

Maturitätsprüfung 2009
Grundlagenfach Mathematik

- Hilfsmittel:* Taschenrechner TI-89, Fundamentum Mathematik und Physik DMK/DPK
Bewertung: Die Anzahl der Punkte pro Teilaufgabe ist jeweils angegeben.
Gesamttotal: 46 Punkte
Zeit: 4 Stunden
Dokumentation: Vollständig, sauber und nachvollziehbar.
Formvorgaben: Alle Ergebnisse sind exakt anzugeben, sofern keine speziellen Vorgaben gemacht werden.
Bemerkung: Die Aufgabe 1 muss ohne Verwendung des Taschenrechners gelöst werden.
Die Lösung ist abzugeben, bevor der Taschenrechner ausgehändigt wird.
-

Aufgabe 1: (unabhängige Teilaufgaben, ohne Taschenrechner zu lösen)

- a) Berechne die erste Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$. (Resultat möglichst vereinfachen) [1.5 P.]
- b) Bestimme alle Werte von a so, dass $\int_0^a (x^2 - 2x) dx = 0$. [2 P.]
- c) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -9 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} x \\ 3 \\ z \end{pmatrix}$.
Berechne x und z so, dass der Vektor \vec{c} sowohl auf \vec{a} als auch auf \vec{b} senkrecht steht. [2.5 P.]
- d) Bestimme die Schnittpunkte des Kreises $k: (x-3)^2 + (y-6)^2 = 40$ und der Geraden $g: 3x + y + 5 = 0$. Kommentiere das Resultat in einem ganzen Satz. [3 P.]

Wenn Sie die Aufgabe 1 gelöst haben, geben Sie die Lösung ab. Danach dürfen Sie für die Bearbeitung der anderen Aufgaben den Taschenrechner benutzen.

Aufgabe 2:

Eine Urne enthält 5 rote, 3 weisse und 2 gelbe Kugeln.

(Hinweis: Die Resultate der Teilaufgaben a), b) und c) sind auf drei Nachkommastellen gerundet anzugeben.)

- a) Es werden einzelne Kugeln **mit Zurücklegen** gezogen. [3 P.]
- a1) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, bei einer Ziehung eine gelbe Kugel zu erhalten?
 - a2) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, bei 8 Ziehungen keine weisse Kugel zu erhalten?
 - a3) Wie wahrscheinlich ist es, bei 5 Ziehungen genau 2 gelbe Kugeln zu erhalten?
 - a4) Lotti zieht 10 Kugeln. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht sie beim letzten Zug die 7. weisse Kugel?
- b) Es werden nacheinander **ohne Zurücklegen** 2 Kugeln gezogen. Berechne die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse: [2 P.]
- A: Beide Kugeln haben verschiedene Farben
 - B: Die 2. Kugel ist rot oder gelb
- c) Nun werden drei Kugeln **mit einem Griff** gezogen. [2 P.]
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben genau 2 davon die gleiche Farbe?
- d) Wie oft muss jemand eine Kugel **mit Zurücklegen** mindestens ziehen, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 98% mindestens eine gelbe Kugel zieht? [2 P.]
- (Hinweis: Die Teilaufgabe d) muss ohne Verwendung des Befehls solve() oder ähnlicher Befehle des TI-89 gelöst werden.)

Aufgabe 3:

Gegeben sind die Ebene $\varepsilon: 2x + y - 2z + 24 = 0$ und die drei Punkte $A(2 \mid 3 \mid -7)$, $B(4 \mid 2 \mid -8)$ und $C(-4 \mid 0 \mid -7)$.

- a) Bestimme den Punkt D so, dass die Punkte $ABCD$ in dieser Reihenfolge ein Parallelogramm bilden. [1 P.]
- b) Bestimme die Koordinatengleichung der Ebene ABC sowie den Schnittwinkel der Ebene ABC mit der Ebene ε . (Resultat auf 3 Nachkommastellen gerundet angeben) [3 P.]
- c) Vom Punkt A aus wird das Lot auf die Ebene ε gefällt. Berechne die Koordinaten des Lotfusspunkts F . [2 P.]
- d) Der Punkt A wird in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ so weit verschoben, bis der verschobene Punkt von der Ebene ε den Abstand 3 hat. Wie weit muss der Punkt verschoben werden? (Sämtliche Lösungen exakt angeben) [3 P.]

Aufgabe 4:

Die Funktion $y = f(x) = (x - 2) \cdot e^x$ ist gegeben.

a) Bestimme die Nullstellen, Extremalwerte und Wendepunkte und zeichne den Funktionsgraphen im Bereich $-4 \leq x \leq 4$ und $-4 \leq y \leq 4$ (Einheit $\cong 2$ Häuschen). [4 P.]

b) In welchem Punkt schneidet die Wendetangente des Graphen die x -Achse? (Wendetangente = Tangente im Wendepunkt der Kurve) [2 P.]

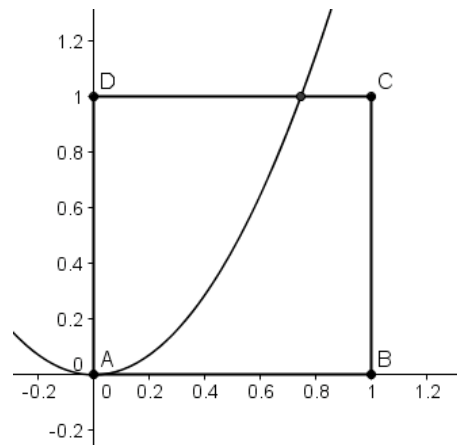
Im Folgenden wird für jede natürliche Zahl k die Funktion $y = f_k(x) = (x - k) \cdot e^x$ betrachtet. Ihr Graph sei die Kurve C_k .

c) Bestimme die Gleichung derjenigen Kurve, auf der die Tiefpunkte aller Kurven C_k liegen. (Ein Tiefpunkt ist ein Kurvenpunkt zu einem lokalen Minimum) [2 P.]

d) Berechne den Inhalt der nach links unbegrenzten Fläche, die von der Kurve C_k und der Kurve mit der Gleichung $y = -e^x$ berandet wird. [2 P.]

Aufgabe 5: Drei unabhängige Teilaufgaben

a) Für welche Zahl a halbiert die Kurve $y = a \cdot x^2$ den Flächeninhalt des Einheitsquadrates $A(0 | 0)$, $B(1 | 0)$, $C(1 | 1)$, $D(0 | 1)$?



[3 P.]

b) Gegeben ist eine Gerade g durch die Gleichung $y = \frac{5}{12}x$. Vom Punkt $S(12 | 5)$ der Geraden g wird das Lot auf die x -Achse gefällt. Vom Lotfußpunkt auf der x -Achse wird erneut das Lot gefällt, diesmal auf die Gerade g . Vom so erhaltenen Fußpunkt auf g wird wieder das Lot auf die x -Achse gefällt, usw. Wie lang sind alle entstehenden Lote zusammen? [3 P.]

c) Ein Hersteller produziert zylindrische Behälter mit Boden, aber ohne Deckel, die 1000 Liter fassen. Bestimme Höhe und Radius des Behälters so, dass der Materialverbrauch minimal wird. (Resultat auf 3 Nachkommastellen gerundet angeben) [3 P.]