

Freiwilliger Selbsteinschätzungstest
Mathematisches Schulwissen
Bericht HS2009

Projekt LEMUREN*

ETHZ, D-MATH, lemuren@math.ethz.ch

22. Juni 2010

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Teilnahme	2
3	Ablauf	2
4	Testfragen	3
5	Ergebnisse	3
5.1	<i>Punkteverteilung, Histogramme</i>	
5.2	<i>Erfolgsquote bei den Aufgaben</i>	
5.2.1	Schwierigkeitsindex	9
5.2.2	Anteil nach Fachgebiet	9
5.3	<i>Trennschärfe und Fehlermatrix</i>	
5.4	<i>Vergleich zu vorherigen Tests und im Semester</i>	
6	Rückmeldung der Studierenden	12
7	Empfehlungen für weitere Projekte	12
8	Anhang	14
8.1	<i>Rückmeldungen der Studierenden</i>	
8.2	<i>Testfragen und Verteilung der Antworten</i>	

1 Einleitung

Im Herbstsemester 2009 konnten ETHZ-Studienanfänger/innen auf freiwilliger Basis ihr mathematisches Schulwissen überprüfen. Gemeinsam mit dem LEMUREN-Team hatten Dozierende des Departements Mathematik zu einem freiwilligen Online-Selbsteinschätzungstest eingeladen:

*Ein herzlicher Dank für die Unterstützung an M. Kalisch (ETHZ, D-MATH, SFS) und M. Dahinden (ETHZ, D-INFK).

- Das Angebot erreichte Studierende in 7 Lehrveranstaltungen für 12 ETHZ-Departemente, dies entspricht insgesamt ca. 90% der ETHZ-Bachelor-Anfänger/innen, davon nahmen 53% teil, das sind total ca. 48% aller Bachelor-Anfänger/innen.
- Der Test unterlag keinen wissenschaftlichen Standards der Testkonstruktion/-analyse und bestand aus Multiple-Choice-Fragen, die in anderer Form zuvor am D-MATH eingesetzt worden sind.
- Die Zusammenstellung der Fragen orientierte sich an den Empfehlungen der HSGYM-Studie¹.

2 Teilnahme

Vorlesung	Eingeladen	Teilgenommen	%
Analysis I (D-BAUG)	281	144	51
Analysis I (D-INFK)	210	125	60
Analysis I (D-ITET)	245	101	41
Analysis I (D-MAVT, D-MATL)	613	375	61
Analysis I (D-MATH, D-PHYS)	366	228	62
GL der Mathematik IA (D-BIOL, D-CHAB)	227	86	39
Mathematik I (D-AGRL, D-ERDW, D-UWIS)	277	117	42
	2211	1176	53
ETHZ-Bachelor-Studienbeginner/innen im HS09 insgesamt	2443		48

3 Ablauf

Der Test verlief folgendermassen:

1. Mittels der e-doZ-Export-Datei wurden alle bis dato für die jeweilige Vorlesung Eingeschriebenen per E-Mail zu dem Test eingeladen. Diese E-Mail enthielt:
 - einen personalisierten Link zum Online-Test,
 - einen Link zu einer laufend aktualisierten Auswertungsseite und
 - und eine pdf-Version des Tests im Anhang.

Die ersten E-Mail wurden am ersten Semestertag verschickt. Um allfällige Nachzügler/innen auch zu erreichen, wurde dieser Schritt einige Male wiederholt.
2. Die Studierenden hatten bis mit Donnerstag der zweiten Semesterwoche Zeit, den Test zu bearbeiten und ihre Eingaben einmalig abzuschicken. Nach dem Absenden erhielten sie jeweils per E-Mail ein Quittungs-pdf mit Ihren Eingaben.
3. Einen Tag später erhielten alle Teilnehmenden eine detaillierte Auswertung mit Lösung als pdf via E-Mail. Das pdf enthielt:
 - Allgemeine Informationen: Anzahl der Abgaben, minimal/maximal erreichte Punktzahl, Durchschnitt der Punkte, Verteilung der Abgaben auf die Antwortalternativen der einzelnen Aufgaben inklusive Nichtbeantwortung.

¹HSGYM - Hochschule und Gymnasium, Hochschulreife und Studierfähigkeit, Zürcher Dialog an der Schnittstelle mit Analysen und Empfehlungen zu 25 Fachbereichen, HSGYM (2009), S.135ff, www.educ.ethz.ch

- Individuelle Angaben: Eigene erreichte Punktzahl, eigene Eingabe zum Vergleichen mit allen Abgaben für die jeweilige Aufgabe, siehe Anhang.

4. Nach Abschluss des Tests haben wir alle Teilnehmenden um eine Rückmeldung zum Test gebeten.

4 Testfragen

Für jede Vorlesung enthielt der Test jeweils die gleichen Fragen, mit einer kleinen Ausnahme: Der Test für Mathematiker/innen und Physiker/innen enthielt zwei zusätzliche Fragen (no. 26/27), siehe Anhang.

Die Auswahl der Fragen orientierte sich an der HSGYM-Studie mit folgender Verteilung

Gebiet nach HSGYM	#	für MATH/PHYS
Algebra	3	
Trigonometrie	2	
Funktionen	5	
Folgen, Reihen	2	
Differentialrechnung	5	
Integralrechnung	3	
Analytische Geometrie der Ebene	1	
Vektorgeometrie	4	+ 1
Kombinatorik		+ 1
	25	27

Verwendet wurden Fragen, welche wiederholt am D-MATH eingesetzt worden sind. Das LEMUREN-Team hat diese allenfalls korrigiert, Abbildungen überarbeitet, sowie Lösungen mit Rückmeldungen entworfen. Jede Frage bot sodann fünf Antwortalternativen.

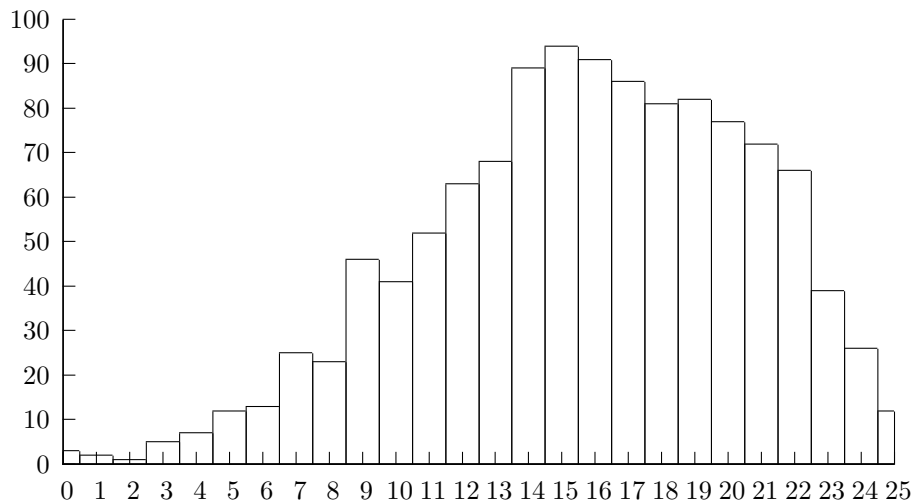
5 Ergebnisse

Im Anhang führen wir die Ergebnisse und Verteilung der Antworten genau aus.

