

Klassen 4d, 4e, 4f

Mathematik
schriftlich

Hans-Heinrich Huwiler
Stefan Walser

Prüfungsdauer: 4 Stunden

Hilfsmittel: Formelsammlung / Taschenrechner

Maximal sind 101 Punkte möglich. Für die Note 6 sind 91 Punkte erforderlich.

Die Lösungen müssen logisch klar dargestellt und in sauberer Schrift präsentiert werden.

Bitte verwenden Sie für jede der fünf Aufgaben ein neues Blatt!

Aufgabe 1: Polynomfunktionen

Gegeben sind die Polynomfunktionen f_1 und f_2 mit

$$f_1(x) = -x^3 + x^2$$

$$f_2(x) = -2x^3 + 4x^2$$

sowie ihre grafische Darstellung in der Anlage. (Achtung: x- und y-Achse haben verschiedene Einheiten!).

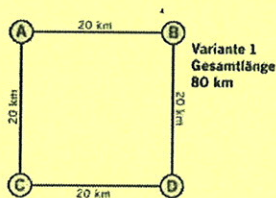
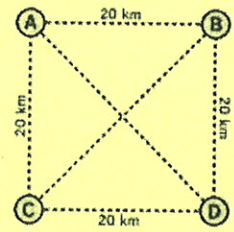
- Bestimmen Sie für beide Funktionen rechnerisch die Extremstellen und die Wendestellen.
- Zeichnen Sie in der Anlage mit verschiedenen Farben ein, welcher Graph zu welcher Funktion gehört.
- Berechnen Sie alle gemeinsamen Punkte der Graphen von f_1 und f_2 und ermitteln Sie den Inhalt der von den Graphen eingeschlossenen Fläche.
- Die in c) betrachtete Fläche liegt teilweise oberhalb und teilweise unterhalb der x-Achse. Bestimmen Sie den prozentualen Anteil der Fläche, die oberhalb der x-Achse liegt.
- Eine weitere Polynomfunktion dritten Grades wird gesucht. Sie soll f_3 heißen, Nullstellen bei 0 und 3 und Extremstellen bei 0 und 2 haben. Außerdem soll diese Funktion an der Stelle 1 den Funktionswert 6 haben. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von f_3 .
- Die Funktionsterme von f_1 , f_2 und f_3 haben Gemeinsamkeiten, d.h. die Nummerierung taucht in einer bestimmten Systematik in den Funktionstermen auf. Bestimmen Sie unter Einbeziehung dieser Gemeinsamkeiten die Gleichung einer allgemeinen Funktion f_n , die ebenfalls eine Polynomfunktion dritten Grades ist.
- Aus den einzelnen Funktionstermen kann man jeweils die Lage der Nullstellen, der Extremstellen und der Wendestelle des zugehörigen Graphen direkt ablesen. Bestimmen Sie die Nullstellen, die Extremstellen und die Wendestelle von f_5 .

(8 / 2 / 5 / 5 / 4 / 3 / 3)

Aufgabe 2: Kürzeste Schnellstrasse

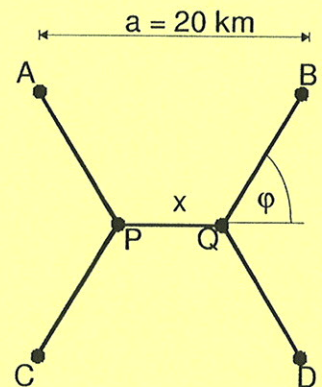
Aus "NZZ am Sonntag" vom 10. 2. 2008:

«Um dem boomenden Handelsaufkommen zwischen den vier Stadtteilen A, B, C und D Rechnung zu tragen, muss eine Schnellstrasse durch Denkhofen gebaut werden», überlegt sich der Stadtpräsident und zeichnet den nebenstehenden Lageplan: Die vier Stadtteile bilden die vier Eckpunkte eines Quadrates. Er gibt dem Chef des Bauamtes nun den Auftrag, verschiedene Varianten für eine Schnellstrasse zu erarbeiten, so dass alle vier Stadtteile miteinander verbunden sind. Einige Tage später liegen die folgenden Varianten des Bauamtes auf dem Pult des Stadtpräsidenten:



«Nicht schlecht», denkt sich der Stadtpräsident. «Die Variante 3, wo die Verbindungswege zwei Diagonalen bilden, ist wohl mit 56,6 km die kürzeste und damit die billigste Schnellstrasse für uns.»

