KANTON LUZERN
Bildungs- und Kulturdepartement

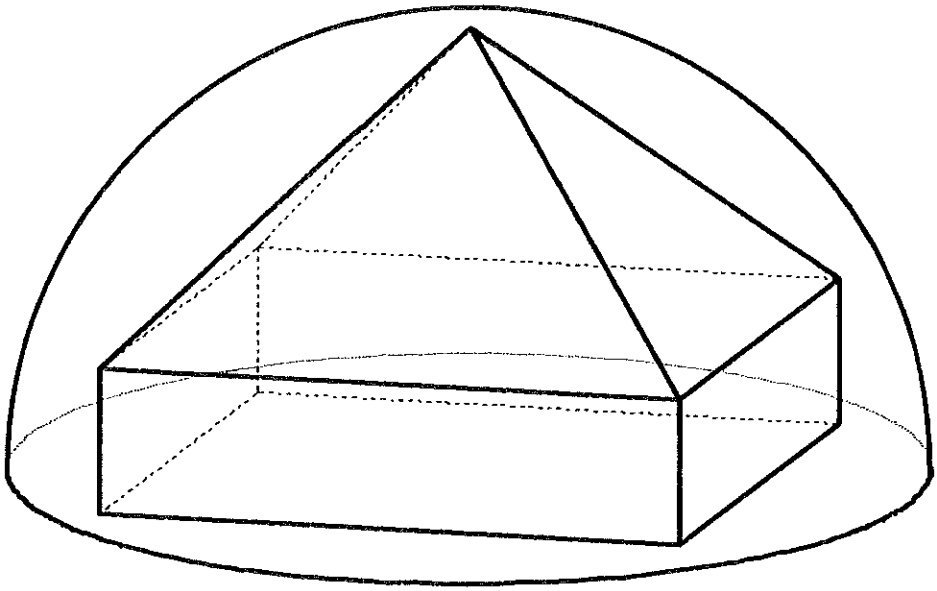
Kantonsschule Seetal

Schriftliche Maturitätsprüfung 2009

| | |
|---|---|
| Fach | **Mathematik** (Grundlagenfach) |
| Prüfende Lehrperson | Bruno Wyrsch (bruno.wyrsch@edulu.ch)<br>Erich Huber (erich.huber@edulu.ch)<br>Christoph Kalt (christoph.kalt@edulu.ch) |
| Klassen | L6a/b/c K4 |
| Prüfungsdatum | 2.6.2009 |
| Prüfungsdauer | 3 Stunden |
| Erlaubte Hilfsmittel | Taschenrechner (TI-89 oder entsprechendes Modell), Formelsammlung → ? |
| Anweisungen zur Lösung der Prüfung | • Die Lösungswege müssen klar dargestellt sein. Sie werden bewertet.<br>• Trennen Sie die einzelnen Teilaufgaben klar durch Striche ab und beginnen Sie jede der 5 Aufgaben auf einer neuen Seite.<br>• Schreiben mit Bleistift ist nicht erlaubt.<br>• Die anfallenden Gleichungen, Ableitungen, Integrale sind ohne Taschenrechner zu lösen, sofern nicht anders vermerkt. |
| Anzahl erreichbarer Punkte | 50 (Für die Note 6 sind 43 Punkte erforderlich) |
| Anzahl Seiten (inkl. Titelblatt) | 6 |

1. **Analysis** (Total: 9P; a:1P, b: 6P, c:1P, d:1P)

In eine Halbkugel (Radius r=10m) soll ein Zelt mit möglichst grossem Volumen gestellt werden. Das Zelt soll aus einem quadratischen Prisma der Höhe h und einer daraufgestellten geraden quadratischen Pyramide bestehen.



a. Zeichnen Sie eine ebene Schnittfigur, die den Zusammenhang zwischen Halbkugelradius und den Abmessungen des hinein gestellten Zelts deutlich macht. (Wählen Sie die Schnittebene durch die Spitze der Pyramide und eine Diagonale des Grundflächenquadrates.)

b. Wie sind die Höhe h und die Grundseite des Prismas zu wählen, dass das ganze Zeltvolumen möglichst gross wird?

c. Wie gross ist der maximale Wert des Zeltvolumens?

d. Zeigen Sie, dass der Extremalpunkt wirklich ein Maximum ist!

