

Kollegium Spiritus Sanctus Brig  
Maturaarbeit 2019/20

# Monte Carlo Methoden

Numerische Verfahren zum Lösen  
praxisorientierter Probleme

Von:

**Pfammatter Claudio, 5D**

**Eingereicht im Fachbereich Mathematik**

Betreut durch:

**Dr. Blumenthal Adrian**

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Motivation . . . . .	1
1.2	Ziele . . . . .	1
1.3	Aufbau . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Einführung in die Monte Carlo Methoden</b>	<b>3</b>
2.1	Was sind Monte Carlo Methoden? . . . . .	3
2.2	Annäherung bestimmter Integrale . . . . .	4
2.2.1	Die Exponentialfunktion . . . . .	5
2.3	Simulationen . . . . .	6
2.3.1	Flächenberechnung per Landkarte . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Präzision und Effizienz</b>	<b>8</b>
3.1	Monte Carlo und die Wahrscheinlichkeit . . . . .	8
3.2	Konvergenzrate . . . . .	8
3.3	Vergleich der Effizienz unterschiedlicher Monte Carlo Schätzwerte . . . . .	9
3.3.1	Varianz und Rechenaufwand . . . . .	9
3.3.2	Bias (systematische Abweichung) . . . . .	11
3.3.3	Mittlere quadratische Abweichung . . . . .	11
3.4	Monte Carlo und andere Quadraturverfahren . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Simulationen zur Annäherung von <math>\pi</math></b>	<b>14</b>
4.1	Kreisesektor . . . . .	14
4.2	Buffons Nadelproblem . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Varianzreduzierungstechniken</b>	<b>18</b>
5.1	Was sind Varianzreduzierungstechniken? . . . . .	18
5.2	Importance Sampling . . . . .	18
5.3	Control Variates . . . . .	20
<b>6</b>	<b>Monte Carlo in der Finanzmathematik</b>	<b>22</b>
6.1	Berechnung des Wertes einer europäischen Call-Option . . . . .	22
6.1.1	Das Black-Scholes Modell . . . . .	22
6.1.2	Monte Carlo Simulation des Aktienpreises . . . . .	24
6.1.3	Varianzreduktion durch Kontrollvariante . . . . .	25

---

6.1.4	Durchführung der Simulationen . . . . .	25
<b>7</b>	<b>Schlussfolgerung</b>	<b>27</b>
7.1	Erkenntnisse . . . . .	27
7.2	Ausblick . . . . .	28
<b>A</b>	<b>Historische Entwicklung</b>	<b>29</b>
A.1	Bernoulli und das Gesetz der grossen Zahlen . . . . .	29
A.2	Comte de Buffon, die Nadeln und $\pi$ . . . . .	29
A.3	Fermis Experimente . . . . .	30
A.4	Los Alamos, die Atombombe und eine prägnante Namensgebung . . . . .	30
A.5	Monte Carlo heute . . . . .	31
<b>B</b>	<b>Grundlagen zur Präzision und Effizienz</b>	<b>32</b>
B.1	Lage- und Streuungsparameter . . . . .	32
B.1.1	Mittelwert, Varianz und Standardabweichung der Untersuchungsgesamtheit . . . . .	32
B.1.2	Empirischer Mittelwert und empirische Varianz . . . . .	33
B.2	Das Gesetz der grossen Zahlen . . . . .	34
B.3	Der zentrale Grenzwertsatz . . . . .	34
<b>C</b>	<b>Programme zur Annäherung von <math>\pi</math></b>	<b>36</b>
C.1	Kreis Sektor . . . . .	36
C.2	Buffons Nadelproblem . . . . .	37
<b>D</b>	<b>Grundlagen zu Monte Carlo in der Finanzmathematik</b>	<b>38</b>
D.1	Die Mathematik in der Finanzwelt . . . . .	38
D.2	Warum Monte Carlo in der Finanzmathematik? . . . . .	38
D.3	Optionen . . . . .	39
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>41</b>
	<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>42</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>43</b>
	<b>Authentizitätserklärung</b>	<b>45</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Motivation