Es gibt aber noch eine kürzere Verbindung, wie sie nebenstehend skizziert ist; diese kürzeste Verbindung gilt es hier zu finden.



- a) Zeigen Sie, dass die Gesamtlänge L als Funktion von x durch die folgende Gleichung beschrieben werden kann:

$$L(x) = x + 2\sqrt{x^2 - 2ax + 2a^2}$$

mit $x = \overline{PQ}$

und $a = 20 \text{ km}$

- b) Ermitteln Sie x derart, dass die Gesamtlänge L minimal wird.
 c) Wie gross ist die minimale Gesamtlänge $L_{\min}$ der Schnellstrasse?
 d) Zeigen Sie, dass der Winkel φ für diese kürzeste Verbindung $\varphi = 60^\circ$ beträgt.

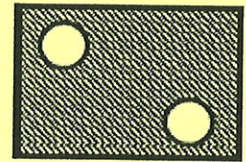
(4 / 7 / 3 / 4)

Aufgabe 3: Fussballkarten

Eine Schulklasse besteht aus 18 Jungen und 14 Mädchen. Bei einem Wettbewerb gewinnt die Klasse 25 Karten für ein Fussball-Länderspiel.

- a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine 25-köpfige Gruppe zusammenzustellen, wenn
- genau 10 Mädchen in der Gruppe sein sollen,
 - genau 10 Mädchen in der Gruppe sein sollen, aber die beiden Freundinnen Lena und Petra entweder nur gemeinsam oder gar nicht mitfahren wollen?
- b) Der Klassenlehrer beschliesst, die Karten zu verlosen. Er gibt dazu 25 Treffer und 7 Nieten in eine Urne und lässt jeden aus der Klasse einmal ziehen. Hugo soll als Zweiter ein Los ziehen. Er beschwert sich, dass seine Wahrscheinlichkeit, einen Treffer zu erzielen, geringer sei als bei Jana, die als Erste ziehen wird. Widerlegen Sie die Behauptung von Hugo durch Rechnung.

Vor dem Stadion befindet sich eine Torwand mit zwei Löchern. Kurt ist ein geübter Torwand-Schütze und trifft, wenn er auf das obere Loch zielt, dieses mit einer Wahrscheinlichkeit von 10 %. Für das untere Loch hat er sogar eine Trefferwahrscheinlichkeit von 40 %.



- c) Kurt schießt zuerst einmal auf das untere und dann einmal auf das obere Loch. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse
- A: „Beide Schüsse treffen ihr Ziel nicht“
 - B: „Genau ein Schuss trifft sein Ziel“.
- d) Wie oft muss Kurt auf das untere Loch mindestens schießen, damit er dieses mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95 % mindestens einmal trifft?
- e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Kurt, wenn er zuerst dreimal auf das untere und dann dreimal auf das obere Loch schießt, genau einmal sein Ziel trifft.

(4 / 3 / 3 / 3 / 3)

Aufgabe 4: Blutspenden

Jeder Mensch hat Blut einer bestimmten Blutgruppe. Die Blutgruppe B Rh+ tritt in der Bevölkerung mit einer relativen Häufigkeit von 11% auf.

- a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 100 Blutspendern genau 11 Blutspender mit der Blutgruppe B Rh+ sind,

Man kann davon ausgehen, dass in der Schweiz ein Anteil von 0,1% unter den möglichen Blutspendern mit Präcortol-Retroviren infiziert ist - was immer das sein mag. Jede Blutspende wird auf die Präcortol-Retroviren getestet. Der dafür verwendete Test erkennt eine vorhandene Infektion mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 %. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 2 % zeigt der Test eine Infektion auch bei nicht infiziertem Blut an.

- b) Blutspender werden nach der Spende üblicherweise über den Ausgang des Tests informiert. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem zufällig ausgewählten Spender das Testergebnis fehlerhaft ist.
- c) Bei einer Person weist der Test auf eine Infektion hin. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person tatsächlich infiziert ist. Interpretieren Sie diesen Wert.
- d) Die Testentwickler wollen den Test verbessern im Hinblick auf das erstaunliche Resultat von c). Da bisher der Test bei 2 % der nicht infizierten Personen dennoch auf eine Infektion hinweist, versuchen sie, diesen Prozentsatz zu senken. Ermitteln Sie den Wert, auf den er gesenkt werden müsste, damit die in c) bestimmte Wahrscheinlichkeit immerhin bei 50 % liegt.

(3 / 4 / 4 / 4)

Aufgabe 5: Würfel

Diese Aufgabe besteht aus zwei Teilen, die inhaltlich zusammenhängen. Verwenden Sie die Erkenntnisse des 1. Teils zur Lösung des 2. Teils.

