

MATURITÄTSPRÜFUNGEN 2008

Fach: Mathematik

Lehrer: Prof. J. Züger

Als Hilfsmittel sind ein nicht grafikfähiger Taschenrechner und die Formelsammlung erlaubt.
Die Bearbeitungszeit beträgt 4 Stunden.
Die Ausrechnungen sind vollständig zu dokumentieren.
Die Aufgaben sind, sofern nichts anderes vermerkt ist, exakt zu lösen!
Beginne jede Aufgabe auf einem neuen Blatt!

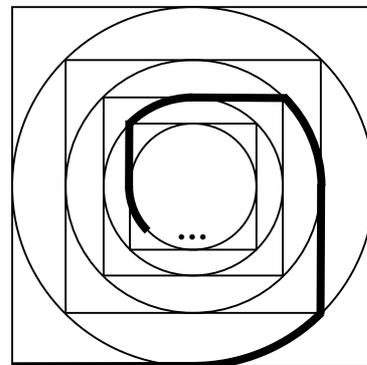
Viel Erfolg!

- 1) In ein Quadrat der Seitenlänge 8 cm wird ein Kreis einbeschrieben, diesem wieder ein Quadrat, diesem wieder ein Kreis, ... (siehe nebenstehendes Bild).

- a) Berechne die Gesamtlänge der Spirale, deren Anfang eingezeichnet ist.
b) Wie gross hätte die Länge der Quadratseite sein müssen, damit die Summe aller Quadratflächen 50 cm^2 ergeben hätte?
c) Bestimme den Grenzwert der Folge $b_n = \frac{2-3n^2}{n^2}$ für

$$n \rightarrow \infty!$$

Wie viele Glieder der Folge sind weiter als $\varepsilon = 0.001$ vom Grenzwert entfernt?



10 Punkte

- 2) Gegeben ist die Funktion $y = \frac{a \cdot x^2}{x-2}$ mit dem reellen Parameter a .

- a) Bestimme a so, dass eine Asymptote durch den Punkt $P(1/-3)$ geht.

Falls Dir a) nicht gelungen ist, so arbeite mit $a = 1$ weiter!

- b) Führe mit dem ermittelten a eine vollständige Kurvendiskussion durch: Bestimme die Nullstellen, die Extremal- und Wendepunkte und die Asymptoten. Stelle den Graphen in einem Koordinatensystem mit der Einheit 2 Häuschen dar!
c) Der Graph und die Horizontale $y = -a$ (entsprechende Zahl einsetzen) umschliessen eine Fläche. Berechne ihren Inhalt!

15 Punkte

3) Gegeben sind die beiden Parabeln $p_1 : y = \frac{x^2}{a} - a$ und $p_2 : y = x^2 - a^2$ mit

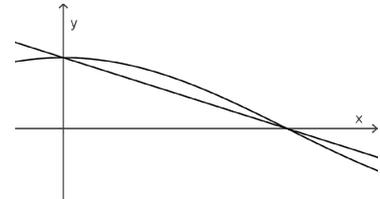
dem positiven Parameter a .

- Zeichne die Situation für $a = 3$, indem du die Nullstellen und die Extrempunkte bestimmst!
- Wie gross ist für $a = 3$ der Schnittwinkel der beiden Parabeln (in $^\circ$ auf zwei Stellen nach dem Komma)?
- Bestimme für $a = 3$ den Inhalt des Flächenstücks, das von den beiden Kurven umschlossen wird!
- Bestimme den Inhalt des umschlossenen Flächenstücks allgemein für den Parameterwert a ! (Achtung: Grenzen auch allgemein bestimmen!)
- Für welchen Parameterwert a zwischen 0 und 1 wird der umschlossene Flächeninhalt maximal?

13 Punkte

4) Drei voneinander unabhängige Aufgaben:

- Gegeben ist die Kurve $y = x \cdot e^x$. Das Kurvenstück zwischen der Nullstelle und dem Extrempunkt rotiert um die x-Achse. Berechne das entstehende Volumen!
- Berechne den Inhalt der Fläche zwischen Kurve und Gerade im dargestellten Bereich! Bei der Kurve handelt es sich um $y = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$, die Gerade geht durch die Achsenschnittpunkte.
- Im Punkt $P(a/?)$ der Kurve $y = x^2 + 1$ wird die Tangente eingezeichnet. Wie muss man a wählen, damit die Fläche des Dreiecks, gebildet aus der x-Achse, der Tangente und der Vertikalen bei $x=a$, minimalen Flächeninhalt hat?



13 Punkte

5) Ab dem Viertelfinal wird an der EURO 08 bei einem Unentschieden nach der Verlängerung die Entscheidung mittels Elfmeterschiessen herbeigeführt. In einer ersten Runde stehen beiden Mannschaften je 5 Elfmeter zur Verfügung, welche sie abwechselnd ausführen. Dem Torhüter der Mannschaft A gelingt es erfahrungsgemäss, 20% aller Elfmeter abzuwehren, jenem der Mannschaft B sogar 25%. Wir betrachten die Situation nach je zwei Elfmeter, Mannschaft A durfte als erste den Elfmeter ausführen.

- Stelle die Situation bis zum 4. Elfmeter in einem Baumdiagramm dar. Schreibe die Knoten mit dem jeweiligen Spielstand im Elfmeterschiessen an. (A4 quer)
- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach je zwei Elfmeter der Spielstand unentschieden ist?
- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach je zwei Elfmeter genau einer pariert wurde?
- Nach je zwei Elfmeter ist der Spielstand unentschieden. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Spielstand 1:1 lautet?
- Der Ersatztorhüter der Mannschaft C behauptet, er pariere mehr Elfmeter als der Haupttorhüter.
Tatsächlich hat im letzten Training der Ersatztorhüter von 10 Elfmeter 3 gehalten und der Haupttorhüter von 15 Elfmeter 2 gehalten.
 - Stelle den Sachverhalt in einer Vierfeldertafel dar.
 - Lässt sich die Aussage des Ersatztorhüters signifikant bestätigen? Ich erwarte unter anderem die Nullhypothese, die Alternativhypothese, die Angabe der Testgrösse und des Verwerfungsbereichs.

9 Punkte