„The first thoughts and attempts I made to practice [the Monte Carlo method] were suggested by a question which occurred to me in 1946 as I was convalescing from an illness and playing solitaires. The question was what are the chances that a Canfield solitaire laid out with 52 cards will come out successfully?“

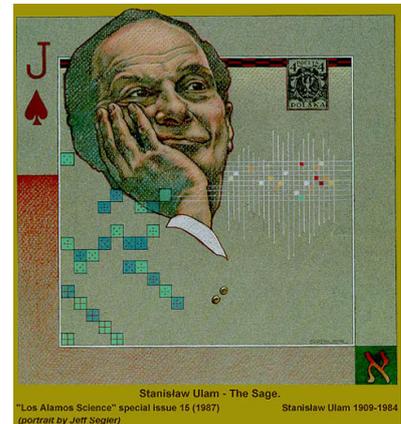


Abbildung 1: Titelseite von „Los Alamos Science“ 1987.

Dies ist ein Zitat des Mathematikers Stan Ulam, der zusammen mit den Wissenschaftlern Von Neumann und Metropolis die ersten Monte Carlo Berechnungen in der heutigen Form durchführte (Ulam, 1983, zitiert nach Eckhardt, 1987, [Eck87]). Auf der Abbildung 1 ist ein Porträt Ulams, das die Titelseite der 15. Ausgabe des wissenschaftlichen Journals „Los Alamos Science“ im Jahre 1987 prägt, zu sehen.

Ulams Frage „Wie hoch ist die Siegeswahrscheinlichkeit beim Canfield Solitär mit einem 52 Kartendeck?“ ist eine charakteristische Problemstellung, deren Lösung mithilfe einer Monte Carlo Methode angenähert werden kann. Solche Probleme, bei denen eine algebraische Evaluierung zu komplex oder schlichtweg nicht möglich ist, treten nicht nur bei Karten- oder Glücksspielen auf. In vielen Bereichen der heutigen Wissenschaft müssen Resultate durch Verfahren der Numerik angenähert werden. Einige dieser numerischen Methoden, die heutzutage oft genutzt werden, sollen in der vorliegenden Arbeit genauer betrachtet werden: die Monte Carlo Verfahren.

### 1.2 Ziele

Diese Arbeit befasst sich mit den Monte Carlo Methoden. Dies sind numerische Verfahren, durch welche Lösungen für praxisorientierte Probleme angenähert werden können. Das erste konkrete Ziel ist die Erklärung und Beschreibung der Theorie der Monte Carlo Methoden inklusive ihrer mathematischen Basis. Ausserdem sollen Effizienz und Präzision der Verfahren diskutiert werden, um anschliessend mithilfe der Varianzreduzierungstechniken eine Effizienzsteigerung zu

ermöglichen. Das Ziel des letzten Teiles dieser Arbeit ist die Beschreibung eines Finanzproduktes, der europäischen Option. Abschliessend soll eine Simulation inklusive Varianzreduktion zur Bestimmung des Gegenwartwertes einer europäischen Call-Option durchgeführt werden.

