

Prüfungsdauer: 4 Stunden
 Hilfsmittel: Taschenrechner und Formelsammlung

Die Lösungen müssen sauber, übersichtlich und vollständig aufgeschrieben werden. Es darf nur mit dunkelblauer bzw. schwarzer Tinte oder Kugelschreiber geschrieben werden. Verwende für jede der fünf Aufgaben ein neues Blatt.

Notenskala:

Note	6	5.5	5	4.5	4	3.5	3	2.5	2	1.5	1
Punkte	102 - 115	91 - 101	80 - 90	69 - 79	58 - 68	47 - 57	36 - 46	25 - 35	14 - 24	3 - 13	0 - 2

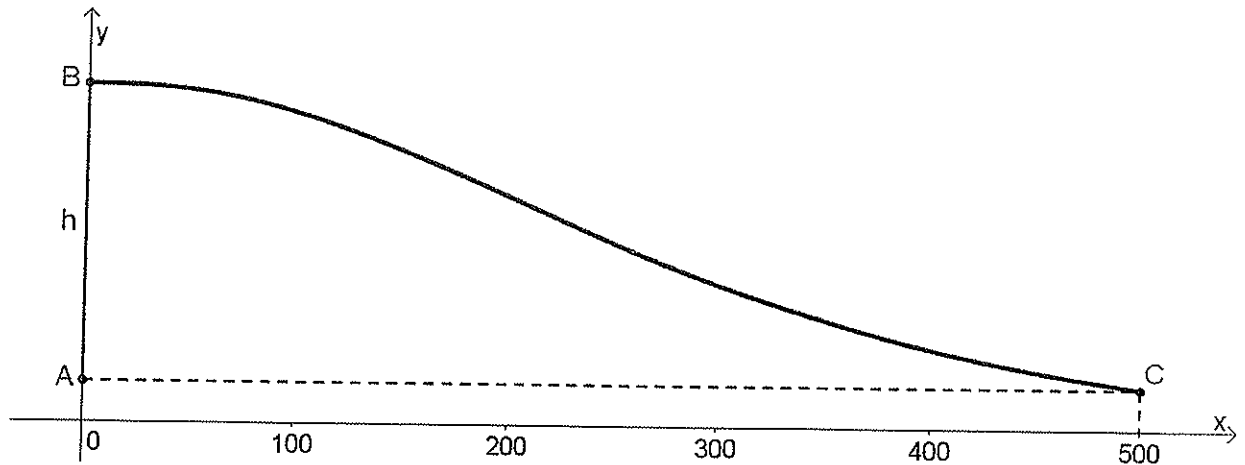
Aufgabe 1

Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = \frac{x^2 - 8x + 15}{(x - 2)^2}$.

- Führe eine vollständige Kurvendiskussion durch (Definitionsmenge, Asymptoten, Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte). Zeichne den Graphen und seine Asymptoten im Bereich $-6 \leq x \leq 10$ (Einheit: 2 Häuschen).
- Bestimme den Schnittpunkt P des Graphen von f mit der y -Achse und die Gleichung der Tangente in P .
- Es gibt ausser der Tangente aus Aufgabe b eine weitere Tangente an den Graphen von f , die ebenfalls durch P geht. Bestimme ihren Berührungspunkt Q und ihre Gleichung.
- Zeige, dass die Funktionsgleichung von f auch in der Form $f(x) = 1 - \frac{4}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2}$ geschrieben werden kann.
- Berechne den Inhalt der Fläche A , die der Graph von f zusammen mit der x -Achse einschliesst.
- Bestimme eine quadratische Funktion g mit folgenden Eigenschaften:
 - ihr Graph besitzt einen Tiefpunkt
 - sie hat die gleichen Nullstellen wie die Funktion f
 - ihr Graph schliesst mit der x -Achse eine Fläche ein, die gleich gross ist wie A .

(16 / 3 / 6 / 2 / 4 / 6 Punkte)

Aufgabe 2



Das Bild zeigt das Profil einer Indoor-Skipiste, welches durch eine Funktion der Form

$$f_k(x) = 60 \cdot (k^2 x^2 + 2kx + 2) \cdot e^{-kx}$$

mit dem Parameter $k \in \mathbb{R}^+$ beschrieben wird. Die Koordinaten haben die Einheit Meter. Demnach beträgt die horizontale Länge der Skipiste 500 m.

Für die Aufgaben a) bis c) sei nun zuerst einmal $k = 0.01$.

- Berechne die Höhe $h = \overline{AB}$ und die durchschnittliche Neigung der Skipiste.
- Berechne die Neigung der Skipiste im Endpunkt C.
- Berechne die Neigung an der steilsten Stelle der Skipiste.

Für die Aufgaben d) und e) ist der Parameter k nicht mehr festgelegt.

- Zeige, dass die Skipiste für alle $k \in \mathbb{R}^+$ im Punkt B horizontal ist.
- Einfache ("blaue") Skipisten dürfen gemäss FIS-Regeln eine maximale Neigung von 25 % haben. Wie muss k gewählt werden, damit diese Bedingung erfüllt ist?

