

- Es sind 3 Seiten mit 6 Aufgaben. Jede Aufgabe gibt 12 Punkte.
- Für jede Aufgabe ein neues Doppelblatt verwenden
- Formelsammlung und Taschenrechner sind als Hilfsmittel erlaubt
- Alle Überlegungen müssen ersichtlich sein

Viel Erfolg!!!

1) Lineare Optimierung

Ein Händler kauft beim Importeur 130 Kopiergeräte. Er wählt drei Modelle: Modell Xero zu 1700 Fr. pro Stück, Modell Cano zu 900 Fr. pro Stück und Modell Ramsch zu 100Fr. Damit seine anspruchsvollen Kunden zufrieden sind, braucht er von den beiden teureren Modellen insgesamt mindestens 110 Geräte. Von den teuersten Geräten braucht er mindestens 20 mehr als von den zweit teuersten. Die Anzahl der sehr gefragten Xero-Geräte darf aber höchstens drei Mal so gross sein wie die Anzahl der Cano Geräte. Für den Einkauf stehen dem Händler höchstens 181'000 Fr. zur Verfügung.

- Bezeichnen Sie die Anzahl der Xero Geräte mit x und die Anzahl der Cano Geräte mit y und stellen Sie alle Bedingungen graphisch dar.
- Wie viele Geräte jeder Sorte kauft er ein, wenn die Summe, die er beim Kauf auslegen will, möglichst klein sein soll?
- Der Händler weiss, dass die drei Modelle bei ihrer Herstellung die Umwelt ganz verschieden belasten. Nach seinem Ökobewertungssystem belastet die Herstellung eines Xero Modells die Umwelt mit 10 Punkten, Cano mit 30 Punkten und Ramsch mit 40 Punkten. Wie viele Geräte jeder Sorte kauft er ein, wenn die Summe der Schadenspunkte möglichst klein sein soll?
- Der Händler weiss auch, dass Modell Xero zum Teil in Kinderarbeit hergestellt wird. Wie viele Schadenspunkte dürfte er dafür höchstens setzen, um seinen in c) gefällten Kaufsentscheid nicht ändern zu müssen?

2) Ganzrationale Funktion:

Gegeben ist $f_k(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}kx^2 + kx$

- Skizzieren Sie die Graphen von $f_0(x)$ und $f_6(x)$. (Nur die Nullstellen exakt berechnen!)
- Für welches k liegt $P(3/6)$ auf dem Graphen von $f_k(x)$?
- Zeigen Sie: bei $x=1$ haben alle Graphen dieselbe Steigung. Wie gross ist sie?

- d) Für welches k hat der Graph genau zwei Nullstellen?
 e) Wie heisst die Funktion auf deren Graph alle Wendepunkte von

$$f_k(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}kx^2 + kx \text{ liegen?}$$

3) e- Funktion

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3e^x(x^2 - 1)$

- a) Untersuchen Sie $f(x)$ auf Nullstellen, Extrema, Schnittpunkte mit der y-Achse und Verhalten für $x \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow -\infty$ und skizzieren Sie den Graphen.
 b) Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangenten in den Nullstellen und berechnen Sie den Schnittwinkel der Tangenten.
 c) Zeigen Sie, dass $F(x) = (3x^2 - 6x + 3)e^x + c$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist. Berechnen Sie die Fläche, die vom Graphen und der x-Achse eingeschlossen wird.

4) Gebrochen rationale Funktion

Gegeben ist $f_a(x) = \frac{x^3 - ax}{x^2 + 3}$, wobei $a > 0$

- a) Bestimmen Sie a so, dass der Graph von $f_a(x)$ in der positiven Nullstelle die Steigung 1 hat.
 b) Setzen Sie jetzt $a=5$. Untersuchen Sie $f_5(x) = \frac{x^3 - 5x}{x^2 + 3}$ auf Symmetrie, Polstellen, Asymptote, Nullstellen, Extrema, Verhalten für $x \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow -\infty$ und skizzieren Sie den Graphen.
 c) Zeigen Sie, dass die Funktion $F(x) = \frac{x^2}{2} - 4 \ln(x^2 + 3) + c$ eine Stammfunktion von $f_5(x)$ ist.
 d) Für welches $u > 0$ hat die Fläche, begrenzt durch Asymptote, Graph von $f_5(x)$ und der Geraden $x=u$, den Flächeninhalt 10?

5) Vektorgeometrie

Gegeben sind die Punkte $P(3/1/-2)$ und $Q(0/4/1)$ und die Gerade $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Der Punkt R liegt auf der Geraden g.

- a) Bestimmen Sie Punkt R so, dass das Dreieck PQR bei P einen rechten Winkel hat. Wie gross sind die andern beiden Winkel des Dreiecks?
 b) Stellen Sie die Gleichung der Ebene auf, die senkrecht zum Vektor \overrightarrow{PQ} verläuft und den Mittelpunkt der Strecke \overline{PQ} enthält.
 c) Welcher Punkt R auf g hat von P und Q den gleichen Abstand? Wie gross ist die Fläche des Dreiecks PQR (auf 3 Stellen runden)?
 d) Bestimmen Sie den Punkt R so, dass die Fläche des Dreiecks PQR minimal wird.

6) Wahrscheinlichkeitsrechnung

Huber verkauft Salate: Gurken-, Rinden-, Käse-, Rüebl-, Tomaten-, Eisberg-, Nüssli-, Sellerie-, Wurst- und Zwiebelsalat. Er füllt sie in Töpfchen zu je drei verschiedenen Sorten ab.

- a) Wie viele verschiedene Varianten gibt es?
- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält ein zufällig ausgewähltes Töpfchen keinen Gurkensalat?
- c) Fiona kauft ihrer Klasse 13 solcher Töpfchen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind unter diesen 13 genau 5, die Gurkensalat enthalten?
- d) Die Salate sind verderblich und müssen am Tag des Abpackens verkauft werden. Durch Beobachtung stellt Huber fest, dass von 60 abgefüllten Töpfchen in 10% der Fälle 45, in 15% der Fälle 50, in 20% der Fälle 55 verkauft wurden. In den übrigen Fällen konnten alle 60 Töpfchen verkauft werden. Huber verdient an einem Töpfchen Fr. 1.20; ein nicht verkauftes Töpfchen verursacht einen Verlust von Fr.2.10.
 - d₁) Wie viele Töpfchen werden im Schnitt verkauft? (Erwartungswert der Anzahl verkaufter Töpfchen)
 - d₂) Mit welchem durchschnittlichen Gewinn kann Huber rechnen?
 - d₃) Wäre es von Vorteil, nur 55 Töpfchen abzufüllen?