

Klassen 4e und 4g

 Mathematik
 schriftlich

Dr. Rolf Kunz

Hinweise: Für jede Aufgabennummer ist ein neues Blatt zu verwenden.
 Es wird eine saubere und vollständige Darstellung der Lösungswege verlangt.

Viel Erfolg!

1. Gegeben ist die Funktionenschar $f_a: x \mapsto f_a(x) = \frac{x^3 - x^2}{(x+a)^2}$.

- a) Es sei $a = -2$. Diskutiere die zugehörige Funktion.
 [Definitionsmenge, Asymptoten, Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte; Darstellung des Graph mit Asymptoten mit Einheit 2 Häuschen (ganze Seite verwenden)]
- b) Bestimme die Asymptoten der Schar in Abhängigkeit vom Parameter a .
- c) Kann a so gewählt werden, dass die zugehörige Funktion eine schräge Asymptote hat, die durch den Nullpunkt geht? Falls ja, welches ist der entsprechende Parameterwert?
- d) Der Parameter a kann so festgelegt werden, dass die zugehörige Funktion keine Polstelle hat. Bestimme den entsprechenden Wert von a und zeichne die zugehörige Funktion.
- e) Für welchen Wert des Parameters a hat die zugehörige Funktion f_a an der Stelle $x = -1$ ein Extremum?

Punktzahlen: 22 / 3 / 2 / 3 / 4

2. Gegeben sind die Punkte $A(7|2|12)$, $M(1|5|6)$ und $S(-3|1|14)$. A ist eine Ecke und M der Mittelpunkt der Grundfläche einer geraden quadratischen Pyramide mit der Spitze S .

- a) Gib eine Gleichung der Geraden $g := (MS)$ an.
- b) Zeige, dass \overline{MA} und \overline{MS} senkrecht zueinander sind.
- c) Gib eine Gleichung der Ebene E an, welche die Grundfläche der Pyramide enthält.
- d) Berechne den Winkel φ zwischen der Ebene E und der x_1x_2 -Ebene.
- e) Berechne die Ecken B , C und D der Grundfläche sowie das Volumen der Pyramide.
 [Zur Kontrolle: Es ergibt sich $B(-5|-1|9)$]
- f) Betrachte den Punkt $P(5|12|1)$.
 Berechne den Fusspunkt F des Lotes von P auf die Gerade $m := (AM)$
- g) Es sei die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ gegeben. Bestimme jene Punkte der Geraden g , von denen aus die Strecke \overline{AB} unter einem rechten Winkel erscheint.

Punktzahlen: 2 / 2 / 2 / 2 / 7 / 4 / 3

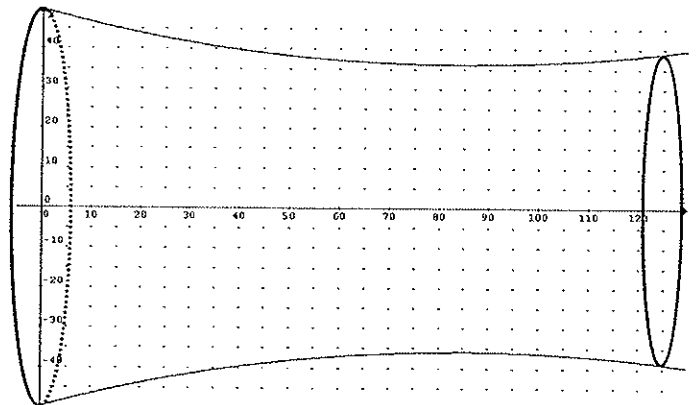
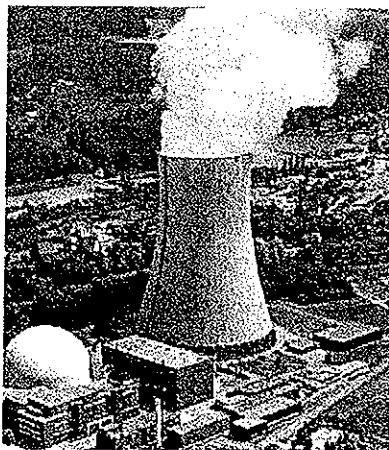
3. Kühltürme von Kraftwerken haben eine charakteristische Form, die sich aus physikalischen und bautechnischen Anforderungen ergeben. Eine geeignete Form ergibt sich, wenn man eine so genannte Kettenlinie um eine Achse rotieren lässt.

Wenn wir als Rotationsachse die x -Achse wählen (also den Kühlturm in ‚liegender Position‘ betrachten), dann kann die Mantellinie eines 125 m hohen Kühlturmes durch die Funktion

$$f: x \mapsto f(x) = 18(e^{0.01x-0.85} + e^{-0.01x+0.85}), \quad 0 \leq x \leq 125 \text{ dargestellt werden.}$$

- Welches ist demzufolge der Durchmesser des betrachteten Kühlturmes an der Basis (also für $x = 0$)? In welcher Höhe (also für welches x) hat der Kühlturm den kleinsten Durchmesser, und wie gross ist dieser?
- Unter welchem Winkel trifft eine Mantellinie auf dem Boden auf?
- Wie gross ist die Fläche des Achsenschnittes (also die doppelte Fläche zwischen der Kurve und der x -Achse?)
- Welches Volumen hat der Rotationskörper?