(3 / 4 / 5 / 3 / 6 Punkte)

Aufgabe 3

In einem Becher befinden sich ein roter und ein blauer Würfel. Beim roten Würfel sind alle Augenzahlen gleich wahrscheinlich. Der blaue Würfel ist gefälscht. Bekannt sind die Wahrscheinlichkeiten für die Augenzahlen 1, 2, 3 und 4:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Wahrscheinlichkeit	0.18	0.20	0.14	0.15	?	?

Es wird nun mit beiden Würfeln gleichzeitig gewürfelt.

- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, eine Augensumme kleiner als 6 zu würfeln?
- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, eine gerade Augensumme zu würfeln?
- Angenommen, die Wahrscheinlichkeit, einen 4-er oder 5-er Pasch zu würfeln, betrage 0.055. Wie gross wäre dann die Wahrscheinlichkeit, einen 6-er Pasch zu würfeln?
- Ueli und Judith vereinbaren ein Glücksspiel, bei dem nur noch mit dem blauen Würfel gewürfelt wird. Bei einer Augenzahl von 5 gewinnt Ueli 2.-, bei einer Augenzahl 6 gewinnt er 8.-. Ansonsten gewinnt Judith 3.-. Bei welcher Wahrscheinlichkeit für die Augenzahl 6 auf dem blauen Würfel wäre das Spiel fair?

(4 / 3 / 5 / 4 Punkte)

Aufgabe 4

Eine Politesse kontrolliert Montag bis Freitag zweimal täglich, ob in ihrem Revier, welches 30 Parkplätze umfasst, Autos schwarz parkiert sind. Die Wahrscheinlichkeit, dass auf einem einzelnen Parkplatz ein schwarz parkiertes Auto steht, liegt bei jedem Rundgang erfahrungsgemäss bei 4 %.

- a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie auf ihrem Rundgang, beispielsweise am Montag Vormittag, keine Bussen ausstellen muss?
- b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie an drei aufeinanderfolgenden Werktagen weniger als acht Bussen ausstellt, obwohl sie jeden Tag die vorgeschriebenen zwei Rundgänge macht?

Während der Ferien sinkt die Schwarzparkierer-Quote drastisch. Die Wahrscheinlichkeit, auf einem Rundgang mindestens einen Schwarzparkierer zu erwischen, liegt darum nur noch bei 14 %.

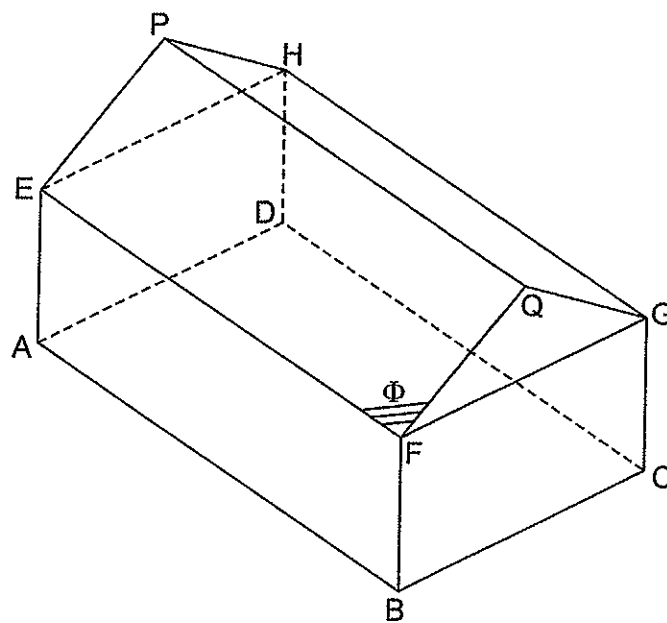
- c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit jetzt, dass auf einem Parkplatz ein schwarz parkiertes Auto steht?
- d) Die Politesse macht an den ersten beiden Ferientagen ihre 4 Rundgänge. Zeige (z.B. mit Hilfe eines Baumdiagramms), dass sie mit einer Wahrscheinlichkeit von 99.0 % auf mindestens zwei Rundgängen unterwegs war, ohne dabei eine Busse ausstellen zu müssen.

(3 / 5 / 4 / 5 Punkte)

Aufgabe 5

Dem auf der Grundrissebene stehenden Quader $ABCDEFGH$ ist ein (symmetrisches) Satteldach (ohne Dachvorsprünge) aufgesetzt. Die Endpunkte des Firstes sind mit P und Q bezeichnet.

Gegeben sind die Quaderecken $A(0|0|0)$, $B(12|8|0)$, $C(8|14|0)$, $D(-4|6|0)$ sowie die Gleichung der Dachebene $\Phi = (EFQP)$: $4x - 6y + 13z = 65$.



