

Maturaprüfung Mathematik 2009

Note

Dauer: 3 Stunden

Maximale Punktzahl: 51

Punkte

Name

Hilfsmittel: Formelsammlung DMK/DPK mit eigenen Eintragungen (ohne Beispielaufgaben), CAS-Rechner.

Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge gelöst werden. Die Lösungswege müssen klar ersichtlich sein.

Beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues A4-Blatt und schreiben Sie nur auf die Vorderseiten.

Ordnen Sie am Ende der Prüfung Ihre Blätter.

Für die Note 6 müssen nicht alle Aufgaben vollständig richtig gelöst werden.

Vektorgeometrie

1. [4 P.] Gegeben sind die Punkte $A = (2, 4, 3)$, $B = (6, 0, 5)$ und $C = (2, 8, 6)$.
- (a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC .
 - (b) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene durch die Punkte A , B und C .
 - (c) Ermitteln Sie eine Gleichung der Winkelhalbierenden des Winkels $\alpha = \sphericalangle BAC$.
 - (d) Berechnen Sie $\beta = \sphericalangle ABC$.
2. [4 P.] Der Grundkreis eines geraden Kreiskegels mit der Spitze $S = (16, -11, 9)$ liegt in der Ebene $E: 9x - 6y + 2z + 14 = 0$. Der Punkt $P = (0, -1, z)$ liegt auf dem Grundkreis des Kegels.
- (a) [1 P.] Berechnen Sie die Höhe des Kegels.
 - (b) [1 P.] Welchen Winkel schliessen die Mantellinie PS und die Grundkreisebene ein?
 - (c) [2 P.] Welcher Punkt des Grundkreises hat von P den grössten Abstand?

3. [7 P.] Gegeben ist eine Kugel mit dem Mittelpunkt $M = (-1, 1, 0)$ und dem Radius $r = 11$.
- (a) [3 P.] Bestimmen Sie den Punkt, welcher im Abstand 4 von der Kugel und am weitesten von der Ebene $E : x + 2y + 2z - 297 = 0$ entfernt liegt.
- (b) [4 P.] Ein Lichtstrahl geht von einer Lichtquelle $L = (11, 12, 22)$ aus in Richtung $R = (8, 9.5, 14.5)$. Er wird an der Kugel reflektiert. In welchem Punkt Z trifft der reflektierte Lichtstrahl auf die Ebene $E : x - 2y + 3z - 181 = 0$?

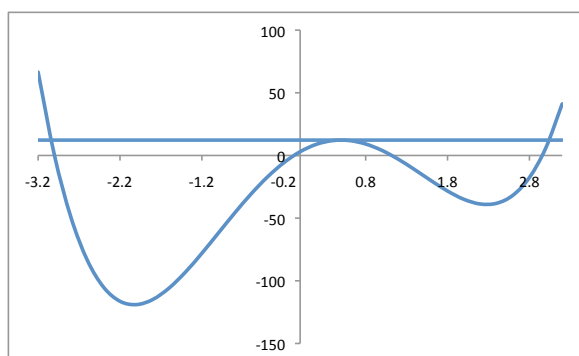
Analysis

4. [3 P.] Berechnen Sie die „unendlich grosse“ Fläche zwischen dem Graphen von $f(x) = \frac{-x^3 + 22x^2 - 160x + 378}{2x^2 - 32x + 128}$ und der Asymptoten des Graphen von f im zweiten Quadranten.

5. [4 P.] Durch die folgende Gleichung ist eine Ellipse gegeben.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- (a) Welche Bedeutung haben die Parameter a und b ? Skizzieren Sie die Ellipse. Tipp: Lösen Sie nach y auf und untersuchen Sie die Funktion.
- (b) Durch Rotation dieser Ellipse um die x -Achse entsteht ein Ellipsoid. Berechnen Sie das entsprechende Volumen in Abhängigkeit von a und b **von Hand**.
6. [5 P.] Betrachten Sie den folgenden Graphen der Polynomfunktion $f(x)$ vom Grad vier.



Der Graph geht durch den Punkt $(2, -35)$, hat in $(-1, -62)$ einen Wendepunkt, besitzt bei $x = \frac{1}{2}$ einen Hochpunkt und bei $x = -3$ eine Nullstelle.