5.1 Punkteverteilung, Histogramme

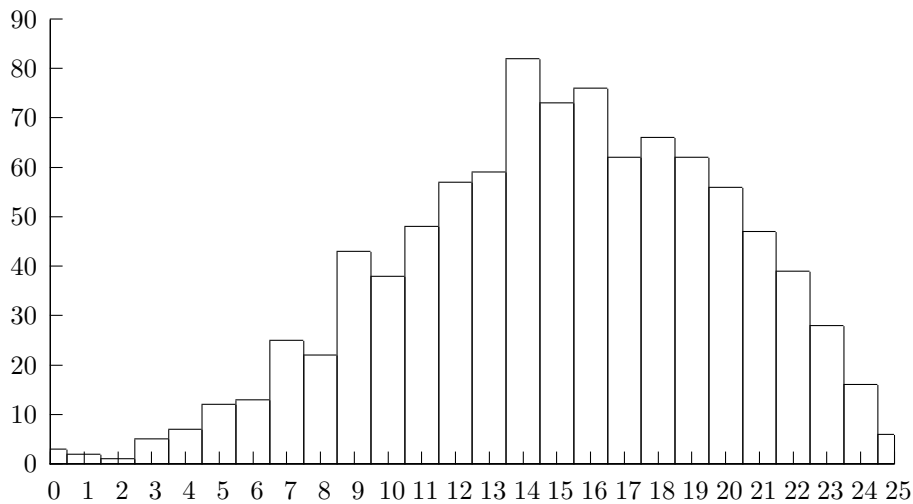
Alle Departemente

Abgaben: 1176/2211 Durchschnitt: 15



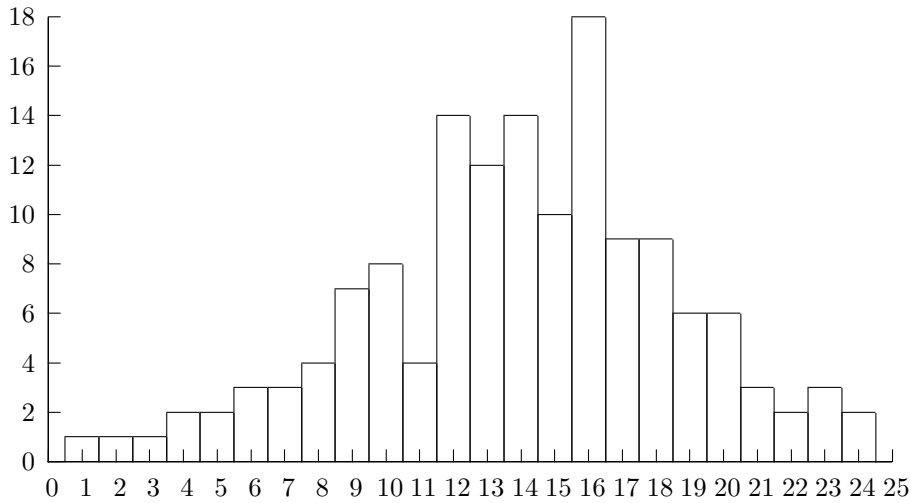
Alle Departemente ohne MATH/PHYS

Abgaben: 948/1853 Durchschnitt: 15



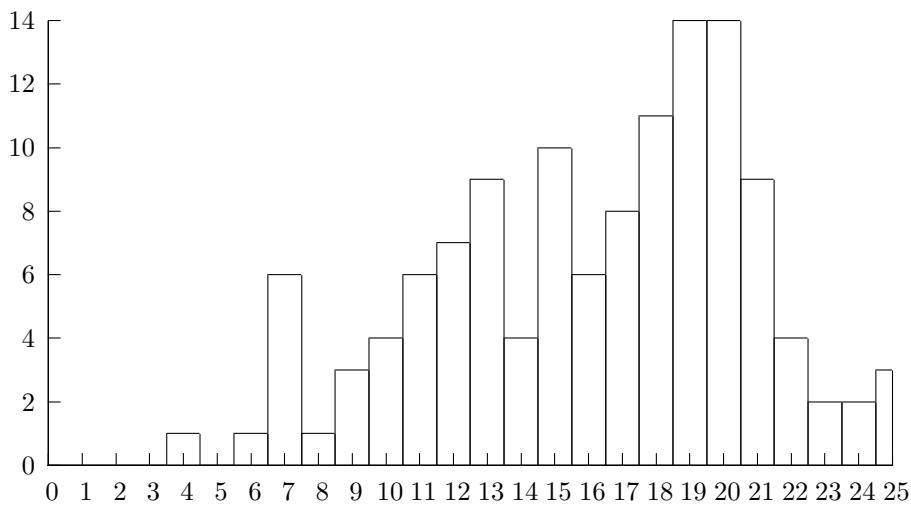
Analysis I D-BAUG

Abgaben: 144/281 Min./Max. Punktzahl: 1/24 Durchschnitt: 13



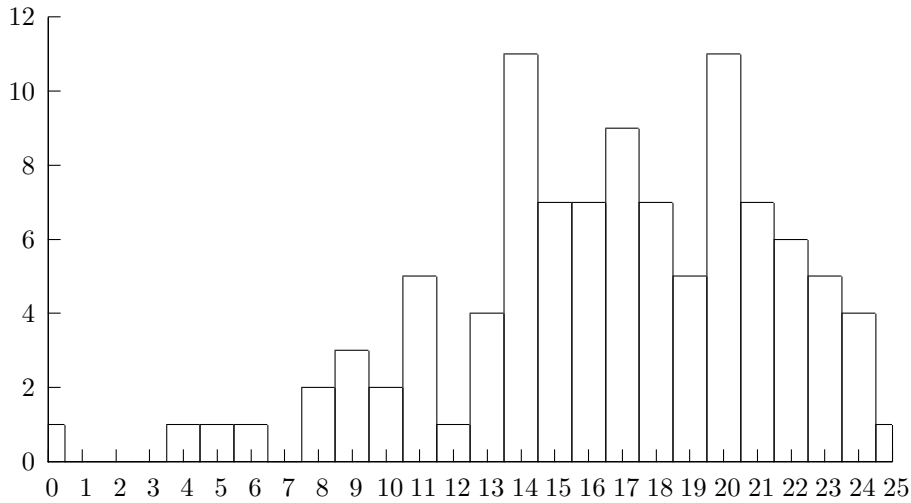
Analysis I D-INFK

Abgaben: 125/210 Min./Max. Punktzahl: 4/25 Durchschnitt: 16



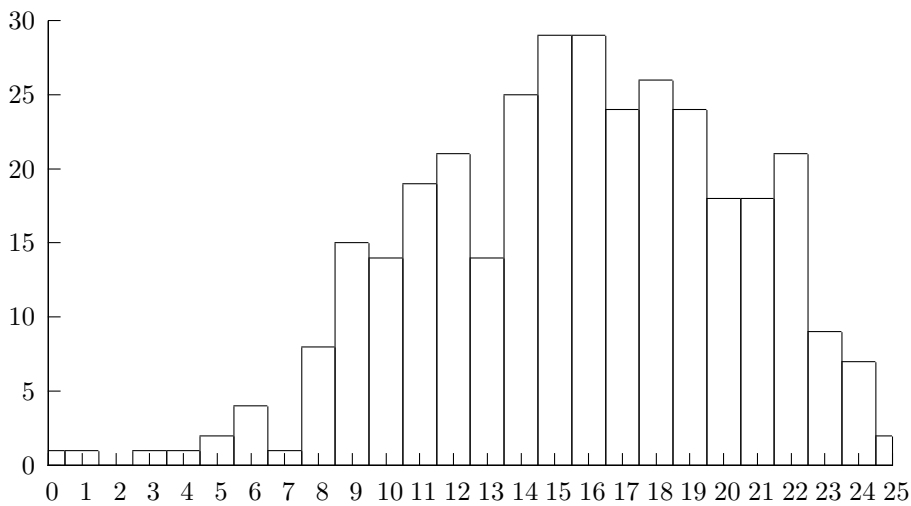
Analysis I D-ITET

Abgaben: 101/245 Min./Max. Punktzahl: 0/25 Durchschnitt: 16



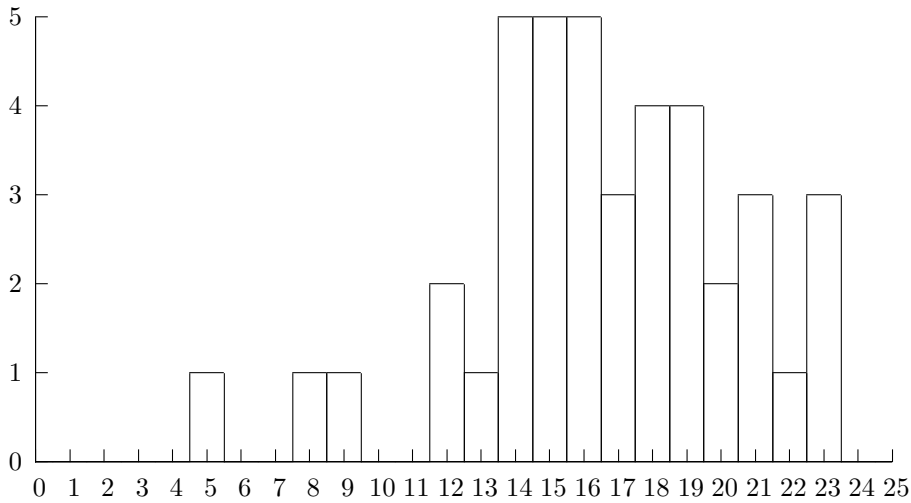
Analysis I D-MAVT

Abgaben: 334/543 Min./Max. Punktzahl: 0/25 Durchschnitt: 15



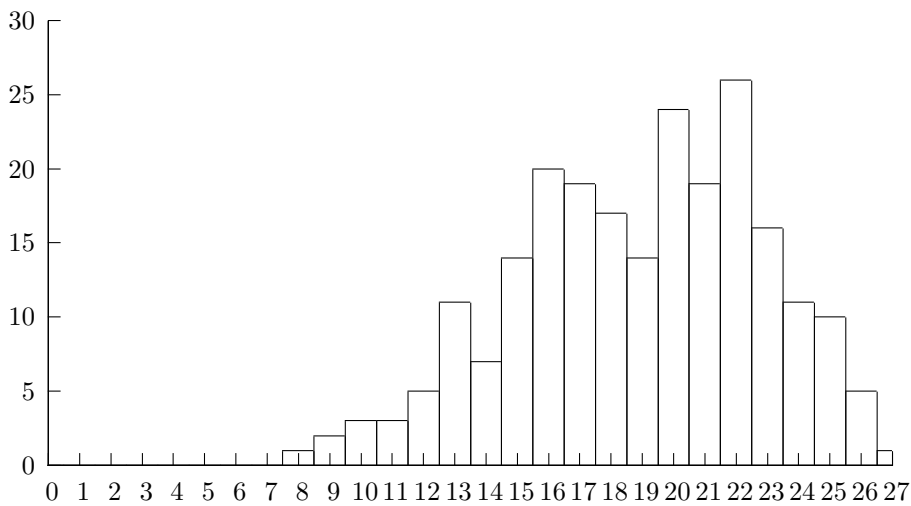
Analysis I D-MATL

Abgaben: 41/70 Min./Max. Punktzahl: 5/23 Durchschnitt: 16



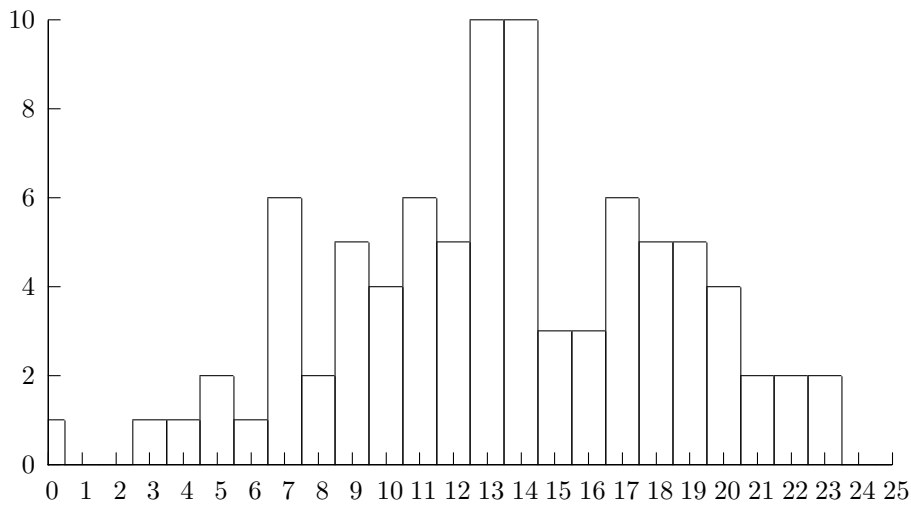
Analysis I D-MATH, D-PHYS

Abgaben: 228/366 Min./Max. Punktzahl: 8/27 Durchschnitt: 18



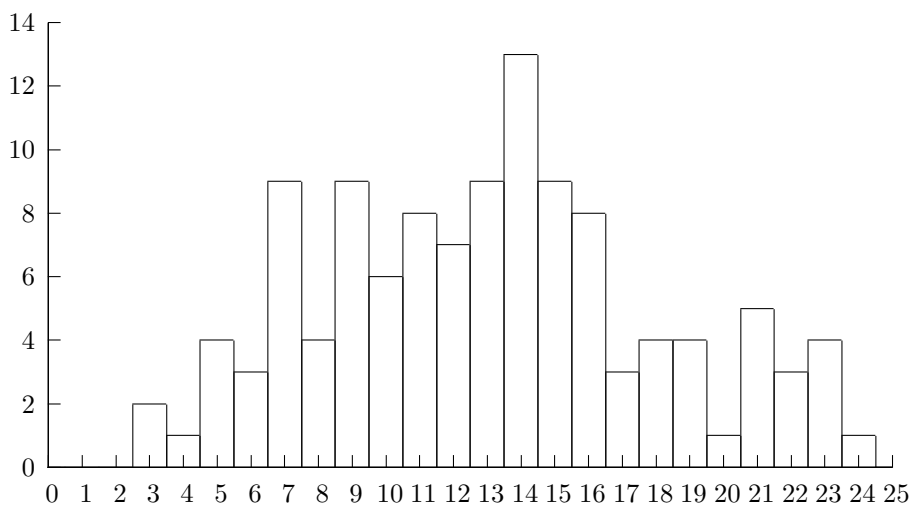
Grundlagen der Mathematik IA D-BIOL, D-CHAB

Abgaben: 86/227 Min./Max. Punktzahl: 0/23 Durchschnitt: 13



Mathematik I D-AGRL, D-ERDW, D-UWIS

Abgaben: 117/277 Min./Max. Punktzahl: 3/24 Durchschnitt: 13



5.2 Erfolgsquote bei den Aufgaben

5.2.1 Schwierigkeitsindex

Wir sortieren die Fragen aufsteigend nach dem Schwierigkeitsindex, der Prozentzahl der korrekt eingegebenen Antworten aller Teilnehmenden.

no.	Text	%
13	Der Grenzwert $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h}$ beträgt ...	28
18	Die Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^x + 7$ ist ...	28