2. **Analysis** (Total: 9P; a: 2P, b: 2P, c: 3P, d:2P)

Gegeben ist die Funktion: $y(x) = \sqrt{x} \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$

(Die Einheiten im Koordinatensystem sind dm.)

Durch Rotation der Kurve um die x-Achse entsteht ein Flaschenkörper.

a. Wo ist der Hochpunkt der Kurve und wie gross ist somit der grösste Durchmesser des Rotationskörpers?

b. Die Etikette kann am besten auf der Höhe (x=?) angebracht werden, wo die Krümmung der Kurve Null ist (Wendepunkt). Wo ist dieser Punkt?

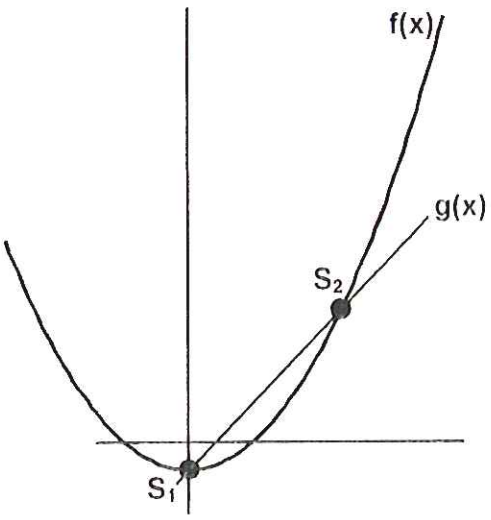
c. Welches Füllvolumen besitzt die Flasche bis zur Höhe x=5?

(Die Stammfunktion darf mit dem Rechner ermittelt werden)

d. Wie verhält sich das Füllvolumen, wenn der Wert der Höhe gegen unendlich strebt?

3. **Analysis** (Total 11P; a: 1P, b: 3P, c: 3P, d: 1P e: 3P )

Gegeben ist eine Gerade g mit der Funktionsgleichung
g(x) = $a \cdot x - 2$ ($a > 0$)
und eine Parabel mit der Funktionsgleichung
f(x) = $x^2 - 2$.




a) Bestimmen Sie die Koordinaten der zwei Schnittpunkte S1 und S2 in Abhängigkeit des Parameters $a$ !(siehe Figur)

b) Bestimmen Sie den Zahlenwert von $a$ so, dass der Abstand der beiden Schnittpunkte S1 und S2 voneinander den Wert $\sqrt{20}$ hat.

c) Die Tangente an die Parabel im Punkt S1 sei h1(x) und diejenige im Punkt S2 sei h2(x) genannt. Bestimmen Sie einen (neuen) Zahlenwert von $a$ so, dass die von h1(x), h2(x) und der Parabel eingeschlossene Fläche den Flächeninhalt F=2.25 hat.

d) Betrachten Sie folgende Winkel
$\varphi 1$ ist der Winkel zwischen der Gerade g und der Tangente durch S1 ($\varphi 1 < 90°$)
$\varphi 2$ ist der Winkel zwischen der Tangente durch S2 und der Geraden g ($\varphi 2 < 90°$)

Zeigen Sie, dass der Differenzwinkel $\varphi = \varphi 1 - \varphi 2$ folgende Funktion von $a$ ist:

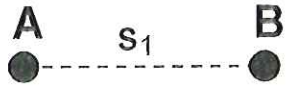
$$\varphi(a) = 2 \cdot \tan^{-1}(a) - \tan^{-1}(2 \cdot a)$$

e) Diskutieren Sie bei dieser Funktion von $a$ die folgenden Aspekte: Graphische Darstellung, Nullstellen, Punkte mit waagrechten Tangenten, Wendepunkte und Verhalten der Funktion bei $a \to \infty$.

