

Wünsche eines
Hochschullehrers an die
künftigen
Mathematikstudierenden

Albrecht Beutelspacher

Mathematikausbildung an Schulen

- ◆ Selektiert nicht die besten Mathematiker (schwache Korrelation von Schulnote und Erfolg im Mathematikstudium)
- ◆ Die besten SchülerInnen entscheiden sich nicht für ein Mathematikstudium

Inhalt

A. Mathematische Basisfertigkeiten

- Zahlen, Funktionen, Algebra, Geometrie, Zufall

B. Mathematische Ideen

- Beweis, Weltbeschreibung, Unendlichkeit, Struktur

C. Sprachkompetenz

Das Entscheidende

Der künftige Student sollte ...

... ein denkfähiger und denkwilliger
und

... ein arbeitsfähiger und arbeitswilliger
Mensch sein.

A. Was sind die Fundamente?

- ◆ Selbstverständlicher Umgang mit mathematischem Basiswissen und Basistechniken
- ◆ Im wesentlichen Mathematik bis zur Mittelstufe
- ◆ Das ist wenig – aber das sollte beherrscht werden

Fundamente 1: Zahlen

◆ Kleine Zahlen:

- Primzahlen, Quadratzahlen, ... Teilbarkeit
- Dezimalsystem

◆ Größenordnungen von Zahlen

- Beispiele für 1000, 100.000, ...
- Größenordnungen von berechneten Ergebnissen

◆ Eigenschaften:

- ganz – rational – irrational (Beispiele!)
- Zwischen je zwei rationale Zahlen passen unendlich viele rationale Zahlen

Fundamente 2: Funktionen

- ◆ Funktionen beschreiben Zusammenhänge (Menge – Preis, Qualität – Preis, Leistung – Schulnoten, ...)
- ◆ Verschiedene Arten von Skalen (mit manchen darf man rechnen, mit andern nicht)
- ◆ Verschiedene Arten von Zusammenhängen (proportional, antiproportional – oder ganz anders)
- ◆ Verschiedene Arten von Funktionen (linear, quadratisch, periodisch exponentiell – oder ganz anders)

Fundamente 3: Algebra

◆ Gleichungen

- Äquivalenzumformungen
- Lösen

◆ Buchstabenrechnen

- Umformungen von Termen, Klammerregeln
- Aufstellen einer Gleichung, die zu einer Sachaufgabe gehört

Fundamente 4: Raum

◆ Raumvorstellung

- 2D – 3D

◆ Eigenschaften elementarer Figuren

- Gleichseitige, gleichschenklige, rechtwinklige Dreiecke
- Quadrat, Rechteck, Parallelogramm
- Kreis, Parabel, Ellipse,
- Umfang, Volumen, Symmetrie, besondere Punkte und Linien

◆ Analytische Geometrie

Fundamente 5: Zufall

- ◆ Zufallsexperimente
- ◆ Häufigkeit – Wahrscheinlichkeit
- ◆ „Gefühl“ für Wahrscheinlichkeiten (Größenordnungen)
 - Wenn es zwei Möglichkeiten gibt, stehen die Chancen nicht automatisch fifty-fifty