20	Sei f die Funktion mit $f(x) = \int_3^x \sin(t) dt$. Wie lautet die Gleichung der Ableitung?	30
5	Sei $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; dann gilt für $\cos(\alpha)$...	31
1	Die Wurzel aus 36 ...	34
22	Welches Paar von Gleichungen [...] definiert Geraden, die nicht zueinander senkrecht sind?	47
...		
9	Welche drei Funktionen f, g, h gehören zu den drei folgenden Graphen? [...]	78
8	Welche drei Funktionen f, g, h gehören zu den drei folgenden Kurven? [...]	81
15	Sei f die Funktion mit $f(x) = e^{2x}$. Wie lautet die Gleichung der Ableitung f' ?	82
24	Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann ist das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b} = \dots$	83
23	Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Dann ist $ \vec{a} = \dots$	84
6	Wie lautet die Gleichung der Geraden auf dem Bild? [...]	89
22	Welcher Vektor entspricht der Summe der beiden Vektoren im Bild? [...]	94

Die Studierenden D-MATH/D-PHYS haben bei fast allen Aufgaben besser abgeschnitten, mit der gleichen Tendenz der Antworten. Die beiden Zusatzaufgaben

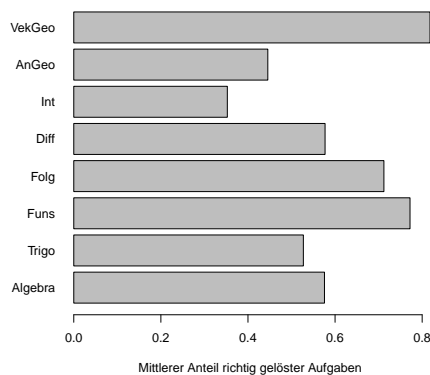
- Auf wie viele Arten können n voneinander verschiedene Bücher auf drei Personen verteilt werden, sodass jede Person mindestens ein Buch erhält?
- Der Durchschnitt einer Ebene mit einem Würfel ist – wenn er nicht leer ist oder aus einem Punkt besteht – ein Polygon. Die maximale Anzahl von Ecken, die ein solches Polygon haben kann, ist ...

liegen mit 22% und 28% am unteren Ende der Rangfolge.

Sie werden im Folgenden nicht weiter berücksichtigt.

