

Wünsche eines  
Hochschullehrers an die  
künftigen  
Mathematikstudierenden

Albrecht Beutelspacher

# Mathematikausbildung an Schulen

- ◆ Selektiert nicht die besten Mathematiker (schwache Korrelation von Schulnote und Erfolg im Mathematikstudium)
- ◆ Die besten SchülerInnen entscheiden sich nicht für ein Mathematikstudium

# Inhalt

## A. Mathematische Basisfertigkeiten

- Zahlen, Funktionen, Algebra, Geometrie, Zufall

## B. Mathematische Ideen

- Beweis, Weltbeschreibung, Unendlichkeit, Struktur

## C. Sprachkompetenz

# Das Entscheidende

Der künftige Student sollte ...

... ein denkfähiger und denkwilliger  
und

... ein arbeitsfähiger und arbeitswilliger  
Mensch sein.

## A. Was sind die Fundamente?

- ◆ Selbstverständlicher Umgang mit mathematischem Basiswissen und Basistechniken
- ◆ Im wesentlichen Mathematik bis zur Mittelstufe
- ◆ Das ist wenig – aber das sollte beherrscht werden

# Fundamente 1: Zahlen

## ◆ Kleine Zahlen:

- Primzahlen, Quadratzahlen, ... Teilbarkeit
- Dezimalsystem

## ◆ Größenordnungen von Zahlen

- Beispiele für 1000, 100.000, ...
- Größenordnungen von berechneten Ergebnissen

## ◆ Eigenschaften:

- ganz – rational – irrational (Beispiele!)
- Zwischen je zwei rationale Zahlen passen unendlich viele rationale Zahlen

## Fundamente 2: Funktionen

- ◆ Funktionen beschreiben Zusammenhänge (Menge – Preis, Qualität – Preis, Leistung – Schulnoten, ...)
- ◆ Verschiedene Arten von Skalen (mit manchen darf man rechnen, mit andern nicht)
- ◆ Verschiedene Arten von Zusammenhängen (proportional, antiproportional – oder ganz anders)
- ◆ Verschiedene Arten von Funktionen (linear, quadratisch, periodisch exponentiell – oder ganz anders)

# Fundamente 3: Algebra

## ◆ Gleichungen

- Äquivalenzumformungen
- Lösen

## ◆ Buchstabenrechnen

- Umformungen von Termen, Klammerregeln
- Aufstellen einer Gleichung, die zu einer Sachaufgabe gehört



# Fundamente 4: Raum

## ◆ Raumvorstellung

- 2D – 3D

## ◆ Eigenschaften elementarer Figuren

- Gleichseitige, gleichschenklige, rechtwinklige Dreiecke
- Quadrat, Rechteck, Parallelogramm
- Kreis, Parabel, Ellipse,
- Umfang, Volumen, Symmetrie, besondere Punkte und Linien

## ◆ Analytische Geometrie

# Fundamente 5: Zufall

- ◆ Zufallsexperimente
- ◆ Häufigkeit – Wahrscheinlichkeit
- ◆ „Gefühl“ für Wahrscheinlichkeiten (Größenordnungen)
  - Wenn es zwei Möglichkeiten gibt, stehen die Chancen nicht automatisch fifty-fifty

