

Klasse 4d

Mathematik
schriftlich

Felix Rauchenstein

Für jede Aufgabenummer ist ein neues Blatt zu verwenden.

Es ist auf eine saubere und vollständige Darstellung des Lösungsweges zu achten.

1. Gegeben sind die Punkte $A(7 \mid 2 \mid 12)$, $M(1 \mid 5 \mid 6)$ und $S(-3 \mid 13 \mid 14)$. A ist eine Ecke und M der Mittelpunkt der Grundfläche einer geraden quadratischen Pyramide mit der Spitze S.

- Gib eine Gleichung der Geraden $g = MS$ an.
- Zeige, dass \overline{MA} und \overline{MS} senkrecht zueinander sind.
- Gib eine Gleichung der Ebene E an, welche die Grundfläche der Pyramide enthält.
- Berechne den Winkel φ zwischen der Ebene E und der xy-Ebene.
- Berechne die Ecken B, C und D der Grundfläche und das Volumen der Pyramide.

(2/2/2/2/8 Punkte)

2. Gegeben sind die Punkte $P(0 \mid 9 \mid -10)$ und $Q(3 \mid 3 \mid -1)$ und die Gerade $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

- Berechne den Fusspunkt F des Lotes von P auf g.
- Bestimme alle Punkte R auf g so, dass das Dreieck RPQ rechtwinklig bei Q ist.

(4/3 Punkte)

3. Die Funktionenschar f_a ist gegeben durch $f_a(x) = \frac{x^3 - x^2}{(x + a)^2}$ mit dem Parameter $a \in \mathbb{R}$.

- Es sei $a = -2$. Diskutiere die zugehörige Funktion.
[Definitionsmenge, Asymptoten, Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte; Darstellung des Graphen mit Asymptoten mit Einheit 2 Häuschen (ganze Seite verwenden)]
- Bestimme die Asymptoten der Schar in Abhängigkeit des Parameters a.
- Kann a so gewählt werden, dass die zugehörige Funktion eine schiefe Asymptote hat, die durch den Nullpunkt geht? Falls ja, welches ist der entsprechende Parameterwert?
- Der Parameter a kann so festgelegt werden, dass die zugehörige Funktion keine Polstelle hat. Bestimme den entsprechenden Wert von a und zeichne die zugehörige Funktion.
- Für welchen Wert des Parameters a hat die zugehörige Funktion f_a an der Stelle $x = -1$ ein Extremum.

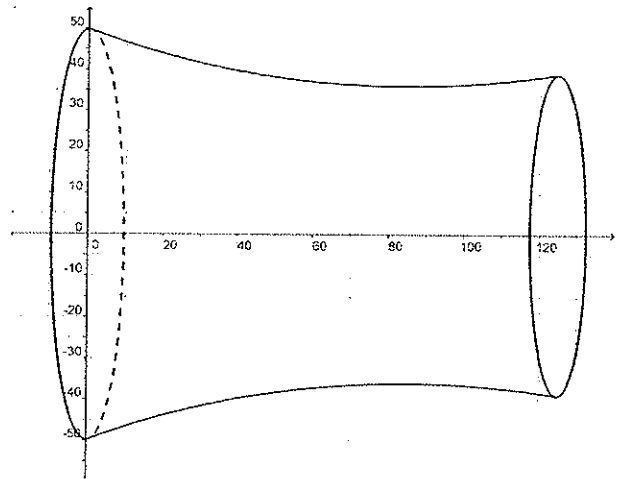
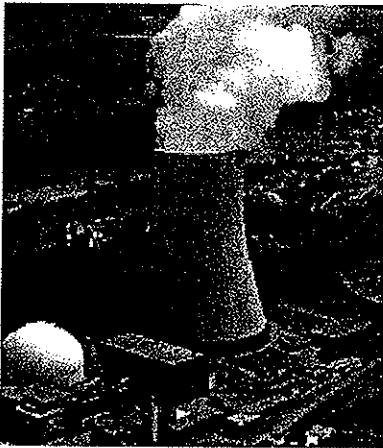
(22/3/2/3/4 Punkte)

Klasse 4d

Mathematik
schriftlich

Felix Rauchenstein

4. Kühltürme von Kraftwerken haben eine charakteristische Form, die sich aus physikalischen und bautechnischen Anforderungen ergibt. Eine geeignete Form erhält man, wenn man eine so genannte Kettenlinie um eine Achse rotieren lässt.
- Wenn wir als Rotationsachse die x-Achse wählen (also den Kühlturm in liegender Position betrachten), dann kann die Mantellinie eines 125 m hohen Kühlturmes durch die Kettenlinien-Funktion $f(x) = 18 \cdot (e^{0.01x - 0.85} + e^{-0.01x + 0.85})$ mit $0 \leq x \leq 125$ dargestellt werden.
- Welches ist demzufolge der Durchmesser des betrachteten Kühlturmes an der Basis (d.h. bei $x = 0$)? In welcher Höhe (also für welches x) hat der Kühlturm den kleinsten Durchmesser, und wie gross ist dieser?
 - Unter welchem Winkel trifft eine Mantellinie auf dem Boden auf?
 - Wie gross ist die Fläche des Achsenschnittes (also die doppelte Fläche zwischen der Kurve und der x-Achse?)
 - Welches Volumen hat der Rotationskörper?