- Zeige, dass die Punkte A, B, C, D ein Rechteck bilden.
- Berechne die Punkte E, F, G, H .
- Berechne den Winkel φ zwischen der Dachebene Φ und der Ebene $(EFGH)$.
- Gib eine Koordinatengleichung der zweiten Dachebene $\Psi = (GHPQ)$ an.
- Berechne das Volumen des Hauses.
- Berechne den Abstand der Grundkante CD von der Dachebene Φ .

(3 / 3 / 4 / 5 / 4 / 5 Punkte)

1. Analysis

- a. Differentialrechnung
 - i. Grenzwerte
 - ii. Definition der Ableitung
 - iii. Ableitungsregeln (Produkt-, Quotienten- und Kettenregel)
 - iv. Graphische Bestimmung der Ableitung
 - v. Ableitung von speziellen Funktionen
- b. Integralrechnung
 - i. Stammfunktionen
 - ii. Flächenbestimmungen
 - iii. Rotationsvolumen
 - iv. Bogenlängen
- c. Anwendungen der Differential- und Integralrechnung
 - i. Gleichung von Normalen und Tangenten
 - ii. Schnittwinkel
 - iii. Vollständige Kurvendiskussion
 - iv. Extremwertprobleme
 - v. Funktionsbestimmungen
 - vi. Funktionen mit Parametern

2. Vektorgeometrie

- a. 2-dimensionale und 3-dimensionale Vektoren
 - i. Linearkombinationen
 - ii. Zwischenwinkel von Vektoren
 - iii. Flächen- und Volumenbestimmungen
 - iv. Abstandsprobleme
- b. Geraden und Ebenen
 - i. Parameterform der Geradengleichung
 - ii. Koordinatenform der Ebenengleichung
 - iii. Schnitte von Geraden und Ebenen
 - iv. Projektionen auf eine Gerade/Ebene
 - v. Zwischenwinkel von Geraden und Ebenen

3. Stochastik

- a. Kombinatorik (Permutationen und Auswahlprobleme)
- b. Wahrscheinlichkeitsrechnung (Addition, Multiplikation, Gegenwahrscheinlichkeiten, Baumdiagramme und Vierfeld-Tafeln)
- c. Erwartungswerte
- d. Binomialverteilungen
- e. Hypothesen, Fehler 1. und 2. Art

Analysis

1. Grenzwerte von Funktionen
2. Der Ableitungsbegriff
3. Tangenten
4. Ableitungsregeln
5. Extrem- und Wendepunkte
6. Polynomfunktionen
7. Gebrochen-rationale Funktionen
8. Exponential- und Logarithmusfunktionen
9. Das bestimmte Integral
10. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Stammfunktionen
11. Anwendungen der Integralrechnung

Vektorgeometrie

12. Grundbegriffe der Vektorrechnung
13. Das Skalarprodukt
14. Das Vektorprodukt
15. Geraden
16. Ebenen
17. Abstands- und Orthogonalitätsprobleme

Stochastik

18. Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung
19. Kombinatorik
20. Wahrscheinlichkeitsberechnung nach Laplace
21. Mehrstufige Wahrscheinlichkeitsexperimente (Bäume)
22. Bedingte Wahrscheinlichkeit
23. Binomische Verteilung
24. Zufallsvariablen, Verteilungen, Erwartungswert

Grundlagenfach Mathematik

Stoffübersicht: Maturitätsprüfung mündlich

ANALYSIS

1. Begriff der Funktion
Summe, Differenz, Produkt, Quotient zweier Funktionen
Zusammensetzung von Funktionen, Umkehrfunktionen
2. Spezielle Funktionen: Polynomfunktionen, rationale Funktionen,
Potenzfunktionen, Exponential- und Logarithmusfunktionen,
trigonometrische Funktionen
3. Folgen und Reihen
Konvergenz von Folgen und Reihen, wichtige Grenzwerte
4. Grenzwerte von Funktionen
Stetigkeit und Differenzierbarkeit
5. Ableitungsregeln: Summenregel, Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel
6. Kurvendiskussion für Funktionen und Funktionenscharen
7. Extremalaufgaben
8. Integralrechnung:
Flächeninhaltsfunktionen, Integralfunktionen
Stammfunktionen, unbestimmte Integrale
Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
Bestimmte Integrale
Uneigentliche Integrale
Flächenberechnungen

KOMBINATORIK UND WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG

1. Variationen und Kombinationen
2. Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung
3. Mehrstufige Zufallsversuche
Multiplikationssatz, bedingte Wahrscheinlichkeit
4. Geometrische Wahrscheinlichkeiten
5. Zufallsvariablen, Verteilungen, Erwartungswerte
6. Binomialverteilung, Hypergeometrische Verteilung

VEKTORGEOMETRIE

1. Vektoren im ebenen und räumlichen Koordinatensystem
2. Vektoroperationen: Summe, Vielfaches, Skalarprodukt, Vektorprodukt
3. Darstellung von Punkt, Gerade und Ebene in Parallelprojektion
4. Vektorgleichung einer Geraden
Vektorgleichung und Koordinatengleichung einer Ebene
5. Abstandsprobleme, Parallelität, Normalität, Winkel