## B. Mathematische Ideen

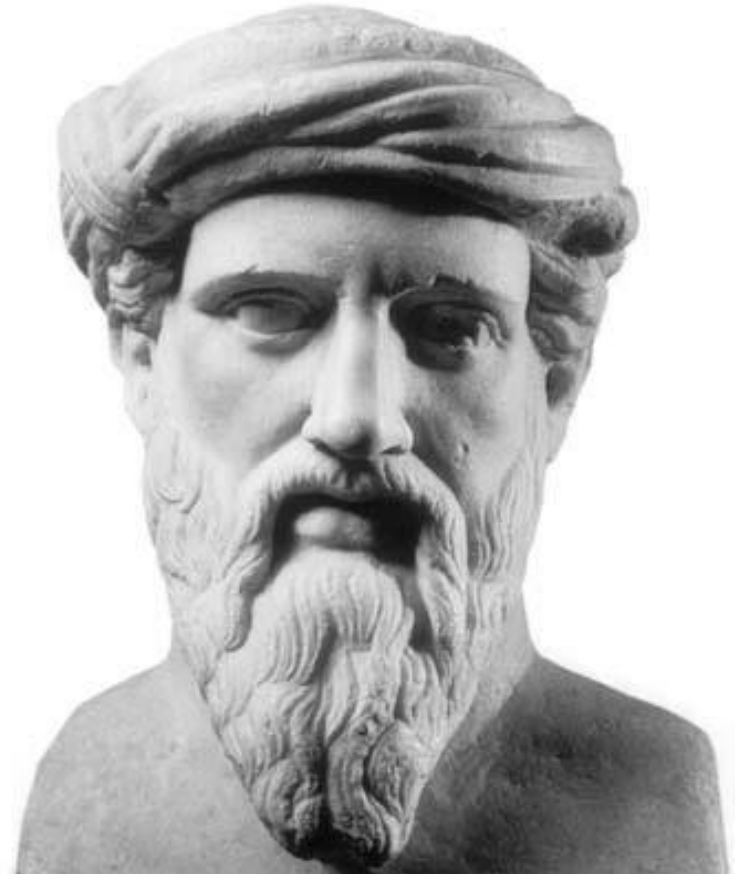
◆ Üblicherweise kein Schulstoff

◆ Wichtig

- für die Mathematik selbst
- Um das Potential der Mathematik einschätzen zu können
- um den Ort der Mathematik im Kanon der Wissenschaften zu bestimmen

# Mathematische Ideen 1: Logik, Beweis

- ◆ Die Methode der Mathematik:  
Durch eigenes Denken neue  
Erkenntnisse erzielen!  
(Pythagoras, ca. 500 v. Chr.)
- ◆ **Definitionen:** Man weiß immer  
genau, worüber man redet
- ◆ **Sätze:** Fixierte Erkenntnisse
- ◆ **Beweise:** (rein) logische  
Argumente



# Konsequenzen 1

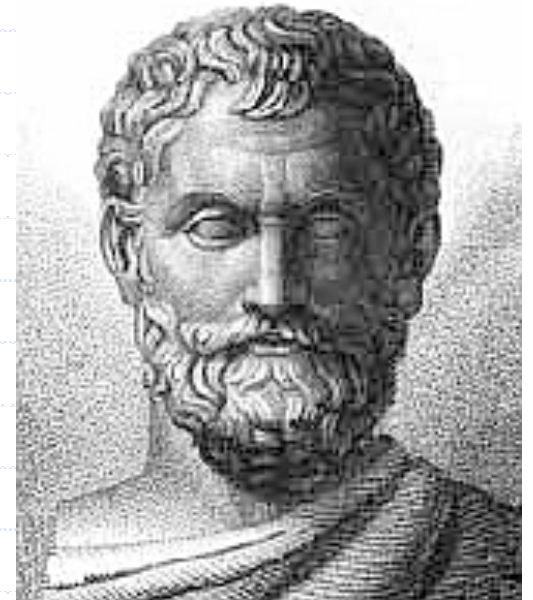
- ◆ Mathematische Erkenntnisse haben den höchsten Grad an Gewissheit.
  - Dadurch zeichnet sich Mathematik vor allen andern Wissenschaften aus.
- ◆ Mathematische Erkenntnisse gelten ewig.
  - Was einmal bewiesen wurde, gilt für immer.
  - (Was noch nicht bewiesen wurde, gilt nicht.)