### 1.3 Aufbau

Das zweite Kapitel stellt eine theoretische Einführung in die Monte Carlo Verfahren dar. Die Begriffe *Monte Carlo Quadraturverfahren* und *Monte Carlo Simulation* werden differenziert und anhand von Beispielen erklärt. Die Effizienz und Präzision von Monte Carlo wird im dritten Kapitel besprochen. Der erste Abschnitt ist der Bedeutung der Wahrscheinlichkeit bei Monte Carlo Methoden gewidmet. Bevor Kriterien zum Effizienzvergleich verschiedener Schätzwerte eingeführt werden, wird die Konvergenzrate, eine zentrale Eigenschaft von Monte Carlo, untersucht. Der letzte Abschnitt des Kapitels behandelt einen Vergleich zwischen dem Trapezverfahren und der Monte Carlo Integration. Im vierten Kapitel dieser Arbeit wird die Theorie der Monte Carlo Verfahren auf zwei Beispiele angewandt. Sowohl die erste der beiden Simulationen als auch die Implementierung des Buffon'schen Nadelproblems, welches im Anhang A.2 eingeführt wird, dient zur Annäherung der Kreiszahl  $\pi$ . Das fünfte Kapitel befasst sich mit Methoden der Effizienzsteigerung, den sogenannten Varianzreduzierungsstechniken. Zuerst wird das allgemeine Grundprinzip der Varianzreduktion behandelt, anschliessend werden zwei Techniken näher betrachtet: Importance Sampling und Kontrollvariante. Das sechste und letzte Kapitel behandelt die Anwendung der Monte Carlo Verfahren auf Problemstellungen der Finanzmathematik. Die Berechnung des Payoffs einer europäischen Call-Option wird durchgeführt und diskutiert. Die Effizienz dieser Simulation wird am Ende des Kapitels durch eine Kontrollvariante Varianzreduktion gesteigert.

Im ersten Teil des Anhangs dieser Arbeit erhält der Leser eine Übersicht des geschichtlichen Hintergrunds der Monte Carlo Verfahren. Der Bau der Atombombe in Los Alamos um 1945 und die Entstehung des Namens *Monte Carlo* werden speziell hervorgehoben. Der zweite Anhangsteil beschäftigt sich mit den Grundlagen zur Präzision und Effizienz. Der Code der Programme aus Kapitel 4 ist ebenfalls im Anhang vorzufinden. Der Anhang D enthält drei Abschnitte, die ein besseres Verständnis des sechsten Kapitels ermöglichen.

# Kapitel 2

## Einführung in die Monte Carlo Methoden

Im folgenden Kapitel werden die theoretischen Grundlagen der Monte Carlo Verfahren aufgeführt. Das Grundprinzip von Monte Carlo und der Unterschied zwischen Quadraturverfahren und Simulation werden erläutert. Das Kapitel enthält erste Beispiele zur Annäherung bestimmter Integrale und zu Monte Carlo Simulationen.

### 2.1 Was sind Monte Carlo Methoden?

Monte Carlo Methoden sind Techniken der numerischen Mathematik, bei denen Mittelwerte von Stichproben genutzt werden, um Mittelwerte einer Grundgesamtheit abzuschätzen. Die numerische Mathematik (Numerik) ist ein Teilgebiet der Mathematik, welches sich mit Algorithmen (schematischen Rechenvorschriften) für stetige Problemstellungen beschäftigt. Das Ziel der Numerik ist die Kalkulation effizienter Approximationen und Präzisionsabschätzungen für gesuchte Lösungen (Späth, 1994, [Spä94]). Der Grundgedanke von Monte Carlo ist stets derselbe: Ein Experiment, welches entweder gelingt oder fehlschlägt, wird durchgeführt. Das Experiment wird  $n$ -mal wiederholt. Sei  $n$  die Anzahl der Durchführungen (Replikationen) oder Probeläufe. Anschliessend wird die Anzahl der erfolgreichen Experimente ( $E$ ) durch die Anzahl der Durchführungen dividiert,  $n + 1$  Ergebnisse sind möglich ( $0, 1/n, 2/n, \dots, n/n = 1$ ). Es gilt, je grösser  $n$ , desto besser approximiert der Quotient  $E/n$  den Erwartungswert des Experiments (Dunn und Shultis, 2011, [DS11]).

Das Grundprinzip von Monte Carlo bringt durch eine geeignete Handhabung der Probeläufe brauchbare Lösungen zu komplexen Problemen hervor. In der Anwendung handelt es sich bei den Durchführungen meist nicht um Experimente, welche entweder gelingen oder misslingen, also nur binären Charakter aufweisen, sondern um Durchläufe, die eine oder mehrere reelle Zahlen als Ergebnis liefern. Diese können ebenfalls zu algebraischen Funktionen führen. Obwohl die einzelnen Durchführungen meist komplexer sind als binäre Experimente, bleibt der Grundgedanke: Das Resultat ist die Summe der Ergebnisse der einzelnen Probeläufe dividiert durch ihre Gesamtzahl (Dunn und Shultis, 2011, [DS11]).