Teil 1

Gegeben sind die Punkte $A(0/0/0)$, $B(3/0/0)$, $C(3/3/0)$, $D(0/3/0)$, $E(0/0/3)$, $F(3/0/3)$, $G(3/3/3)$, $H(0/3/3)$.

Im folgenden werden die Ebenen $\Phi(BDE)$ und $\Psi(CFH)$ sowie die Gerade $g(AG)$ untersucht.

- Zeichnen Sie den Würfel $ABCDEFGH$ in ein geeignetes Koordinatensystem ein. Zeichnen Sie die Dreiecke $\triangle BDE$ und $\triangle CFH$.
- Bestimmen Sie jeweils eine Koordinatengleichung für die Ebenen Φ und Ψ . Zeigen Sie, dass die Gerade g senkrecht auf den Ebenen Φ und Ψ steht.
- Berechnen Sie die Durchstosspunkte P bzw. Q der Geraden g mit den Ebenen Φ bzw. Ψ und zeichnen Sie sie ins Koordinatensystem ein. Zeigen Sie, dass P der Schwerpunkt des Dreiecks $\triangle BDE$ ist.

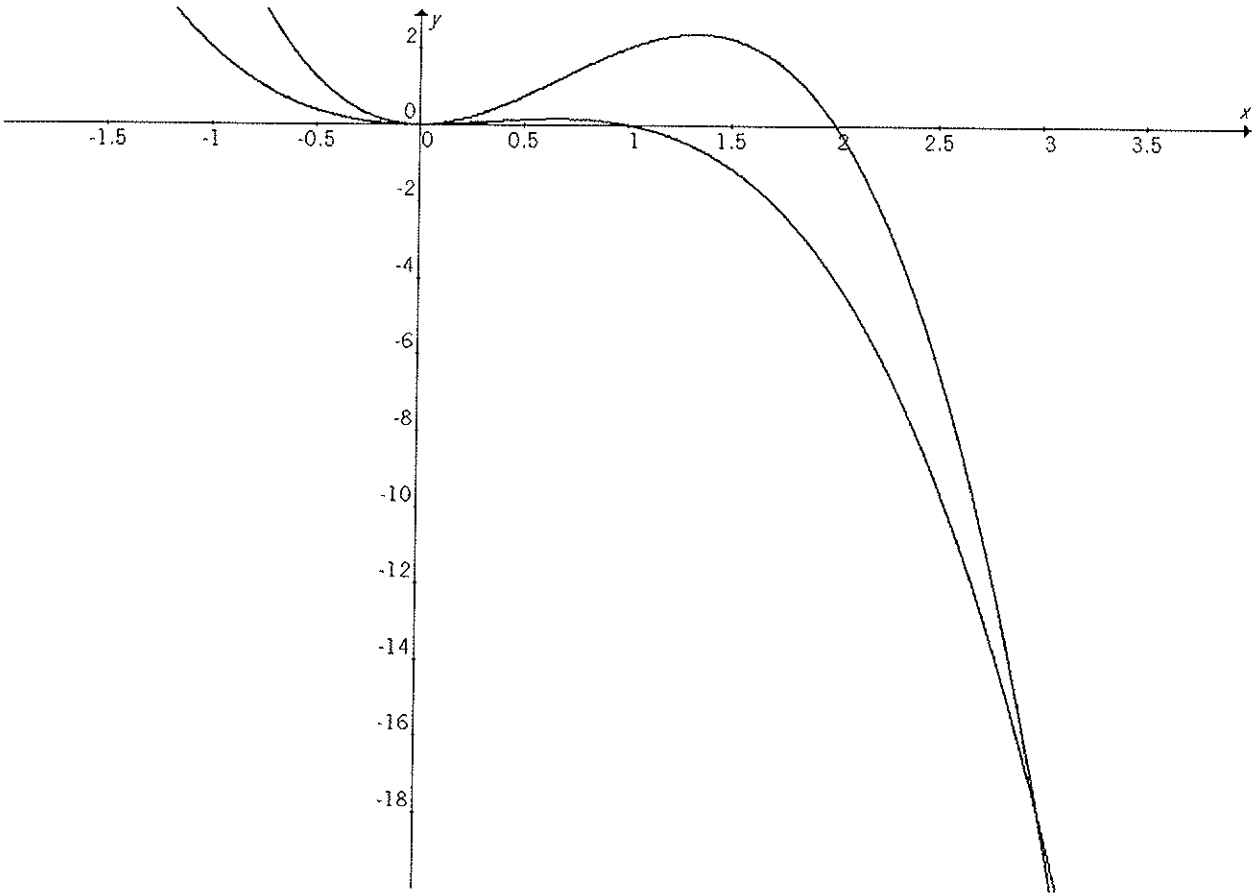
Teil 2

In diesem Teil werden die vorkommenden Punkte neu definiert.