Berechnen Sie die Funktionsgleichung von $f(x)$ und berechnen Sie die Fläche, welche die Tangente im Hochpunkt mit dem Graphen von f einschliesst (siehe Figur oben) auf zwei Nachkommastellen genau.

7. [5 P.] Betrachten Sie die Glockenkurve $y_1 = e^{-x^2}$.
- (a) Unter welchem Winkel φ schneiden sich die beiden Wendetangenten? Geben Sie das Resultat auf zwei Nachkommastellen genau an.
- (b) Betrachten Sie zusätzlich noch die um eins nach links verschobene Glockenkurve $y_2 = e^{-(x+1)^2}$. An welcher Stelle ist der vertikale Abstand d zwischen den zwei Glockenkurven maximal? Wie gross ist d dann? Geben Sie das Resultat auf vier Nachkommastellen genau an.

Stochastik

8. [5 P.]
- (a) [1 P.] Wie oft muss man drei gewöhnliche Spielwürfel werfen, bis man mit 99% Sicherheit eine „Tripeldrei“ geworfen hat.
- (b) [2 P.] In einer Urne liegen vier schwarze, acht grüne, zwei gelbe und drei blaue Kugeln. Sie ziehen acht Kugeln. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie zwei schwarze, drei grüne, eine gelbe und zwei blaue Kugeln ziehen?
- (c) [2 P.] Für zwei Zufallszahlen gilt: $|x| \leq 6$ und $2 \leq y \leq 7$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gilt $(x-1)^2 + (y-4)^2 \geq 4$. Tipp: Skizzieren Sie zuerst die Situation und berechnen Sie die Flächeninhalte.
9. [4 P.] Eine Gruppe Jugendlicher besteht aus acht Jungen und zwölf Mädchen. Die Gruppe erhält von einem Sponsor 15 Karten für ein Konzert geschenkt.
- (a) [1 P.] Wie viele 15-köpfige Gruppen gibt es, wenn die drei Freunde Peter, Hans und Claudio entweder gemeinsam oder gar nicht ans Konzert wollen?
- (b) [1 P.] Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine 15-köpfige Gruppe mit genau acht Mädchen zusammenzustellen?
- (c) [2 P.] Die Gruppe beschliesst, die Tickets zu verlosen. Dazu schreiben sie 20 Zettelchen mit 15 Treffern und fünf Nieten. Jeder zieht genau ein Los (ohne Zurücklegen). Fritz soll als Zweiter ein Los ziehen, Julia als Erste. Fritz beschwert sich, dass seine Chancen auf einen Ticketgewinn geringer als für Julia sind. Stimmt das? Begründen Sie ausführlich.
10. [4 P.] Ein Käfer bewegt sich pro Sekunde zufällig genau eine Einheit im Koordinatensystem nach rechts oder nach oben. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 70% geht er jeweils nach rechts. Zum Zeitpunkt 0 startet der Käfer im Ursprung.
- (a) [1 P.] Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreicht der Käfer nach 20 Sekunden den Punkt $Z = (14, 6)$?
- (b) [2 P.] Mit welcher Wahrscheinlichkeit gelangt der Käfer über die Punkte $Q = (4, 2)$ und $R = (7, 3)$ zum Punkt $Z = (14, 6)$?
- (c) [1 P.] Welche Strecke legt der Käfer im Mittel in x -Richtung innerhalb von einer Minute zurück?

11. [3 P.] Eine lang angelegte Studie untersuchte die Lottoziehungen (6 aus 49) in Fantasien. Es wurde an insgesamt 2'200 Ziehungen teilgenommen. Insgesamt hatte man 24-mal drei Richtige. Testen Sie die Hypothese „Jede Zahl kommt mit der gleichen Wahrscheinlichkeit vor“ mit einem Signifikanzniveau von 1% (zweiseitig). Geben Sie den Verwerfungsbereich V an und interpretieren Sie das Resultat. Nähern Sie die Binomialverteilung mithilfe einer Normalverteilung an.

Kombination von Themen

12. [3 P.] Ein Teilchen, welches sich im Raum bewegt, startet im Punkt $P = (2, -5, 8)$ und bewegt sich zuerst in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} -81 \\ 162 \\ -162 \end{pmatrix}$ in die eine Richtung, dann ein Drittel von \vec{v} zurück, dann wieder ein Drittel von diesem Vektor in die ursprüngliche Richtung usw. Gegen welchen Punkt Q strebt diese Bewegung? Berechnen Sie die Lösung exakt.