Monte Carlo ist ein oft genutztes numerisches Verfahren, welches Wissenschaftlern erlaubt, Erwartungswerte für Problemstellungen in vielen Anwendungsbereichen anzunähern. Es kann sowohl auf wahrscheinlichkeitsbasierte Aufgaben als auch auf solche ohne direkten Wahrscheinlichkeitsbezug angewandt werden. Einer der einzigartigen Aspekte der Monte Carlo Verfahren ist die Flexibilität. Ein gegebenes Problem kann auf verschiedene Arten mit Monte Carlo gelöst werden und der Durchführende kann mit unterschiedlichen Möglichkeiten experimentieren, um

Effizienz und Präzision zu steigern (Kapitel 3). Die hohe Flexibilität macht die Verfahren interessant und vielseitig einsetzbar (Dunn und Shultis, 2011, [DS11]).

Aufgrund der Tatsache, dass die Methoden ihrem historischen Hintergrund entsprechend auf Glücksspielen basieren (Anhang A.4), wirkt Monte Carlo auf den ersten Blick wie ein unsicheres Verfahren, dem man nicht trauen sollte und bei dem der Anwender auf eine brauchbare Lösung spekuliert. Allerdings ist Monte Carlo ein stichhaltiger Prozess, der auf zwei mathematischen Gesetzen beruht (Gesetz der grossen Zahlen und zentraler Grenzwertsatz, Anhang B.2 und B.3). Deshalb ist die Durchführung eines Monte Carlo Verfahrens nicht vergleichbar mit einer Spielrunde im Casino (siehe Namensentstehung Anhang A.4), denn wer dort gewinnt, kann von Glück reden, wer aber Monte Carlo gewissenhaft durchführt, gerät auch ohne seine Glücksfee zu einem vernünftigen Resultat (Dunn und Shultis, 2011, [DS11]).

## 2.2 Annäherung bestimmter Integrale

In diesem Abschnitt wird das Grundprinzip von Monte Carlo zur Annäherung bestimmter Integrale angewandt. Dies sind Integrale, deren Werte die Flächenbilanz zwischen unterer und oberer Integralgrenze angeben. Flächenbilanz bedeutet, dass der Wert positiv oder negativ ist je nachdem, ob der Inhalt der Fläche oberhalb oder unterhalb der  $x$ -Achse grösser ist (Definition für Funktionen einer Variablen) (Baum u. a., 2013, [BBB<sup>+</sup>13]). Das verwendete Monte Carlo Verfahren basiert auf der Analogie zwischen Wahrscheinlichkeit und Volumen: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses kann angesehen werden als sein Volumen oder Mass relativ zum Volumen oder Mass des gesamten Ereignisraums. Monte Carlo nutzt diese Identität umgekehrt, indem das Volumen (bei Funktionen einer Variablen die Fläche) durch Interpretation als Wahrscheinlichkeit berechnet wird. Im einfachsten Fall bedeutet dies, dass stochastische Stichproben aus einem Ereignisraum zu Schätzwerten für die relativen Volumen der einzelnen Ereignisse führen. Zur Illustration des Vorgehens bei bestimmten Integralen wird die Annäherung des Integrals der Funktion  $f$  über dem Einheitsintervall betrachtet. Sei  $f$  über diesem Intervall integrierbar. Das Integral

$$\mu = \int_0^1 f(x) dx \quad (2.1)$$

kann als Erwartungswert  $\mathbb{E}[f(U)]$ , mit  $U$  gleichverteilt zwischen 0 und 1, aufgefasst werden. Bei Monte Carlo Berechnungen nehmen Erwartungswerte eine zentrale Rolle ein. Der Optionspreis in der Finanzmathematik wird beispielsweise über einen Erwartungswert bestimmt (siehe Anhang D.2) (Glasserman, 2003, [Gla03]).