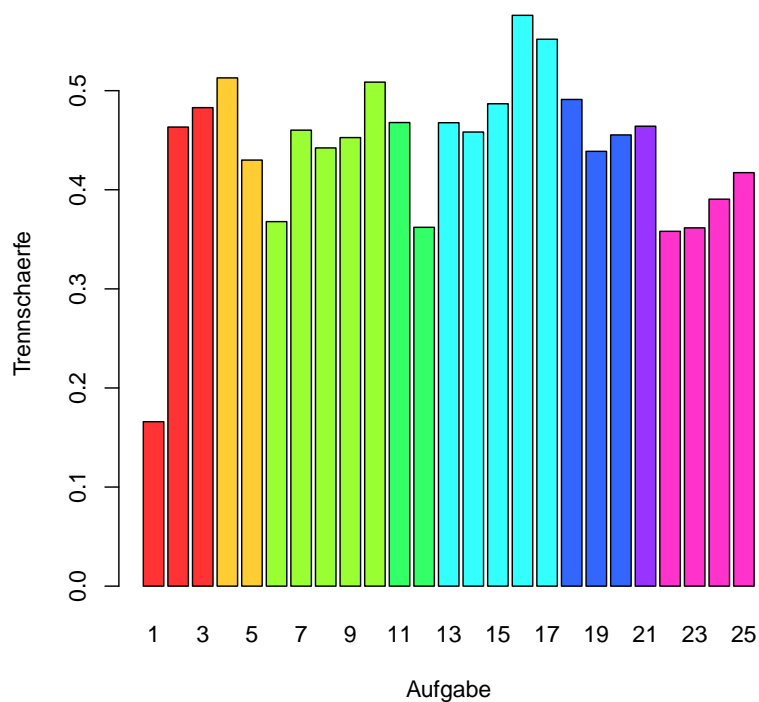
5.2.2 Anteil nach Fachgebiet

Folgendes Diagramm zeigt den mittleren Anteil korrekt gelöster Aufgaben nach Fachgebiet. Dabei ist zu beachten, dass pro Gebiet eine unterschiedliche Anzahl an Fragen, von eins bis fünf Stück, gestellt wurde.



5.3 Trennschärfe und Fehlermatrix

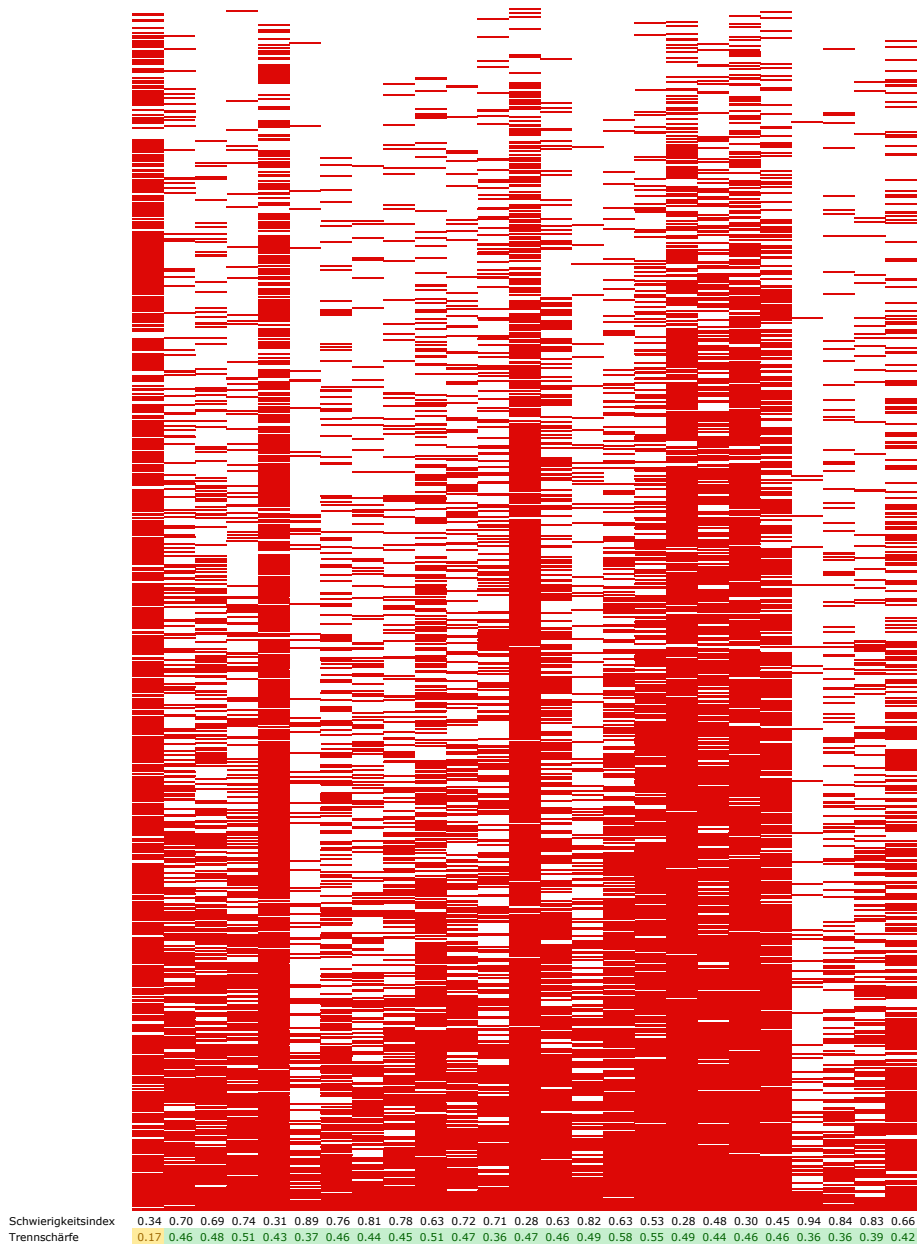
Die Trennschärfe einer Frage berechnet die Korrelation der Punkteverteilung der jeweiligen Frage mit der Punkteverteilung des Schlussergebnisses. Sie gibt ein Mass, wie gut diese Frage die Rangliste des Gesamtergebnisses widerspiegelt. Liegt die Trennschärfe einer Frage unter 0.3, stimmt mit dieser etwas nicht.



Die Fragen 1, 6, 12 und 22 – 25 haben im Vergleich zu den anderen eine geringere Trennschärfe, siehe auch Abschnitt 7.

Folgende Matrix² visualisiert die Fehlerverteilung:

- Pro Zeile sind die Resultate eines/r Studierenden visualisiert. Die Zeilen sind nach den Erfolgsquoten der Studierenden sortiert: von den erfolgreichsten Studierenden (25 Punkte) abwärts.
- Eine Spalte visualisiert die Fehlerverteilung einer Aufgabe. Weisse Bereiche entsprechen korrekten Antworten, rote Bereiche falsche Antworten.



²Erstellt und kommentiert von Markus Dahinden.

Die Matrix ermöglicht einen ersten Überblick über die Resultate:

- Rotlastige Spalten deuten auf schwierige Fragen hin, hier: Fragen 1, 5, 13, 18 – 21.
- Weisslastige Spalten sind ein Indiz für leichte Fragen, hier: Fragen 6 und 22.
- Die Verteilung der roten Felder visualisiert auch die Trennschärfe der Aufgaben.
- Weitere Bemerkungen im Abschnitt 7 über Empfehlungen.

5.4 Vergleich zu vorherigen Tests und im Semester

Für den Einsatz im HS09 haben wir bestehende Fragen³ in Teilen umformuliert und allenfalls Antwortalternativen ergänzt. Beim Grossteil der Fragen zeigt sich ein ähnliches Antwortverhalten wie in vorherigen Test, allein bei folgenden gibt es Abweichungen:

no.	Text	% in HS09	% in HS07/08
1	Die Wurzel aus 36 ...	34	63
5	Sei $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; dann gilt für $\cos(\alpha)$...	31	56
18	Die Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^x + 7$ ist ...	28	46

Die Fragen 3, 5, 13 und 20 haben die Studierenden auch im Laufe des Semesters erhalten und dann jeweils erfolgreicher beantwortet.

6 Rückmeldung der Studierenden

Nach Abschluss des Tests hatten wir die Teilnehmenden um eine Rückmeldung gebeten, auf die 392 Studierende ($\frac{1}{3}$ der Teilnehmenden) reagiert haben – mit folgenden Ergebnissen. Die Verteilung der Antworten ist im Anhang aufgeführt.

- Rund 90% der Studierenden empfehlen den Test anderen Studierenden.
- Die Fragen haben mehr als 75% der Studierenden geholfen, ihr mathematisches Schulwissen einzuschätzen.
- Rund 38% wurden durch die Fragen motivierten, den Schulstoff zu wiederholen.
- Rund 88% benötigten weniger als 1h für die Bearbeitung, rund 22% weniger als 0.5h.
- Knapp die Hälfte konnte ohne zusätzliche Hilfsmittel (neben Papier und Stift) den Test bearbeiten.