Punktzahlen: 6 / 3 / 3 / 4



4. Die vier Freunde Andy, Benny, Cyrill und Dany treffen sich in ihrem Stammlokal zum Essen.
- Die Freunde kommen mit ihrem PW der Reihe nach auf dem Parkplatz des Restaurants an. Auf wie viele Arten können sie auf den acht freien Parkplätzen des Lokals parkieren (d.h. auf wie viele Arten können die acht Plätze von den vier Freunden belegt werden)?
 - Heute bietet der Wirt fünf verschiedene Vorspeisen an. Jeder der vier Herren wählt (unabhängig von den anderen) eine Vorspeise aus. Wie viele Vorspeise-Kombinationen sind möglich?
 - In der Küche werden sieben verschiedene Pizzazutaten verwendet. In der Speisekarte sind alle Pizzavarianten mit mindestens vier Zutaten aufgeführt. Wie viele sind es?



Klassen 4e und 4g

Mathematik
schriftlich

Dr. Rolf Kunz

Fortsetzung Aufgabe 4:

- d) Andy weiss, dass es im Restaurant mit der Wahrscheinlichkeit 30% seine Lieblingsspeise Pilzragout gibt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann er bei sechs Besuchen mindestens dreimal mit Pilzragout rechnen?
- e) Benny wählt zum Dessert mit Vorliebe Tiramisu. Dieses ist aber nicht immer erhältlich. Der Wirt verspricht den Freunden Gratiswein, wenn Benny in 10 Besuchen nicht mindestens sieben mal Tiramisu bekommen kann. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommen die vier Freunde Gratiswein spendiert, wenn der Wirt mit an drei von vier Tagen Tiramisu anbietet?

Punktzahlen: 2 / 2 / 3 / 3 / 3

5. Vom Stapel eines gewöhnlichen Jasskartenspiels (9 Eichen, 9 Rosen, 9 Schellen, 9 Schilten) werden nacheinander so lange zufällig Karten gezogen (ohne Zurücklegen), bis eine Karte mit einer schon vorher gezogenen Farbe erscheint. Diese letzte Karte mit der bereits vorhandenen Farbe wird zurück auf den Stapel gelegt. Den auf diese Weise bestimmten Karten sagen wir eine "Ziehung". Eine "Ziehung" enthält also eine, zwei, drei oder vier Karten.

Beispiel:

1. Karte:	Schellen-Bauer
2. Karte:	Rosen-7
3. Karte:	Eichel-Ass
4. Karte:	Rosen-König

Mit der 4. Karte hat sich die Farbe der "Rosen" wiederholt. Der gezogene Rosen-König wird deshalb zurück auf den Stapel gelegt. Die "Ziehung" besteht also aus den folgenden *drei* Karten: **Schellen-Bauer, Rosen-7, Eichel-Ass.**

- a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht eine "Ziehung" aus zwei Karten?
- b) Zeichne einen möglichst einfachen Baum, welcher die Situation für "Ziehungen" mit einer, zwei, drei oder vier gezogenen Karten wiedergibt.
- c) Die Zufallsvariable X bezeichne die Anzahl der Karten, welche zu einer "Ziehung" gehört. Berechne die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X sowie ihren Erwartungswert $E(X)$.
- d) Welches der beiden folgenden Ereignisse ist wahrscheinlicher:
- Eine "Ziehung" besteht aus **vier Nummernbildern.**
 - Eine "Ziehung" besteht aus **zwei Königen.**

Punktzahlen: 3 / 3 / 5 / 4

Klassen 4e und 4g

Mathematik
mündlich

Dr. Rolf Kunz

THEMENLISTE

ANALYSIS

1. Wachstum von Bestandesgrössen, Wachstums- und Zerfallsfunktionen
2. Rekursive und explizite Formeln für Folgen und Reihen, Geometrische Folgen und Reihen
3. Grenzwerte bei Folgen und Reihen
4. Grenzwerte bei Funktionen, Stetigkeit von Funktionen
5. Begriff der Ableitung, Differenzierbarkeit
6. Einfache Ableitungsregeln
7. Zusammengesetzte Funktionen, Kettenregel
8. Ganzrationale Funktionen und gebrochenrationale Funktionen
9. Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen
10. Extremwertaufgaben
11. Anwendungen der Differentialrechnung in Wirtschaft und Naturwissenschaft
12. Stammfunktionen, unbestimmte Integrale
13. Bestimmte Integrale, Flächenberechnungen
14. Integralfunktionen, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung,
15. Einfache Integrationsregeln
16. Volumenberechnungen von Rotationskörpern

VEKTORGEOMETRIE

17. Gleichungen von Geraden und Ebenen
18. Skalarprodukt und Anwendungen davon
19. Gegenseitige Lage von Geraden
20. Gegenseitige Lage von Ebenen
21. Vektorprodukt
22. Winkel- und Abstandsberechnungen

STOCHASTIK

23. Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung
24. Mehrstufige Zufallsversuche
25. Elementare Kombinatorik
26. Grundbegriffe der Statistik
27. Zufallsvariable, Wahrscheinlichkeitsverteilungen
28. Erwartungswert, Varianz
29. Binomialverteilungen