Kantonsschule Frauenfeld | Klasse 4mb
Maturitätsprüfungen 2007

Mathematik

Hilfsmittel:
- Formelsammlung DMK/DPK
- Persönlicher Taschenrechner

Prüfungsdauer: 3 Stunden

Bemerkungen:
- Die Aufgaben sind nicht der Schwierigkeit nach geordnet.
- Der Lösungsweg muss bei jeder Aufgabe klar ersichtlich und nachvollziehbar sein. Dabei darf der Taschenrechner in der Regel nur als Kontrollinstrument und als Kopfrechenhilfe verwendet werden. Die Programme „Quadratische Gleichung“ und „Binomialverteilung“ dürfen verwendet werden.
- Wenn mehrere Lösungen möglich sind, sollen alle angegeben werden.
- Für jede Aufgabe ist ein neuer Bogen zu beginnen, versehen mit Namen und Aufgabennummer.
- Die gelösten Aufgaben sind geordnet, Nr. 1 zuoberst, zusammen mit dem Aufgabenblatt abzugeben.

Bewertung:
- Jede Aufgabe hat gleiches Gewicht.
- Für die Note 6 brauchen nicht alle Aufgaben vollständig richtig gelöst zu werden.

Aufgabe 1 Wahrscheinlichkeitsrechnung

Ein Ferienhotel hat fünf Stockwerke mit je 30 Zimmern. In jedem Stockwerk gibt es zwei einander gegenüberliegende Zimmerreihen mit je 15 Zimmern.

a) Ein grosser Reiseveranstalter bucht 146 Zimmer. Auf wie viele Arten kann das Hotel diese Zimmer reservieren, wenn noch alle 150 Zimmer des Hotels frei sind?

b) Eine Schulklasse auf Maturareise will vier nebeneinander (nicht gegenüber) liegende Zimmer buchen. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Buchung, wenn noch alle 150 Zimmer des Hotels frei sind?

c) 146 Zimmer des Hotels sind besetzt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die vier freien Zimmer auf demselben Stockwerk liegen?

d) Eine Gruppe von 19 Personen hat ein Viererzimmer und drei Fünferzimmer gebucht. Auf wie viele Arten können die Gruppenmitglieder in die Zimmer eingeteilt werden?

e) Auf wie viele Arten können sich 19 Personen in vier Zimmern aufhalten, falls nur die Anzahl der Personen pro Zimmer interessiert? (Einige Zimmer können auch leer sein.)

f) 60% aller Zimmer haben Seesicht und 70% aller Zimmer haben eine Dusche. 20% aller Zimmer haben weder Dusche noch Seesicht. Max tritt in sein Zimmer und erblickt sofort den See. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sein Zimmer auch mit einer Dusche ausgestattet ist?

g) Bei einer grossen Reinigungsaktion werden alle 150 Zimmer gründlich gereinigt. Danach erfüllen elf die Sauberkeitskriterien der Hotelleitung nicht. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Hoteldirektor bei seiner stichprobeartigen Kontrolle von zehn Zimmern mindestens zwei überprüft, welche den Sauberkeitskriterien nicht entsprechen?

h) Da in der Regel 7% aller Buchungen annuliert werden, nimmt das Hotel für eine Woche 155 Zimmerreservationen entgegen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es zu einer Überbelegung kommt?

Aufgabe 2 **Wahrscheinlichkeitsrechnung (a-c)/Vektorgeometrie (d-f)**

Ein HIV-Test erkennt in vier von fünf Fällen die HIV-Infektion bei infizierten Menschen. Allerdings zeigt er auch in einem von 25 Fällen bei nicht-infizierten Menschen ein positives Ergebnis. In Malawi (Afrika) sind 14% der Bevölkerung HIV-infiziert.

a) Eine Person in Malawi wird zufällig ausgewählt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person positiv getestet wird?

b) Es werden zufällig 50 Einwohner von Malawi ausgewählt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich darunter mehr als sieben Personen befinden, welche HIV-infiziert sind?

c) Wie viele Tests müssen bei einer infizierten Person mindestens durchgeführt werden, um die vorhandene Infektion mit 99.99%-iger Sicherheit zu erkennen?

Gegeben ist ein Kreis k: $x^2 - 6x + y^2 - 8y + 15 = 0$ und ein Punkt P(–1/6).

d) Berechne den Mittelpunkt und den Radius von k.

e) Berechne den Abstand des Punktes P vom Kreis k auf Tausendstel genau.

f) (Solver erlaubt) Vom Punkt P aus werden die Tangenten an den Kreis k gelegt. Berechne die Koordinaten der Berührungspunkte.

Aufgabe 3 **Vektorgeometrie**

Gegeben sind die Punkte A(4/4/3), M(–5/–8/6), P(19/24/6) sowie die Ebene E: 2x – 6y + 3z + 224 = 0.

a) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks AMP.

b) Welchen Winkel schliesst die Gerade durch A und M mit der Ebene E ein?

P liegt auf der Oberfläche einer Kugel K mit Mittelpunkt M.

c) Bestimme die Gleichung dieser Kugel K.

d) Zeige, dass die Ebene E diese Kugel K berührt.

e) Bestimme eine Gleichung der Tangentialebene T an die Kugel K im Punkt P.

f) Welche weitere Kugel hat ihren Mittelpunkt auf der Geraden AM und berührt ebenfalls die Ebene E und die Ebene T aus der Teilaufgabe e)?

Aufgabe 4 **Analysis**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = -e^{2x} + 3$.

a) Berechne die Schnittpunkte von f mit den Koordinatenachsen.

b) Unter welchem Winkel schneidet f die y-Achse?

c) f rotiere über dem Intervall [–1; 0] um die x-Achse. Bestimme das Volumen des so entstehenden Rotationskörpers auf Tausendstel genau.

d) Vom Punkt P(0/3) aus soll eine Tangente t an die Kurve f gelegt werden. Bestimme die Gleichung von t.

e) (Solver erlaubt, ohne 2. Ableitung)
Q sei der Kurvenpunkt auf f, welcher P(0/3) am nächsten liegt. Berechne die Koordinaten von Q auf Tausendstel genau.

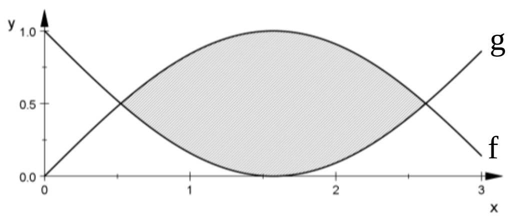
Aufgabe 5 **Analysis (Vermischtes)**

a) Bestimme die Asymptoten (Polstellen; Verhalten im Unendlichen) der Funktion
$f(x) = \frac{27x^2 - 3x - 18}{3x + 9}$.

b) Bestimme a und b so, dass der Graph der Funktion $f(x) = \frac{ax^2 + bx - 18}{3x + 9}$ die x-Achse an der Stelle x = 3 berührt.

c) Berechne den Inhalt der hervorgehobenen Fläche:

$f(x) = \sin x$ und $g(x) = 1 - \sin x$.



d) Ein Bürogebäude mit Flachdach und quadratischem Grundriss soll 12000 m^3 Rauminhalt haben. Die Wärmeabstrahlung pro m^2 sei an der Decke dreimal so gross wie jene an den Seitenwänden. Die Abstrahlung durch den Boden sei vernachlässigbar klein. Welche Abmessungen hat das Gebäude mit dem kleinsten Wärmeverlust?
(ohne 2. Ableitung)