7 Empfehlungen für weitere Projekte

1. Gestaltung des Tests:

- Bei 25 bis 27 Fragen liegt die durchschnittliche Bearbeitungsdauer von weniger als einer Stunde in einem vernünftigen Zeitrahmen.

³Eine Zusammenstellung der Fragen im HS07 und HS08 unter http://www.math.ethz.ch/~lemuren/public/S21t_aftermath/fragen_grundkenntnisse_hs07und08.pdf

- Um allfällige Unterschiede der einzelnen Gebiete genauer zu identifizieren, sollte jeweils die gleiche Anzahl an Fragen gestellt werden.
- Die Information über den Schwierigkeitsindex einer Aufgabe sollte weiter systematisch erfasst werden, um durch gezielte Folgen von Aufgaben die Motivation und den Lernerfolg der Studierenden zu untersuchen:
 - Wie wirkt sich eine Veränderung einer Folge von Aufgaben mit jeweils unterschiedlichem Schwierigkeitsindex auf die Motivation, wie auf den Lernerfolg aus?
 - Zeigen Studierende eine verstärkte Ausdauer, ein verstärktes Interesse und damit bessere Leistungen?
- Der Datensatz für die Auswertung sollte genau bestimmt werden, um auch eine allfällige Automatisierung zu ermöglichen.

2. Vorschläge für allfällige inhaltliche Überarbeitungen der einzelnen Fragen:

Frage 1 Die sehr tiefe Trennschärfe und der tiefe Schwierigkeitsindex deuten darauf hin, dass Inhalt oder Form der Frage geprüft werden müssen.

Frage 6 Diese Frage konnten 89.1% korrekt beantworten mit einer tiefen Trennschärfe. Es gilt zu prüfen, ob diese Frage allenfalls zu leicht ist.

Frage 12 Diese Frage konnten 70.7% korrekt beantworten mit einer tiefen Trennschärfe. Es wäre interessant, die Erfolgsquote zu sehen, wenn die Frage ohne den Zusatz “geometrische Reihe ” formuliert wird.

Fragen 22 bis 25 zu Vektorgeometrie wurden sehr erfolgreich gelöst. Da sie aber im Vergleich zu den anderen mathematischen Gebieten eine tiefere Trennschärfe haben, ist zu überlegen, ob nicht allenfalls auch eine anspruchsvollere Aufgabe gestellt werden sollte.

3. Weitere Beobachtungen:

- Mit den Fragen 13, 18 und 20 hatten die Studierenden Schwierigkeiten, da die Erfolgsquoten knapp unter 30% liegen. Mit Trennschärfen über 0.46 können sich diese Fragen gut eignen, um die durchschnittlichen von den guten Studierenden zu unterscheiden.
- Die Fragen 10 und 17 trennen zuverlässig die schwächeren von den durchschnittlichen Studierenden (bei Trennschärfen grösser als 0.5).

8 Anhang

8.1 Rückmeldungen der Studierenden

Abgaben: $392/1176 = \frac{1}{3}$

Bei jeder Frage geben wir bei den Antworten die Prozentzahl der Studierenden an, welche jeweils die Antwort angekreuzt hatten.

Frage 1 (0.3 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Die Fragen haben mir geholfen, mein mathematisches Schulwissen einzuschätzen.

- 0.5% Überhaupt nicht
- 8.9% In geringem Masse
- 33.4% Teils, teils
- 49.2% Grösstenteils
- 9.4% In höchstem Masse
- 0.8% Keine Aussage möglich

Frage 2 (0.5 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Die Fragen haben mich motiviert, den Schulstoff zu wiederholen.

- 13.8% Überhaupt nicht
- 32.7% In geringem Masse
- 29.1% Teils, teils
- 17.9% Grösstenteils
- 5.4% In höchstem Masse
- 1.8% Keine Aussage möglich

Frage 3 (0.5 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Wie lange haben Sie für die inhaltliche Bearbeitung der Fragen gebraucht?

- 22.4% Weniger als 30 Minuten
- 34.7% 30 bis 45 Minuten
- 30.6% 45 bis 60 Minuten
- 11.5% Mehr als 60 Minuten
- 1.5% Keine Aussage möglich

Frage 4 (0.3 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Welche Hilfsmittel haben Sie eingesetzt? Sie können mehrere Antworten angeben.

- 53.6% Keine, ausser Papier und Stift
- 30.6% Eine Formelsammlung
- 28.6% Einen Taschenrechner
- 6.6% Einen programmierbaren Taschenrechner oder ein anderes mathematisches Programm
- 4.6% Andere, zum Beispiel Internet oder Mitstudierende
- 2.0% Keine Aussage möglich

Frage 5 (0.5 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Ich empfehle Anderen, einen solchen Test zu bearbeiten.

- 0.5% Überhaupt nicht
- 2.6% In geringem Masse
- 13.5% Teils, teils
- 40.1% Grösstenteils
- 44.4% In höchstem Masse
- 1.0% Keine Aussage möglich

8.2 Testfragen und Verteilung der Antworten

Folgende Fragen haben die Studierenden der sieben Vorlesungen erhalten⁴.

Abgaben: 1176 / 2211, **Durchschnitt:**15

Wir dokumentieren die Ergebnisse folgendermassen:

- Bei den Antworten gibt die erste Spalte an, wie viel Prozent der Studierenden aller Departemente jeweils die Antwort angekreuzt hatten, die zweite, nach dem Querstrich, wie viel Prozent der Studierenden aller Departemente ohne MATH/PHYS:
ab.c % der Stud. aller Departemente / xy.z % der Stud. aller Departemente ohne MATH/PHYS.
- Die Ergebnisse für die einzelnen Departemente liegen unter www.math.ethz.ch/~lemuren/public/S21t_aftermath/.

Frage 1 (0.0% haben diese Frage nicht beantwortet)

Die Wurzel aus 36 ...

0.2/0.1 gibt es nicht.
Doch, die gibt es.

65.2/67.2 ist gleich ± 6 .
Falsch. Eine Wurzel kann nicht negativ sein.

34.2/32.5 ist gleich 6.

0.0/0.0 ist gleich -6 .
Falsch. Eine Wurzel kann nicht negativ sein.

0.4/0.2 Keine der obigen Antworten ist richtig.

Die Quadratwurzel aus a ist die nichtnegative reelle Zahl x mit $x^2 = a$.

⁴Die Fragen 26 und 27 nur Studierende aus MATH/PHYS.

Frage 2 (0.4/0.5 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Welche der folgenden Rechenregeln stimmt für alle reellen Zahlen a und b ?

5.4/6.0 $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

Nein, finden Sie ein einfaches Gegenbeispiel.

1.8/2.1 $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Nein, finden Sie ein einfaches Gegenbeispiel.

3.1/3.2 $(a+b)(c+d) = ac + bd$

Sie vergessen die Zwischenterme!

19.3/20.8 $\ln(a+b) = \ln(a) + \ln(b)$

Nein. Jedoch gilt $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$.

69.9/67.4 Keine.

Frage 3 (0.5/0.6 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Für welche reellen Zahlen x ist die Ungleichung $|x-2| \leq 3$ erfüllt?

0.9/0.9 Die Ungleichung ist niemals erfüllt.

25.2/28.2 $x \leq 5$

Überlegen Sie sich, dass die Lösungsmenge sowohl nach oben als auch nach unten begrenzt sein muss.

3.7/4.0 $x \in [-3, 3]$

Offenbar ist -3 keine Lösung.

1.1/1.2 $x \geq -1$

Überlegen Sie sich, dass die Lösungsmenge sowohl nach oben als auch nach unten begrenzt sein muss.

68.6/65.1 Keine der obigen Antworten ist richtig.

Es gilt:

$$|x-2| \leq 3 \Leftrightarrow (x-2 \leq 3 \wedge -(x-2) \leq 3) \Leftrightarrow (x \leq 5 \wedge -1 \leq x) \Leftrightarrow x \in [-1, 5].$$

Frage 4 (2.5/3.0 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Für welches gegebene n ist $\cos \frac{\pi}{n} > \sin \frac{\pi}{n}$?

7.7/8.6 $n = 2$

2.7/3.3 $n = 3$

4.2/4.3 $n = 4$

74.1/71.5 $n = 5$

8.8/9.3 Für keines dieser n .

Es entspricht $\frac{\pi}{4}$ dem Winkel 45° . Machen Sie sich z.B. am Einheitskreis klar, dass sich dort die Sinus- und Cosinuskurve schneiden.

