotationskörper, der dabei entsteht, minimales Volumen hat?

4. In einem Bergsee nimmt der Fang von Forellen exponentiell zu: Fang man im Jahr 2002 noch 1850 Fische, so waren es im Jahr 2007 bereits 2640 Forellen.
- Stelle eine Exponentialfunktion auf, welche die Anzahl y der gefangenen Forellen in Abhängigkeit des Jahres x berechnet.
 - Wie gross ist der jährliche, prozentuale Zuwachs der gefangenen Forellen? Wie viele Fische wird man bei gleicher Zuwachsrate im Jahre 2011 fangen?
In welchem Jahr würde man erstmals mehr als 10'000 Fische angeln?

Während einer Warmwetterperiode im Sommer verliert der Bergsee durch seinen natürlichen Abfluss täglich 120m^3 Wasser und durch die Verdunstung verliert er zusätzlich pro Tag 0.05% seines Volumens. Auf der anderen Seite fließen durch die Schneeschmelze täglich 270m^3 Wasser dazu. Anfänglich hatte der See ein Volumen von $340'000\text{m}^3$.

- Ziehe Bilanz und stelle ein Anfangswertproblem (AWP) für das Wasservolumen y im See auf.
Löse das AWP.
 - Bei welchem Volumen wird sich der See bei anhaltendem Warmwetter stabilisieren?
5. Bei einem Spiel werden zwei Würfel miteinander geworfen. Würfelt man zwei gleiche Augenzahlen, so erhält man die Augensumme als Punktezah. Würfelt man zwei unterschiedliche Augenzahlen, so erhält man die grössere der beiden Augenzahlen als Punktezah.
- Zeige: Die Wahrscheinlichkeit genau 4 Punkte zu erzielen ist $p = \frac{7}{36}$.
 - Berechne die Wahrscheinlichkeit, mindestens 4 Punkte zu erhalten.
 - Die beiden Würfel werden zehnmal geworfen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird in diesen zehn Spielen mindestens dreimal die Punktezah 4 erzielt?
 - Die Zufallsvariable X sei die erzielte Punktezah.
Berechne den Erwartungswert $E(X)$.

6. Lukas hat eine Modelleisenbahnanlage. Passend dazu besitzt er eine Lok, sowie 8 verschiedene Personen- und 5 verschiedene Güterwagen.
- Auf wie viele verschiedene Arten kann er einen Zug zusammensetzen, der aus mindestens 5 Personenwagen (und nur aus Personenwagen) besteht? Die jeweilige Reihenfolge der Wagen ist dabei wesentlich!
 - Nun legt er seine 13 Wagen in eine Kiste und nimmt dann blind 8 Wagen heraus.
Wie gross ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass sein so zusammengesetzter Zug 5 Personenwagen und 3 Güterwagen hat?

Wenn Lukas mit einem seiner Züge eine Runde auf der Anlage dreht, dann kommt es mit einer Wahrscheinlichkeit von 8% zu einer Entgleisung des Zuges.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann Lukas 20 Runden auf seiner Anlage fahren, ohne dass es zu einer Entgleisung kommt?
- Wie viele Runden müsste er mindestens drehen, damit es mit mehr als 99% -iger Sicherheit zu wenigstens einer Entgleisung kommt?

7. Gegeben sind die Punkte $A(1/4/2)$, $B(5/4/-4)$ und $F(-3/-5/5)$, sowie die Geraden $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 11 \end{pmatrix}$ durch den Punkt A bzw. B.

- a) Wie lautet die Gleichung der Ebene Ω durch die Punkte A, B und F ?
 b) Bestimme die Koordinaten des Schnittpunktes D der Geraden g und h.

Die Punkte A, B und D sind die Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide, deren vierte Ecke C in der Ebene Ω liegt und zwar so, dass die Seitenkante CD senkrecht auf der Ebene Ω steht.

- c) Ermittle die Koordinaten der vierten Ecke C.
 d) Berechne das Volumen der Pyramide ABCD.

8. Eine Seilbahn, die von der Talstation $T(9.62/4.75/0.64)$ zur Bergstation $B(7.82/6.75/2.24)$ führt, überquert ein Strassenstück, das zwischen $R(6.93/5.00/1.094)$ und $S(10.37/5.56/1.014)$ geradlinig verläuft. Alle Koordinatenangaben sind in Kilometer und die z-Koordinate entspricht der jeweiligen Höhe über Meer: Talstation (640 müM), Bergstation(2240 müM) usw.

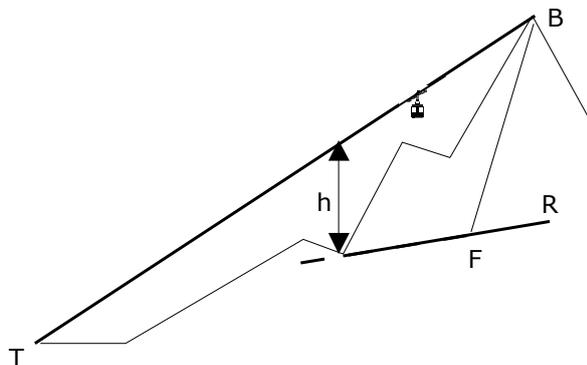
- a) Von der Bergstation aus will man einen kürzesten Verbindungsweg zur Strasse bauen.

Bestimme die Koordinaten des Punktes F auf der Strasse, wo der Weg endet ?

Wie lange wird der Weg von B nach F ?

- b) Welcher Punkt der Strasse liegt genau unterhalb der Seilbahn ?

Wie gross ist der vertikale Abstand h zwischen Strasse und Seilbahn ?
 Welchen Winkel bilden Strasse und Seilbahn ?



Schaffhausen, 9. Juni 2008
 M. Gerike