## Konsequenzen 2

- ◆ Mathematik ist eine Kulturwissenschaft mit ihren eigenen Zielen, Problemen und Methoden
- ◆ Sie erhält Impulse aus den Anwendungen, kann aber nicht auf Anwendungen reduziert werden („Mathematik als Hilfswissenschaft“)

## Mathematische Ideen 2: Modell für die Welt

- ◆ 25. Mai 585 v. Chr.: erster Tag der Mathematik
  - Thales von Milet sagte für diesen Tag eine Sonnenfinsternis voraus
- ◆ Eratosthenes (ca. 273 – 194 v. Chr.)
  - Berechnung des Erdumfangs
- ◆ Johannes Kepler (1571 – 1630)
  - Keplersche Gesetze



# Konsequenzen

- ◆ Mathematik ist eine äußerst erfolgreiche Anwendungswissenschaft
- ◆ Kein modernes Produkt würde ohne Mathematik funktionieren
  - Strichcode, Handy, CD, MP3, GPS, ...
  - Fahrplan, Wettervorhersage, ...
- ◆ Manchmal einfache Mathematik, manchmal sehr fortgeschrittene Verfahren



# Was Mathematik alles kann

- ◆ Fehler erkennen und korrigieren
- ◆ unknackbar verschlüsseln
- ◆ Bahnen von Satelliten berechnen
- ◆ Aufzugssteuerung
- ◆ Optimale Fahrpläne aufstellen
- ◆ Wettervorhersage
- ◆ Design von Karosserien
- ◆ Handy routing
- ◆ Saugfähige Windeln
- ◆ echte Bilanzen von gefälschten unterscheiden
- ◆ ...

# Mathematische Ideen 3: Ein Weise, die Welt zu sehen





# Muster sehen – in Strukturen denken

- ◆ „Ordnung in das Chaos bringen“
- ◆ Beherrschung von Komplexität
- ◆ Muster sehen
  - Vom richtigen Blickpunkt aus betrachtet ist es ganz einfach
- ◆ Mit Strukturen gestalten
  - Durch richtige Strukturierung kann man auch komplexe Situationen beherrschen

# Mathematische Ideen 4: Unendlichkeit

## ◆ Das unendlich Große:

- Euklid (ca. 300 v. Chr.): Unendlichkeit der Primzahlen
- Georg Cantor (1845-1918): Wie kann man unendliche Mengen vergleichen?

## ◆ Das unendlich Kleine: Grenzprozesse

- Archimedes
- Euler, Leibniz/Newton, ..., Cauchy

# Unendlichkeit

- ◆ Unendlichkeit entsteht durch Zählen
  - 1, 2, 3, ...
  - 1, 2, 4, 7, 11, ...
  - ...
- ◆ Wir brauchen nur ein kleines Stück zu kennen und wissen dann, „wie es weitergeht“
- ◆ Muster sind Anfänge der Unendlichkeit

# Wohin das führen könnte...

- ◆ Abzählbar – Überabzählbar
  - Historische Aspekte
- ◆ Kurt Gödel 1931: In jedem mathematischen System (das die Zahlentheorie enthält) gibt es Aussagen, deren Richtigkeit innerhalb des System nicht bewiesen werden kann.
- ◆ Grundsätzliche Grenzen der Erkenntnis:
  - Auseinanderfallen von Wahrheit und Beweisbarkeit
  - Wir werden nie alles wissen.



## C. Sprachkompetenz

- ◆ Mathematik ist ein kulturelles Hochprodukt mit einer elaborierten Fachsprache
- ◆ Die mathematische Sprache ist ein Präzisionsinstrument, mit dem man die feinsten Verästelungen menschlichen Denkens erfassen kann.



# Präzision

- ◆ Manchmal kommt es in der Mathematik darauf an, etwas sehr präzise zu sagen
- ◆ Beispiele:
  - Implikation ist nicht Äquivalenz
  - Verneinung ist schwierig
  - Korrekte Verwendung von Quantoren (Definition Parallelogramm – Trapez)
  - ...
- ◆ Präzision ist nicht gleichbedeutend mit der Verwendung mathematischer und logischer Symbole
  - Die mathematische Sprache ist keine Schikane, sondern Hilfe

# Mathematik: frei und radikal

- ◆ „Das Wesen der Mathematik liegt in ihrer Freiheit“ (G. Cantor)
- ◆ Man legt die Axiome (die Anfangsbedingungen des Denkens) völlig frei fest – und muss dann sehen, wohin man kommt.
- ◆ Konzentration auf das Wesentliche, Durchbrechen der Macht der Gewohnheit.
- ◆ Mathematik: Größte geistige Abenteuer – aber man kommt wieder zurück!