Frage 5 (2.6/3.2 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Sei $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; dann gilt für $\cos(\alpha)$:

10.5/11.2 Es kann über $\cos(\alpha)$ keine Aussage getroffen werden.

42.3/43.2 $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
Dies ist *eine* Möglichkeit, aber nicht die einzige.

5.5/6.2 $\cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
Dies ist *eine* Möglichkeit, aber nicht die einzige.

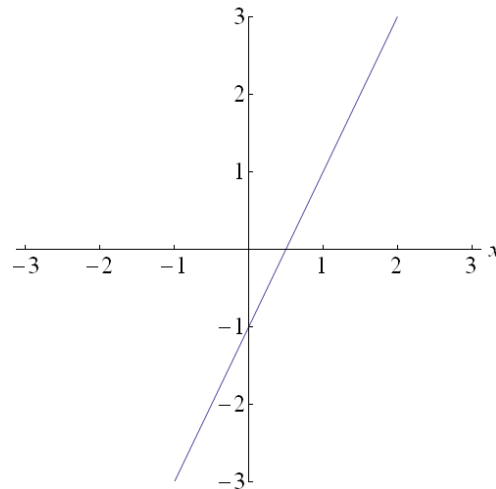
31.3/28.1 $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ oder $\cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

7.7/8.1 $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}$ oder $\cos(\alpha) = -\frac{1}{2}$

Hier kommt die Identität $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ zur Anwendung.

Frage 6 (0.4/0.5 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Wie lautet die Gleichung der Geraden auf dem Bild?



7.8/7.9 $y = \frac{1}{2}x - 1$

0.8 0.9 $y = \frac{1}{2}x + 1$

89.1/88.7 $y = 2x - 1$

0.9/0.9 $y = 2x + 1$

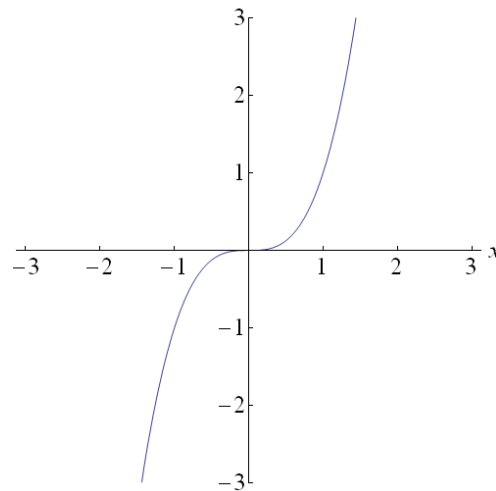
1.0/0.9 Keine der obigen Antworten ist richtig.

Der y -Achsenabschnitt b kann direkt abgelesen werden und ist $b = -1$. Die Steigung ist $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{1} = 2$, folglich erhalten wir $y = 2x - 1$.

Frage 7 (0.4/0.5 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Die Zeichnung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^3$.

Durch Verschieben um 2 Einheiten nach rechts erhalten wir den Graphen einer neuen Funktion g . Wie lautet die Funktionsgleichung von g ?



75.6/72.9 $g(x) = (x - 2)^3$

7.5/8.3 $g(x) = (x + 2)^3$

3.8/3.9 $g(x) = x^3 - 2$

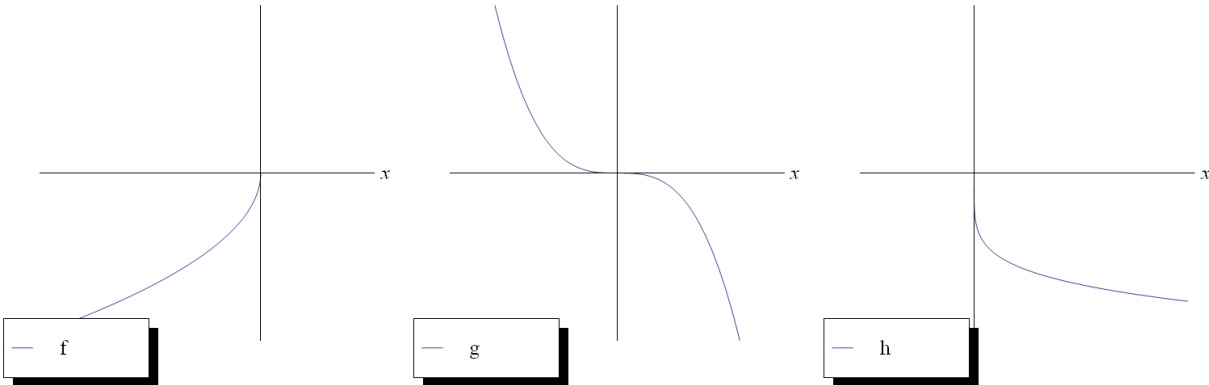
7.1/7.9 $g(x) = x^3 + 2$

5.6/6.4 Keine der obigen Antworten ist richtig.

Eine Verschiebung um 2 nach rechts bedeutet, dass die neue Funktion g den Wert $f(x)$ erst bei $x + 2$ annimmt:
 $g(x + 2) \stackrel{!}{=} f(x)$ für alle $x \Leftrightarrow g(x) = f(x - 2)$. D.h., in $f(x)$ ist die Variable x durch $x - 2$ zu ersetzen.

Frage 8 (1.5/1.8 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Welche drei Funktionen f, g, h gehören zu den drei folgenden Kurven?



1.0/1.2 $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}, g(x) = x^3, h(x) = -x^{\frac{1}{5}}$
Nein. Der Graph der Funktion g ist an der y -Achse gespiegelt.

6.4/7.5 $f(x) = x^{\frac{1}{2}}, g(x) = -x^3, h(x) = x^{-\frac{1}{5}}$
Nein. Die Wurzel ist für negative Zahlen nicht definiert, sodass f falsch ist.

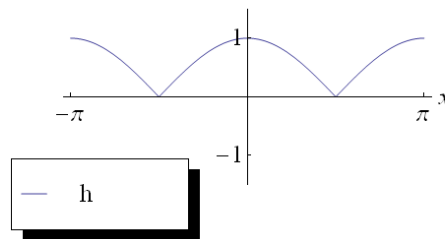
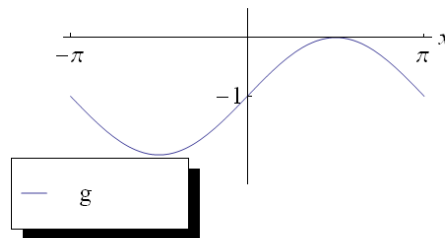
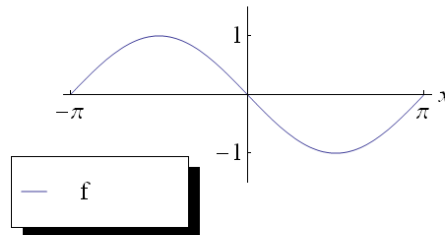
2.5/2.1 $f(x) = -x^{-\frac{1}{2}}, g(x) = x^3, h(x) = -x^{\frac{1}{5}}$
Nein. Siehe oben.

7.7/8.8 $f(x) = -(-x)^{-\frac{1}{2}}, g(x) = -x^3, h(x) = x^{-5}$
Nein. Für die Funktion h ist $h(x)$ positiv, falls x positiv ist.

80.9/78.7 $f(x) = -(-x)^{\frac{1}{2}}, g(x) = -x^3, h(x) = -x^{\frac{1}{5}}$
Richtig!

Frage 9 (1.1/1.4% haben diese Frage nicht beantwortet)

Welche drei Funktionen f, g, h gehören zu den drei folgenden Graphen?



- 5.3/5.7 $f(x) = \sin(x)$
 $g(x) = \sin(x) - 1$
 $h(x) = |\cos(x)|$

Nein. Man sieht z.B., dass f nicht die Form von $\sin(x)$, sondern von $\sin(-x)$ hat.

- 2.9/3.5 $f(x) = \sin(-x)$
 $g(x) = \cos(x) - 1$
 $h(x) = \cos|x|$

Nein. Z.B. gilt $\cos|x| = \cos(x) < 0, x \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, was nicht h entspricht.

- 8.8/9.9 $f(x) = \sin(-x)$
 $g(x) = \sin(x) - 1$
 $h(x) = \cos|x|$

Nein. Z.B. gilt $\cos|x| = \cos(x) < 0, x \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, was nicht h entspricht.

- 78.0/75.0 $f(x) = \sin(-x)$

$$g(x) = \sin(x) - 1$$

$$h(x) = |\cos(x)|$$

Richtig!