(6/3/3/4 Punkte)

Klasse 4d

Mathematik
schriftlich

Felix Rauchenstein

5. Auf einem Los sind 36 Felder vorhanden, die durch eine Rubbelschicht verborgen sind. Auf zwei dieser Felder ist ein Joker aufgedruckt, auf acht Feldern eine Sonne und auf den restlichen Feldern eine Null. Ein Los kostet 10 Franken. Der Käufer darf nun genau zwei Felder aufrubbeln und erhält dann eine Auszahlung nach folgender Liste:

zwei Joker	Auszahlung 2000 Franken
ein Joker und eine Sonne	Auszahlung 200 Franken
zwei Sonnen	Auszahlung 20 Franken
alle anderen Kombinationen	Auszahlung 0 Franken

- Berechne die Gewinnerwartung für den Käufer eines Loses.
- Jemand kauft 20 Lose. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mindestens drei Gewinne (d.h. 2000, 200 oder 20 Franken) hat?
- Die Lotteriegesellschaft liefert 1000 Lose an einen Kiosk. Wegen eines Druckfehlers ist auf 200 dieser Lose ein dritter Joker aufgedruckt anstelle einer der acht Sonnen. Nun kauft jemand ein Los an diesem Kiosk und rubbelt zwei Joker auf. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um ein Los mit Druckfehler handelt?

(4 / 4 / 4 Punkte)

6. Vom Stapel eines gewöhnlichen Jasskartenspiels (9 Eicheln, 9 Rosen, 9 Schellen, 9 Schilten) werden nacheinander so lange zufällig Karten gezogen (ohne Zurücklegen), bis eine Karte mit einer schon vorher gezogenen Farbe erscheint. Diese letzte Karte mit der bereits vorhandenen Farbe wird zurück auf den Stapel gelegt. Den auf diese Weise ausgewählten Karten sagen wir eine "Ziehung". Eine "Ziehung" enthält also eine, zwei, drei oder vier Karten.

Beispiel: 1. Karte: Schellen-Bauer 2. Karte: Rosen-7
3. Karte: Eichel-Ass 4. Karte: Rosen-König

Mit der 4. Karte hat sich die Farbe der "Rosen" wiederholt. Der gezogene Rosen-König wird deshalb zurück auf den Stapel gelegt. Die "Ziehung" besteht also aus den folgenden drei Karten: Schellen-Bauer, Rosen-7, Eichel-Ass.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht eine "Ziehung" aus zwei Karten?
- Zeichne einen möglichst einfachen Baum, welcher die Situation für "Ziehungen" mit einer, zwei, drei oder vier gezogenen Karten wiedergibt.
- Die Zufallsvariable X bezeichne die Anzahl der Karten, welche zu einer "Ziehung" gehört. Berechne die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X und ihren Erwartungswert $E(X)$.
- Welches der beiden folgenden Ereignisse ist wahrscheinlicher:
 - Eine "Ziehung" besteht aus vier Nummernbildern (6, 7, 8 oder 9).
 - Eine "Ziehung" besteht aus zwei Königen.

(3 / 3 / 5 / 4 Punkte)

Klasse 4d

Mathematik
mündlich

Felix Rauchenstein

Analysis

1. Grenzwerte von Funktionen
2. Der Ableitungsbegriff
3. Tangenten
4. Ableitungsregeln
5. Extrem- und Wendepunkte
6. Polynomfunktionen
7. Gebrochen-rationale Funktionen
8. Exponential- und Logarithmusfunktionen
9. Das bestimmte Integral
10. Flächenberechnung
11. Rotationskörper

Vektorgeometrie

12. Grundbegriffe der Vektorrechnung
13. Das Skalarprodukt
14. Das Vektorprodukt
15. Geraden
16. Ebenen
17. Abstands- und Orthogonalitätsprobleme

Wahrscheinlichkeitsrechnung

18. Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung
19. Kombinatorik
20. Wahrscheinlichkeitsberechnung nach Laplace
21. Mehrstufige Wahrscheinlichkeitsexperimente (Bäume)
22. Bedingte Wahrscheinlichkeit
23. Binomische Verteilung
24. Zufallsvariablen, Verteilungen, Erwartungswert