

Klasse 4B

Mathematik
schriftlich

Peter Strickler

Zeit: 4h; Formelsammlungen, einfacher TR; Max.: 60 P (50 P: Note 6)

Viel Glück!

A Kürzere Aufgaben (je 5 Punkte)

- 1 Die Kurven $y_1 = \frac{1}{2}x^2$ und $y_2 = x^2 - a$ schneiden sich in $S(1/\dots)$ und $R(-1/\dots)$.

Berechne zuerst a und dann die sichelförmige Fläche zwischen den beiden Kurven (und zwischen R und S). Mache eine Skizze!

- 2 Die Tangentenfunktion $t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ ist eine lineare Näherung für $f(x)$ in einer Umgebung von x_0 . Eine noch bessere Näherung ist die

$$\text{Funktion } p(x) = t(x) + \frac{1}{2} f''(x_0) \cdot (x - x_0)^2.$$

Gegeben sei die Glockenkurve $f(x) = e^{-x^2}$ und $x_0 = 0$.

- a Berechne $t(x)$. b Berechne $p(x)$. c Skizziere $f(x)$, $t(x)$ und $p(x)$ in einer Umgebung von x_0 .

- 3 Ein Flugzeug fliegt auf einer geraden Bahn g . Eine Beobachterin ist auf einer Bergspitze B . In welchem Punkt $F(x/y/z)$ befindet sich das Flugzeug, wenn es zur Beobachterin die kleinste Entfernung hat? (Berechne auch die kleinste Entfernung.)

$$g: \vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; B(3/4/-8)$$

- 4 Das perfekte Dreieck: Es ist rechtwinklig und die Seitenlängen bilden eine arithmetische Folge. Gib mit Hilfe einer kleinen Berechnung 4 mögliche Lösungen (4 „Tripel“). (Die Lösungen sollen aus natürlichen Zahlen bestehen.)

Klasse 4B

Mathematik
schriftlich

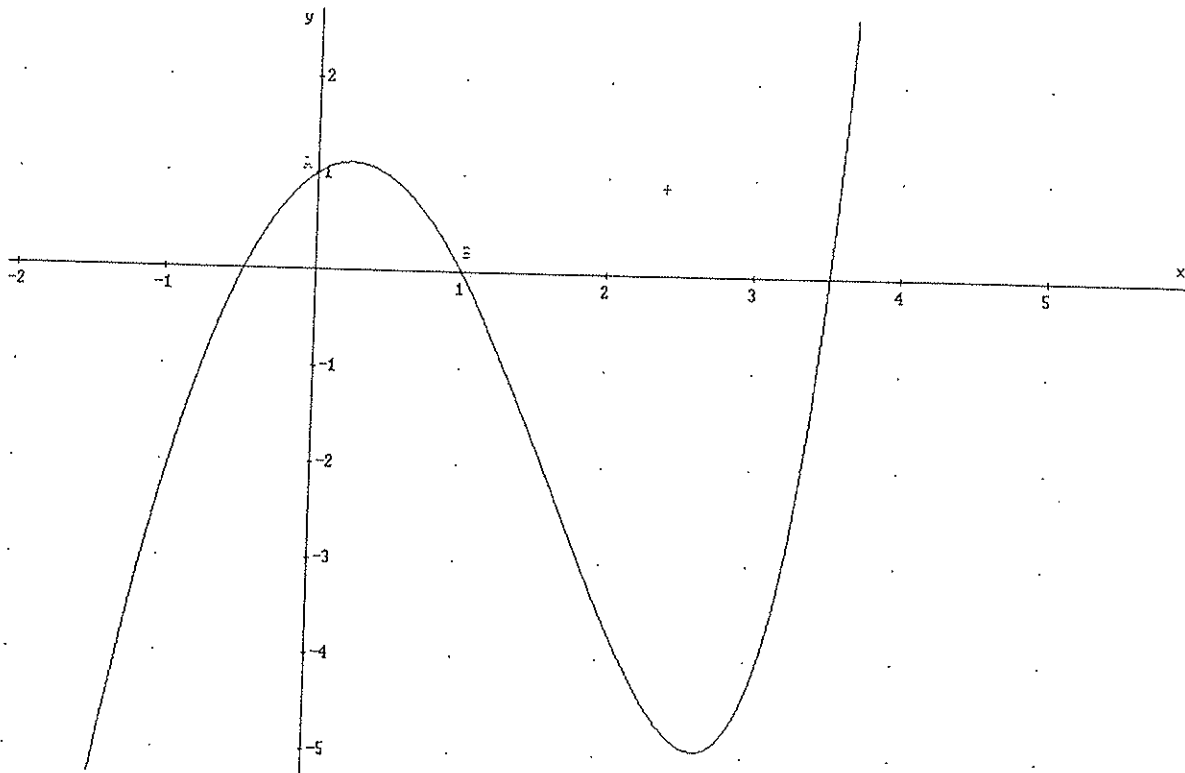
Peter Strickler

B Umfangreichere Aufgaben (je 10 Punkte)

5 Gegeben ist die abgebildete Funktion $g(x) = ax^2 + be^x$.

(Die Punkte A(0/1) und B(1/0) liegen auf der Kurve.)