- 4.0/4.5 Keine der Antworten ist korrekt.
Doch, eine der Antworten ist richtig.

Frage 10 (2.1/2.5 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Welche Periode hat die Funktion f mit $f(x) = \sin(2x)$?

- 3.8/4.5 Es liegt keine Periode vor!
- 9.9/10.5 2π
- 62.5/58.8** π
- 13.8/14.8 $\frac{\pi}{2}$
- 7.9/8.9 4π

Eine Funktion f hat genau dann Periode p , wenn für alle x gilt: $f(x) = f(x + p)$. Für die Sinus-Funktion gilt für alle x : $\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$. In der Aufgabe folgt

$$f(x) = \sin(2x) = \sin(2x + 2\pi) = \sin(2(x + \pi)) = f(x + \pi).$$

Die Funktion f mit $f(x) = \sin(2x)$ hat die Periode π .

Frage 11 (2.0/2.4 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 1}{10n^3 + n + 21}$ beträgt

71.8/68.6 $\frac{1}{5}$.

16.6/17.9 0.

4.0/4.4 ∞ .

1.1/1.3 $\frac{1}{32}$.

4.6/5.4 $-\frac{1}{21}$.

Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 1}{10n^3 + n + 21} \underset{\substack{= \\ \text{Zähler und Nenner} \\ \text{dividiert durch } n^3}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n^3}}{10 + \frac{1}{n^2} + \frac{21}{n^3}} = \frac{1}{5}$$

Frage 12 (1.7/2.0 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Die Summe der unendlichen geometrischen Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$ beträgt

10.0/10.9 $\frac{1}{2}$.

70.7/68.2 $\frac{2}{3}$.

6.6/7.5 2.

2.8/3.0 $\frac{3}{2}$.

8.2/8.4 ∞ .

Für die betrachtete geometrische Reihe gilt

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} q_n.$$

Sei $q := \frac{q_{n+1}}{q_n}$. Dann ist $q = -\frac{1}{2}$. Da $|q| < 1$, konvergiert die geometrische Reihe und hat den Grenzwert $\frac{1}{1-q} = \frac{2}{3}$.

Frage 13 (3.2/3.9 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Der Grenzwert $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}$ beträgt

43.2/44.5 0.

27.9/25.2 $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

2.2/2.3 $\frac{1}{2}$.

4.5/4.6 $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

19.0/19.4 ∞ .

Erweitern des Zählers und Nenners mit $\sqrt{2+h} + \sqrt{2}$ ergibt:

$$\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h} \cdot \frac{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}} = \frac{(2+h)-2}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}.$$

Damit erhalten wir für den Grenzwert

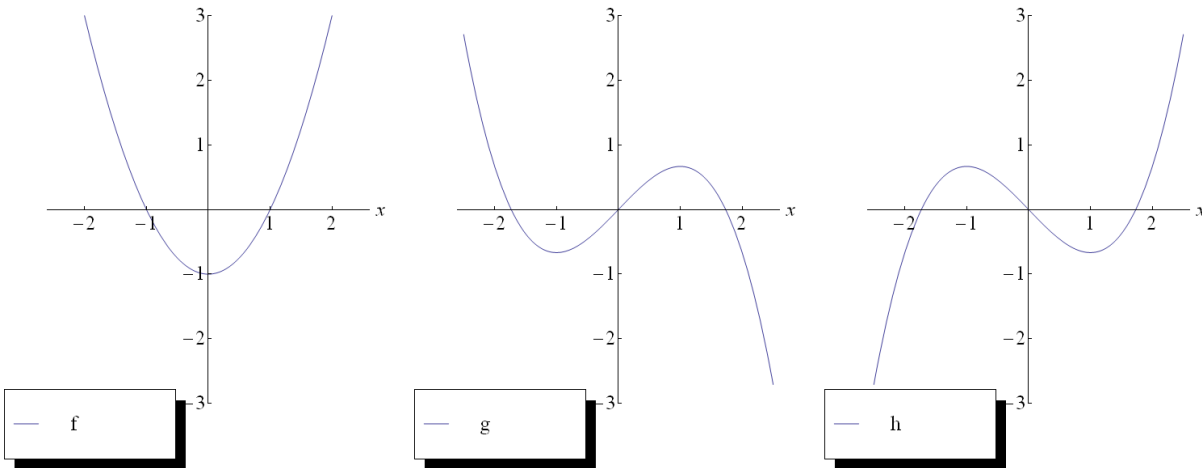
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Ein anderes Argument lautet: Der Grenzwert ist der Differentialquotient der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x}$ an der Stelle 2, und es gilt $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, und damit

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Frage 14 (2.0/2.5 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Die drei Graphen stellen die Funktionen f, g und h dar. Welche Aussage ist richtig?



3.3/3.7 $f' = g$

Nein. Z.B. ist die Steigung von f bei $x = -2$ negativ, aber $g(-2) > 0$.

6.7/6.7 $g' = f$

Nein. Z.B. ist die Steigung von g bei $x = -2$ negativ, aber $f(-2) > 0$.

10.9/11.6 $f' = h$

Nein. Z.B. wechselt die Ableitung von f zwischen -2 und -1 das Vorzeichen nicht, da die Steigung dort immer negativ verläuft. Aber es ist $g(-2) > 0$ und $g(-1) < 0$.

63.1/59.5 $h' = f$

Richtig!

13.9/15.0 $g' = h$

Nein. Die Ableitung von g im Nullpunkt ist positiv, aber $h(0) = 0$.

Frage 15 (0.9/1.1 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Sei f die Funktion mit $f(x) = e^{2x}$. Wie lautet die Gleichung der Ableitung f' ?

6.0/7.1 $f'(x) = 2xe^{2x-1}$

2.0/2.1 $f'(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$

81.8/79.6 $f'(x) = 2e^{2x}$

7.1/7.9 $f'(x) = e^{2x}$

2.2 /2.2 Keine der obigen Antworten ist richtig.

Es gilt: $f'(x) = (e^{2x})' \underset{\text{Kettenregel}}{=} 2e^{2x}$.

Frage 16 (2.5/2.7 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Sei $f(x) = \ln(\sin x)$. Wie lautet die Gleichung der Ableitung?

14.9/16.2 $f'(x) = \frac{1}{\sin(x)}$

62.9/59.3 $f'(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

6.0/6.3 $f'(x) = \ln(\cos(x))$

6.8/8.0 $f'(x) = \frac{1}{x} \sin(x) + \ln(\cos x)$

7.0/7.4 $f'(x) = \cos(x) \ln(\sin x)$

Die Aufgabenstellung ist unpräzise formuliert. Für $\ln(y)$ muss $y > 0$ erfüllt sein, was in unserem Fall auf die Bedingung $\sin(x) > 0$ führt. Der Definitionsbereich für f ist also einzuschränken, wir betrachten im Folgenden deshalb $D_f :=]0, \pi[$. Damit ist dann für $x \in D_f$ $\sin(x) > 0$ erfüllt. Die Anwendung der Kettenregel ergibt nun

$$f'(x) = (\ln(\sin(x)))' = \cos(x) \frac{1}{\sin(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Frage 17 (3.7/4.3 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Die Steigung der Tangente in $x_0 = \frac{\pi}{2}$ an den Graphen der Funktion f mit $f(x) = -\cos(3x)$ ist ...

13.0/13.5 Die Tangente existiert nicht.

11.9/12.8 1.

52.8/50.3 -3.

6.5/7.2 $3 \sin(3)$.

12.1/11.9 3.

Die Steigung der Tangente m_t an den Graphen einer Funktion f in einem Punkt x_0 ist gleich dem Wert der Ableitungsfunktion f' in x_0 , das heisst, $m_t = f'(x_0)$. Hier ist $f(x) = -\cos(3x)$ und $f'(x) = 3 \sin(3x)$, und damit die Steigung gleich

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 3 \cdot (-1) = -3.$$

Frage 18 (1.8/2.2 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Die Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^x + 7$ ist ...

5.4/5.8 eine Stammfunktion der Funktion g mit $g(x) = e^x$.

Nein, für f gilt $f'(x) = e^x + x \cdot e^x \neq g(x)$.

13.4/13.8 die Ableitung der Funktion g mit $g(x) = e^x + 7x$.

Nein, für g gilt $g'(x) = e^x + 7 \neq f(x)$.

27.9/23.8 eine Stammfunktion der Funktion g mit $g(x) = e^x + x \cdot e^x$.