B. Mathematische Ideen

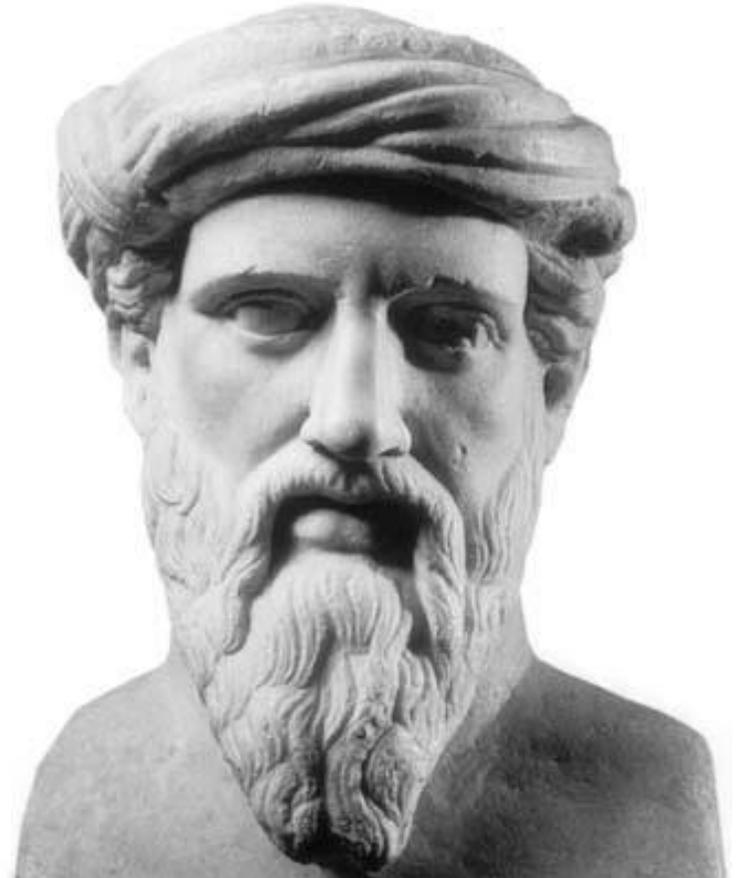
◆ Üblicherweise kein Schulstoff

◆ Wichtig

- für die Mathematik selbst
- Um das Potential der Mathematik einschätzen zu können
- um den Ort der Mathematik im Kanon der Wissenschaften zu bestimmen

Mathematische Ideen 1: Logik, Beweis

- ◆ Die Methode der Mathematik:
Durch eigenes Denken neue
Erkenntnisse erzielen!
(Pythagoras, ca. 500 v. Chr.)
- ◆ **Definitionen:** Man weiß immer
genau, worüber man redet
- ◆ **Sätze:** Fixierte Erkenntnisse
- ◆ **Beweise:** (rein) logische
Argumente



Konsequenzen 1

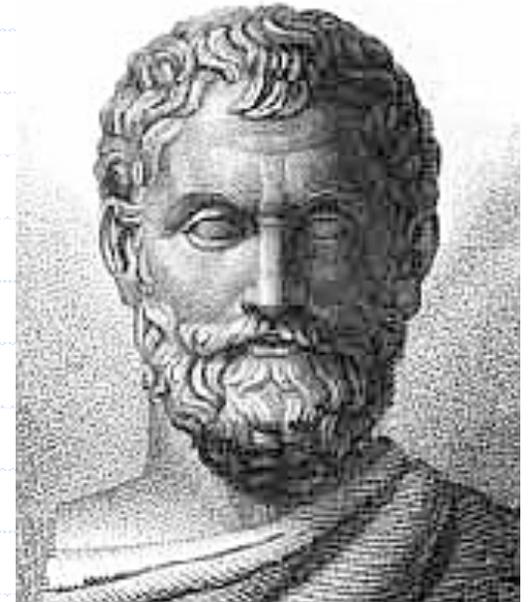
- ◆ Mathematische Erkenntnisse haben den höchsten Grad an Gewissheit.
 - Dadurch zeichnet sich Mathematik vor allen andern Wissenschaften aus.
- ◆ Mathematische Erkenntnisse gelten ewig.
 - Was einmal bewiesen wurde, gilt für immer.
 - (Was noch nicht bewiesen wurde, gilt nicht.)

Konsequenzen 2

- ◆ Mathematik ist eine Kulturwissenschaft mit ihren eigenen Zielen, Problemen und Methoden
- ◆ Sie erhält Impulse aus den Anwendungen, kann aber nicht auf Anwendungen reduziert werden („Mathematik als Hilfswissenschaft“)

Mathematische Ideen 2: Modell für die Welt

- ◆ 25. Mai 585 v. Chr.: erster Tag der Mathematik
 - Thales von Milet sagte für diesen Tag eine Sonnenfinsternis voraus
- ◆ Eratosthenes (ca. 273 – 194 v. Chr.)
 - Berechnung des Erdumfangs
- ◆ Johannes Kepler (1571 – 1630)
 - Keplersche Gesetze