Gegeben sei ein Verfahren, welches Punkte  $U_1, U_2, \dots$ , unabhängig und gleichverteilt auf  $[0, 1]$ , liefert. Wird  $f$  an  $n$  dieser Punkte berechnet und der Mittelwert der Funktionswerte ermittelt, so

ist das Ergebnis ein Monte Carlo Schätzwert für den Wert des Integrals:

$$\hat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(U_i). \quad (2.2)$$

In dieser Arbeit stehen Variablen mit dem Zeichen „ $\hat{\phantom{x}}$ “ für eine Annäherung oder einen Schätzwert. Das  $n$  im Index unterstreicht die Abhängigkeit des Schätzers von der Anzahl Replikationen. Nach dem Gesetz der grossen Zahlen (siehe Anhang B.2) gilt, dass  $\hat{\mu}_n \rightarrow \mu$  (mit Wahrscheinlichkeit 1), wenn  $n \rightarrow \infty$ . Erhöht man die Anzahl berechneter Punkte, kann die Präzision des Schätzers  $\hat{\mu}_n$  gesteigert werden (Glasserman, 2003, [Gla03]).

Die Annäherung bestimmter Integrale mithilfe eines Monte Carlo Verfahrens ist in zwei Fällen besonders vorteilhaft: Der Integrand ist zu komplex für eine algebraische Evaluierung oder die Funktion, welche integriert werden soll, liegt nicht in expliziter Form vor. Hinzu kommt, dass Monte Carlo nicht nur zur numerischen Integration von Funktionen einer Variablen dient, sondern auch für höherdimensionale Problemstellungen (mit mehr Variablen) geeignet ist (Dunn und Shultis, 2011, [DS11]).

Im Abschnitt 3.4 wird gezeigt, weshalb Monte Carlo Methoden bei höherdimensionalen Problemen effizienter sind als andere Quadraturverfahren. Dies sind numerische Methoden zur Annäherung eines Integrals, bei denen man die gesamte Flächenbilanz in kleinere Flächenstücke, die einfacher zu berechnen sind, unterteilt (Waldvogel, 2010, [Wal10]).

### 2.2.1 Die Exponentialfunktion

Als Beispiel der Abschätzung bestimmter Integrale per Monte Carlo Verfahren wird das folgende Integral betrachtet:

$$\nu = \int_0^1 e^x dx. \quad (2.3)$$

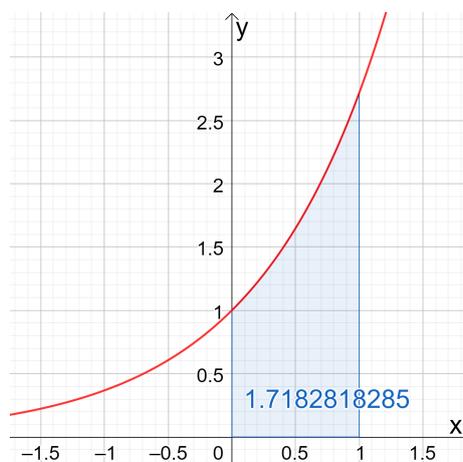


Abbildung 2: Die Exponentialfunktion.

Hierbei ist  $e$  die irrationale Euler'sche Zahl. Gemäss (2.2) kann der Wert von  $\nu$  angenähert werden durch

$$\hat{\nu}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{U_i}. \quad (2.4)$$

Wobei  $n$  die Anzahl Punkte  $U_1, U_2, \dots$ , unabhängig und gleichverteilt auf  $[0, 1]$ , beschreibt. Um  $\nu$  abzuschätzen, wird  $e^{U_i}$  für alle  $i$  zwischen 1 und  $n$  berechnet, die Resultate werden aufsummiert und anschliessend durch die Gesamtzahl der Punkte dividiert. Führt man diese Berechnungen mit *Excel* durch, ist für verschiedene  $n$  folgende Tabelle möglich. Da das Verfahren auf dem Generieren der Zufallswerte zwischen 0 und 1 basiert, ist die Tabelle nur ein Beispiel:

$n$ (Anzahl Punkte $U_i$ )	Summe $e^{U_i}$	$\hat{\nu}_n$	Fehler/Abweichung
10	17,63449432	1,763449432	2,629 %
1'000	1707,269734	1,707269734	-0,641 %
10'000	17124,16549	1,712416549	-0,341 %

Tabelle 1: Integral der Exponentialfunktion.