- Zeigen Sie, dass die Punkte $B(6 / 15 / 21)$, $D(18 / 48 / 36)$ und $E(27 / 39 / 0)$ ein gleichseitiges Dreieck bilden.
- Die Punkte B , D und E sollen zu einem Würfel $ABCDEFGH$ ergänzt werden. Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte A , C , F , G und H .

(4 / 5 / 5 / 2 / 6)

Anlage: Polynomfunktionen



Klassen 4d und 4e

Mathematik
mündlich

Hans Heinrich Huwiler

Grundlagenfach Mathematik

Stoffübersicht: Maturitätsprüfung mündlich

ANALYSIS

1. Begriff der Funktion
Summe, Differenz, Produkt, Quotient zweier Funktionen
Zusammensetzung von Funktionen, Umkehrfunktionen
2. Spezielle Funktionen: Polynomfunktionen, rationale Funktionen,
Potenzfunktionen, Exponential- und Logarithmusfunktionen,
trigonometrische Funktionen
3. Folgen und Reihen
Konvergenz von Folgen und Reihen, wichtige Grenzwerte
4. Grenzwerte von Funktionen
Stetigkeit und Differenzierbarkeit
5. Ableitungsregeln: Summenregel, Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel
6. Kurvendiskussion für Funktionen und Funktionenscharen
7. Extremalaufgaben
8. Integralrechnung:
Flächeninhaltsfunktionen, Integralfunktionen
Stammfunktionen, unbestimmte Integrale
Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
Bestimmte Integrale
Uneigentliche Integrale
Flächenberechnungen

Klassen 4d und 4e

Mathematik
mündlich

Hans Heinrich Huwiler

KOMBINATORIK UND WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG

1. Variationen und Kombinationen
2. Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung
3. Mehrstufige Zufallsversuche
Multiplikationssatz, bedingte Wahrscheinlichkeit
4. Geometrische Wahrscheinlichkeiten
5. Zufallsvariablen, Verteilungen, Erwartungswerte
6. Binomialverteilung, Hypergeometrische Verteilung

VEKTORGEOMETRIE

1. Vektoren im ebenen und räumlichen Koordinatensystem
2. Vektoroperationen: Summe, Vielfaches, Skalarprodukt, Vektorprodukt
3. Darstellung von Punkt, Gerade und Ebene in Parallelprojektion
4. Vektorgleichung einer Geraden
Vektorgleichung und Koordinatengleichung einer Ebene
5. Abstandsprobleme, Parallelität, Normalität, Winkel

Klasse 4f

Mathematik
mündlich

Stefan Walser

Analysis

1. Funktionen

Polynomfunktionen, gebrochenrationale Funktionen, Potenzfunktionen, Exponential- und Logarithmusfunktionen, trigonometrische Funktionen. Stetigkeit, Monotonie, Umkehrfunktion

2. Folgen und Reihen; Grenzwerte

Konvergenz von Folgen und Reihen - geometrische Folgen und Reihen
Grenzwerte von Funktionen

3. Differentialrechnung

Begriff der Ableitung, Schreibweise, Interpretation
Ableitungsregeln (Summen-, Produkt-, Quotienten- und Kettenregel)
Kurvendiskussion
Extremalwertprobleme

4. Integralrechnung

Stammfunktionen; Bestimmtes Integral, Flächenfunktion
Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
Flächen- und Volumenberechnungen
Uneigentliche Integrale

Stochastik

5. Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Begriff der Wahrscheinlichkeit, Laplace-Versuche, mehrstufige Versuche, Pfadregeln

6. Bedingte Wahrscheinlichkeiten

7. Kombinatorik

8. Zufallsvariablen, Erwartungswerte, Verteilungen, Binomialverteilung

Vektorgeometrie

9. Grundlagen der Vektorgeometrie

10. Skalar- und Vektorprodukt

11. Gerade

Parametergleichung, Abstandsprobleme, gegenseitige Lage von Geraden

12. Ebene

Parametergleichung und Koordinatengleichung, Abstandsprobleme, Durchstosspunkte, Schnittgerade zweier Ebenen