Konsequenzen

- ◆ Mathematik ist eine äußerst erfolgreiche Anwendungswissenschaft
- ◆ Kein modernes Produkt würde ohne Mathematik funktionieren
 - Strichcode, Handy, CD, MP3, GPS, ...
 - Fahrplan, Wettervorhersage, ...
- ◆ Manchmal einfache Mathematik, manchmal sehr fortgeschrittene Verfahren

Was Mathematik alles kann

- ◆ Fehler erkennen und korrigieren
- ◆ unknackbar verschlüsseln
- ◆ Bahnen von Satelliten berechnen
- ◆ Aufzugssteuerung
- ◆ Optimale Fahrpläne aufstellen
- ◆ Wettervorhersage
- ◆ Design von Karosserien
- ◆ Handy routing
- ◆ Saugfähige Windeln
- ◆ echte Bilanzen von gefälschten unterscheiden
- ◆ ...

Mathematische Ideen 3: Ein Weise, die Welt zu sehen





Muster sehen – in Strukturen denken

- ◆ „Ordnung in das Chaos bringen“
- ◆ Beherrschung von Komplexität
- ◆ Muster sehen
 - Vom richtigen Blickpunkt aus betrachtet ist es ganz einfach
- ◆ Mit Strukturen gestalten
 - Durch richtige Strukturierung kann man auch komplexe Situationen beherrschen

Mathematische Ideen 4: Unendlichkeit

◆ Das unendlich Große:

- Euklid (ca. 300 v. Chr.): Unendlichkeit der Primzahlen
- Georg Cantor (1845-1918): Wie kann man unendliche Mengen vergleichen?

◆ Das unendlich Kleine: Grenzprozesse

- Archimedes
- Euler, Leibniz/Newton, ..., Cauchy

Unendlichkeit

- ◆ Unendlichkeit entsteht durch Zählen
 - 1, 2, 3, ...
 - 1, 2, 4, 7, 11, ...
 - ...
- ◆ Wir brauchen nur ein kleines Stück zu kennen und wissen dann, „wie es weitergeht“
- ◆ Muster sind Anfänge der Unendlichkeit

Wohin das führen könnte...

- ◆ Abzählbar – Überabzählbar
 - Historische Aspekte
- ◆ Kurt Gödel 1931: In jedem mathematischen System (das die Zahlentheorie enthält) gibt es Aussagen, deren Richtigkeit innerhalb des System nicht bewiesen werden kann.
- ◆ Grundsätzliche Grenzen der Erkenntnis:
 - Auseinanderfallen von Wahrheit und Beweisbarkeit
 - Wir werden nie alles wissen.



C. Sprachkompetenz

- ◆ Mathematik ist ein kulturelles Hochprodukt mit einer elaborierten Fachsprache
- ◆ Die mathematische Sprache ist ein Präzisionsinstrument, mit dem man die feinsten Verästelungen menschlichen Denkens erfassen kann.

Präzision

- ◆ Manchmal kommt es in der Mathematik darauf an, etwas sehr präzise zu sagen
- ◆ Beispiele:
 - Implikation ist nicht Äquivalenz
 - Verneinung ist schwierig
 - Korrekte Verwendung von Quantoren (Definition Parallelogramm – Trapez)
 - ...
- ◆ Präzision ist nicht gleichbedeutend mit der Verwendung mathematischer und logischer Symbole
 - Die mathematische Sprache ist keine Schikane, sondern Hilfe

Mathematik: frei und radikal

- ◆ „Das Wesen der Mathematik liegt in ihrer Freiheit“ (G. Cantor)
- ◆ Man legt die Axiome (die Anfangsbedingungen des Denkens) völlig frei fest – und muss dann sehen, wohin man kommt.
- ◆ Konzentration auf das Wesentliche, Durchbrechen der Macht der Gewohnheit.
- ◆ Mathematik: Größte geistige Abenteuer – aber man kommt wieder zurück!