- Berechne die Koeffizienten a und b mit Hilfe der Punkte A und B.
(Falls dir das nicht gelingt, rechne weiter mit $a = -2.7$ und $b = 1$.)
- Berechne den Wendepunkt.
- Liegt das lokale Minimum bei $x = e$? (Mit Begründung.)
- Zeige, dass $F(x) = (x^2 - 2x + 2) \cdot e^x$ eine Stammfunktion von $f(x) = x^2 e^x$ ist.
- Bestimme das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn man das Kurvenstück zwischen $x = 0$ und $x = 1$ um die x -Achse rotieren lässt.



Klasse 4B

Mathematik
schriftlich

Peter Strickler

6 Berechne bei allen Teilaufgaben (ohne (b)) zuerst $\int_1^a f(x) dx$ (oder $\int_0^a f(x) dx$) und führe dann den Grenzübergang $\lim_{a \rightarrow \infty}$ durch.

a $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = ?$

b $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = ?$

c Erkläre die Resultate von (a) und (b) durch eine zweifarbige Skizze. Markiere *gleiche* Flächen! Die Funktion bei (b) ist die *Umkehrfunktion* der Funktion bei (a).

d $\int_0^{\infty} \frac{1}{(x+1)^2} dx = ?$ (Dieses Resultat kann man *ohne* Rechnung aus (a) bestimmen. Warum?)

e $\int_0^{\infty} e^{-x} dx = ?$

7 Die Punkte A(2/1/9) und B(1/6/11) bestimmen eine Gerade g.

a Untersuche die Lage der Punkte C(-1/16/15) und D(3/4/11) in Bezug auf die Gerade g.

b Bestimme die Gleichung der Ebene E, die durch A, B und C (bzw. D) gegeben ist.

c Berechne den Abstand des Nullpunktes zur Ebene E.

d Gib den zum Nullpunkt spiegelsymmetrischen Punkt an (Spiegel = Ebene E).

e Zeige, dass der Normalenvektor von E tatsächlich senkrecht auf g steht.

Klasse 4B

Mathematik
schriftlich

Peter Strickler

8 Stochastik

8.1 Zufallsvariable und ihre Verteilungen

Beim Würfeln mit zwei regulären Tetraedern sei die Zufallsvariable X die Summe der zwei Augenzahlen.

- Stelle die Wahrscheinlichkeitsdichte in einem Histogramm dar.
- Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung von X .
- Wie gross ist die W'keit, dass die Augensumme höchstens 6 ist?

8.2 Mammographie – Screening

Eine 50-jährige symptomlose Frau nimmt an einem Brustkrebs-Screening teil. Sie erhält einen positiven Mammographie-Befund.

Man hat noch folgende Informationen:

Prävalenz: 0.8 %

Sensitivität Mammographie: 90 %

Spezifität Mammographie: 94 %

Frage: Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat diese Frau tatsächlich Brustkrebs?
(Tipp: Betrachte 1000 (Durchschnitts-) Frauen und zeichne ein Baumdiagramm.)

Prävalenz: Der Anteil der tatsächlich Erkrankten in der Bevölkerung.
(Auch: Verbreitung.)

Sensitivität: Die W'keit dafür, dass ein tatsächlich erkrankter Mensch positiv getestet wird. (Auch: Empfindlichkeit; Richtigpositiv-Rate.)

Spezifität: Die W'keit dafür, dass ein gesunder Mensch negativ getestet wird.
(Auch: Richtignegativ-Rate.)



Klasse 4B

Mathematik
mündlich

Peter Strickler

I VEKTORGEOMETRIE

1. Gleichungen der Geraden und Ebene: Gleichungsformen, Schnittprobleme, Spuren.
2. Skalarprodukt: Winkel zwischen Ebenen und Geraden.
3. Gegenseitige Lage von Ebenen und Geraden.
4. Vektorprodukt: Flächenberechnung, Abstand Punkt-Gerade.
5. Normalenformen: HNF, Abstand Punkt-Ebene

II ANALYSIS

Differentialrechnung

6. Begriff der Ableitung (Tangente, Normale, Steigungswinkel).
7. Ableitungsregeln: Produkt-, Quotienten-, Kettenregel.
8. Höhere Ableitungen und ihre Bedeutung.
9. Extremwertaufgaben.
10. Ableitung von Polynomen, trigonometrischen Funktionen, Exponential- und Log.-Funktionen.
11. Umkehrfunktionen und ihre Ableitungen.

Integralrechnung

12. Bestimmtes und unbestimmtes Integral.
13. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.
14. Integrationsregeln.
15. Flächenberechnung.
16. Drehkörpervolumen (Rotation um x-Achse).

III STOCHASTIK

17. Mittelwert, Varianz und Streuung.
18. Histogramme, standardisierte Histogramme und Normalverteilung.
19. Unabhängige Wahrscheinlichkeiten.
20. Wahrscheinlichkeitsalgebra (Addition und Multiplikation von Wahrscheinlichkeiten).
21. Baumdiagramme.
22. Zufallsgrössen und ihre Verteilungen (Gaussverteilung).