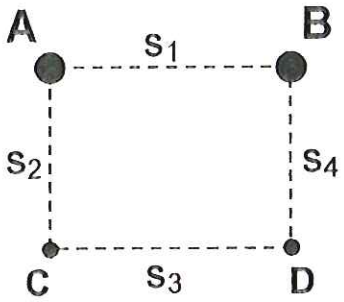
Hinweise: Ableitungen dürfen mit dem Taschenrechner bestimmt werden.
Es muss im Bogenmass gearbeitet werden.

4. **Wahrscheinlichkeit** (Total 10 P; a: 1P, b: 1P, c: 2P, d: 3P e: 3P)

Zwischen den Städten A und B existiert eine Telefonverbindung $s_1$, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 10% unterbrochen ist.




Um die Verbindung zu verbessern, wird neben der direkten Verbindung $s_1$ noch eine Notverbindung über die Zwischenstationen C und D eingerichtet. Allerdings ist jede einzelne der Verbindungen $s_2$ , $s_3$ und $s_4$ wiederum mit einer Wahrscheinlichkeit von 10% gestört.




a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Notverbindung nicht funktioniert?

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle 4 Einzelverbindungen defekt sind?

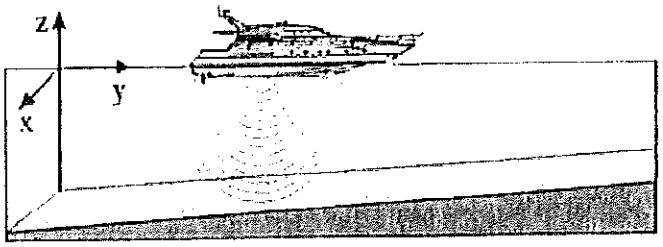
c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass von den 4 Einzelverbindungen genau 2 defekt sind?

d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit eines Unterbruch der Verbindung AB, unter der Voraussetzung, dass 2 beliebige Einzelverbindungen defekt sind.

e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit eines Unterbruchs der Verbindung AB (ohne die Voraussetzung von Aufgabe d).
(Angabe in Prozent mit mindestens zwei korrekten Ziffern nach dem Komma)

nur für e) !

5. **Vektorgeometrie** (Total. 11P, a: 2P, b:1P, c:2P, d:1P, e:2P, f:3P)




Ein Motorboot bewegt sich in einem Gewässer mit ebenem, aber leicht ansteigendem Grund. P(0/0/-20), Q(50/50/-15) und R(0/50/-15) sind Punkte der Seegrundebene.
Betrachten Sie die Koordinaten sämtlicher Punkte als Angaben in Meter.

a. Erstellen Sie die Koordinatengleichung der Seegrundebene.

b. Berechnen Sie den Winkel RPQ (bei P im Dreieck RPQ)!

c. Welche Fläche hat das Dreieck RPQ in $m^2$?

Das Boot besitzt einem Echolotsensor in Höhe der Wasseroberfläche. Dieser misst die Wassertiefe. Das Boot bewegt sich von A(25/35/0) nach B(60/63/0).

d. Welchen Abstand (rechtwinklig) zur Seegrundebene misst der Sensor in den Punkten A und B?

e. Welche Wassertiefe (in z-Richtung) gibt der Sensor an diesen zwei Punkten A und B an?

f. Wo wird bei gleichbleibendem Kurs (unveränderte Richtung wie zwischen A und B) ein rechtwinkliger Abstand von nur noch 2m zum Seegrundebene gemessen, der aus Sicherheitsgründen mindestens erforderlich ist?