Richtig, es gilt nach Produkt- und Summenregel $f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x + 0 = g(x)$.

24.8/27.7 die Ableitung der Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{2}x^2 \cdot e^x + 7x$.

Nein, es gilt nach Produkt- und Summenregel $g'(x) = xe^x + \frac{1}{2}x^2 \cdot e^x + 7$.

26.8/26.6 Alle obigen Aussagen sind falsch.

Frage 19 (4.3/5.0 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Das Integral $\int_0^\pi \sin\left(\frac{t}{2}\right)dt$ beträgt

47.8/45.0 2.

9.4/9.4 -2.

2.8/3.2 4.

5.4/5.5 $-\frac{1}{2}$.

30.3/32.0 Keine der obigen Antworten ist richtig.

Das Integral berechnet sich durch:

$$\int_0^\pi \sin\left(\frac{t}{2}\right)dt = -2 \cos\left(\frac{t}{2}\right) \Big|_0^\pi = -2(\cos(\frac{\pi}{2}) - 1) = 2.$$

Frage 20 (4.8/5.4 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Sei f die Funktion mit $f(x) = \int_3^x \sin(t)dt$. Wie lautet die Gleichung der Ableitung?

19.2/20.8 $f'(x) = \cos(x) - \cos(3)$

18.7/18.8 $f'(x) = \sin(x) - \sin(3)$

11.8/12.3 $f'(x) = \cos(x)$

30.1/27.8 $f'(x) = \sin(x)$

15.4/14.9 Keine der Gleichungen ist korrekt.

Sei f eine stetige Funktion und a eine Konstante. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung besagt, dass die Funktion F mit $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ eine Stammfunktion von f ist. Es gilt also $F'(x) = f(x)$. Setze hier f als die Funktion $f(x) = \sin x$ und $a = 3$.

Alternative: Berechne das Integral direkt durch:

$$\int_3^x \sin(t)dt = -\cos t \Big|_3^x = -\cos x + \cos 3.$$

Dann ist $f'(x) = (-\cos x + \cos 3)' = \sin x$.

Frage 21 (5.9/6.9 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Welches Paar von Gleichungen bzw. Parameterdarstellungen definiert Geraden, die nicht zueinander senkrecht sind?

10.5/11.6 $y = \frac{1}{3}x; 3x + y - \frac{1}{4} = 0$

20.2/21.0 $\begin{cases} x = \frac{3}{4}t \\ y = \frac{1}{2}t \end{cases}; \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 3 + 3t \end{cases}$

44.6/40.6 $y = \frac{2}{3}x + 1; x = -\frac{3}{2}y - 9$

9.8/9.9 $y = -\frac{1}{4}x; x = \frac{1}{4}y + 4$

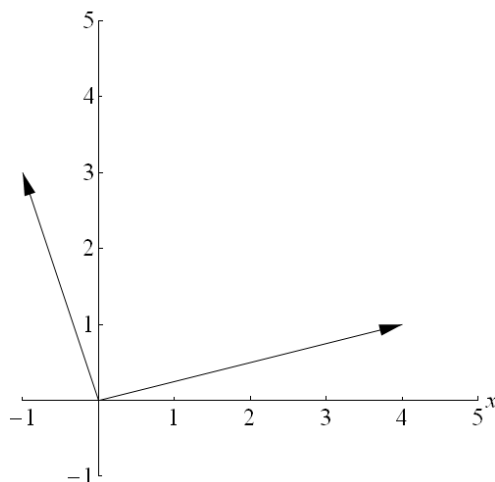
9.0/10.0 $y = x; y = 1 - x$

Zwei Geraden $g_1 : y = m_1x + b_1$ und $g_2 : y = m_2x + b_2$ stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn das Produkt der beiden Steigungen gleich minus eins ist: $m_1 \cdot m_2 = -1$. In den fünf Beispielen trifft dies nur für $m_1 = \frac{2}{3}$ und $m_2 = -\frac{3}{2}$ nicht zu.

Beachten Sie, dass die Gleichungen in die richtige Form gebracht werden müssen.

Frage 22 (1.3/1.5 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Welcher Vektor entspricht der Summe der beiden Vektoren im Bild?



1.4/1.6 $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

1.4/1.6 $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

1.3/1.3 $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

0.9/1.1 $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

93.9/93.0 Keine der obigen Antworten ist richtig.

Die beiden Vektoren im Bild haben die Koordinaten $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Wir bezeichnen sie mit \vec{v} und \vec{w} . Dann ist

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + (-1) \\ 1 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Diese Lösungsmöglichkeit wird nicht angeboten.

Frage 23 (2.0/2.2 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Dann ist $|\vec{a}| =$

1.9/1.9 1.

0.3/0.2 2.

84.4/83.2 3.

9.0/9.7 9.

2.6/2.7 Keines davon.

Der Betrag eines Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ berechnet sich durch

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

In unserem Fall rechnen wir nach, dass $\sqrt{1 + 4 + 4} = 3$ gilt.

Frage 24 (1.6/1.7% haben diese Frage nicht beantwortet)

Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann ist das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b} =$

4.3/4.9 $\sqrt{6}$.

83.2/82.3 6.

0.3/0.4 36.

1.0/0.9 $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

9.6/9.8 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist die Summe der Produkte der jeweiligen Koordinaten:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 6.$$

Beachten Sie mit Blick auf die vorherige Aufgabe, dass $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$ gilt.

Frage 25 (2.4/2.4 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann ist das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b} =$

65.8/63.6 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

15.2/15.8 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

7.0/7.7 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

8.8/9.5 0.

0.9/0.9 2.

Das Vektorprodukt zweier Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ berechnet sich durch:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

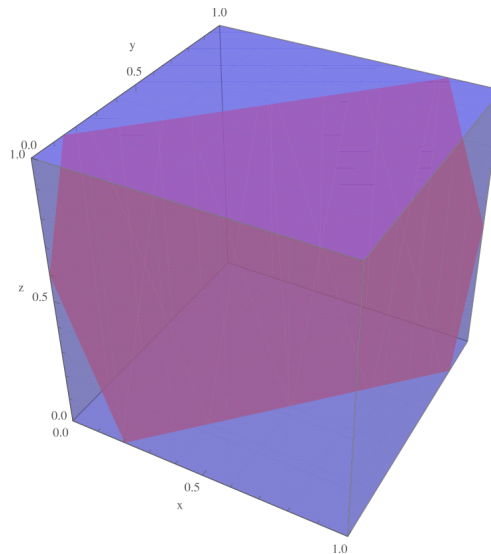
Setzen Sie nun die Koordinaten ein und erhalten $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Frage 26 (nur MATH/PHYS) (1.8 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Der Durchschnitt einer Ebene mit einem Würfel ist – wenn er nicht leer ist oder aus einem Punkt besteht – ein Polygon. Die maximale Anzahl von Ecken, die ein solches Polygon haben kann, ist ...

- 1.3 3.
- 54.4 4.
- 28.1 6.
- 11.0 8.
- 3.5 Keine der anderen Antworten ist korrekt.

Im Bild sehen wir, dass das Schnittpolygon 6 Ecken haben kann:



Da ein Würfel 6 Seiten hat, kann eine Ebene höchstens diese 6 Flächen schneiden.

Vergleiche auch eine interaktive Visualisierung unter

<http://www.math.ethz.ch/~lemuren/public/grundkenntnisse/CubeIntersectedByPlane.nbp>

Frage 27 (nur MATH/PHYS) (4.4 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Auf wie viele Arten können n voneinander verschiedene Bücher auf drei Personen verteilt werden, sodass jede Person mindestens ein Buch erhält?

18.0 $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$

Nein. Die Anzahl Möglichkeiten, jeder Person *genau ein* Buch zu geben, ist $\binom{n}{3}$, und es gilt $\binom{n}{3} = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$.

9.2 $n^3 - 3$

21.9 $3^n - 3(2^n - 1)$

2.6 $3^n - 2^n + 1$

Beachten Sie, dass *jede* Person mindestens ein Buch haben soll.

43.9 Keine der angegebenen Formeln ist korrekt.

Es gibt 3^n Möglichkeiten, n Bücher auf 3 Personen zu verteilen - drei Möglichkeiten pro Buch. Davon müssen wir die Fälle subtrahieren, in welchen Personen ohne Buch bleiben. Jede Person geht in 2^n Fällen leer aus, allerdings überschneiden sich die 3 Fälle, in denen zwei Personen leer ausgehen. Wir erhalten $3^n - 3(2^n - 1)$.