Der Wert des Integrals kann in diesem Fall auch über die Stammfunktion von  $e^x$  bestimmt werden. Eine Stammfunktion  $F(x)$  ist eine Funktion, deren Ableitung  $f(x)$  ist und mit der durch den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung das bestimmte Integral von  $f(x)$  berechnet werden kann (Baum u. a., 2013, [BBB<sup>+</sup>13]). Der exakte Wert von  $\nu$  ist

$$\nu = \int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e - 1 \approx 1,718282. \quad (2.5)$$

Nachdem der Schätzer  $\hat{\nu}_n$  kalkuliert wurde, kann mithilfe des exakten Wertes  $\nu$  und der folgenden Formel die prozentuale Abweichung des Schätzwertes berechnet werden:

$$\frac{\hat{\nu}_n - \nu}{\nu}. \quad (2.6)$$

In der Abbildung 2 ist die Fläche unter dem Graphen der Exponentialfunktion eingefärbt und der Wert für  $\nu$  angegeben. Beim Betrachten der Tabelle 1 fällt auf, dass die Schätzwerte für grössere  $n$  präziser werden. Die Abweichung wird kleiner. Diese Tatsache wird in den Abschnitten B.2 und B.3 erläutert. In 3.2 wird erklärt, inwiefern die Konvergenzrate bei Monte Carlo Verfahren von  $n$  abhängig ist.

## 2.3 Simulationen

Ein Problem muss nicht zwingend in der Form eines Integrals (wie in 2.2 beschrieben) vorliegen, damit ein Monte Carlo Verfahren anwendbar ist. Die Form der Anwendung, in welcher die Problemstellung keinen Integralcharakter aufweist, wird oft Monte Carlo Simulation genannt. Eigent-

lich können alle Monte Carlo Implementationen als Simulationen angesehen werden, im Vordergrund steht jedoch der Unterschied zwischen Problemen, welche explizit und klar erkennbar als Integral gegeben sind, und solchen, die versteckten oder unspezifischen Integralcharakter innehaben. Zur Lösung komplexer Problemstellungen durch Monte Carlo Simulationen sind oft naturwissenschaftliche Modelle vonnöten, beispielsweise das Black-Scholes Modell zur Beschreibung der Dynamik eines Aktienpreises in der Finanzmathematik (Abschnitt 6.1.1) (Glasserman, 2003, [Gla03]). Die Monte Carlo Schätzwerte sind dabei immer nur so gut wie die mathematischen Modelle oder Annahmen dahinter (Dunn und Shultis, 2011, [DS11]).

### 2.3.1 Flächenberechnung per Landkarte

Nun zu einem Beispiel einer Monte Carlo Simulation: Betrachtet wird eine rechteckige Karte, auf der die unregelmässigen Grenzen eines Landes abgebildet sind (gemäss Abbildung 3). Die Fläche des Landes kann durch zufälliges Werfen von Dartpfeilen auf die Karte angenähert werden. Sei  $n_{in}$  die Zahl der Darts, welche innerhalb der Grenzen landen, und  $n_{tot}$  die Gesamtzahl der geworfenen Pfeile. Durch Multiplikation des Verhältnisses  $\frac{n_{in}}{n_{tot}}$  mit der Fläche der Landkarte  $A_{Karte}$  erhält man einen Schätzwert für die Landesfläche:

$$\hat{A}_{Land} = \frac{n_{in}}{n_{tot}} A_{Karte}. \quad (2.7)$$

Die Berechnung einer Fläche ist zwar mit der Integraldefinition verknüpft, allerdings kann die Fläche  $A_{Land}$  in diesem Beispiel angenähert werden, ohne sie als Integral zu formulieren.



Abbildung 3: Landkarte.



Abbildung 4: Landkarte mit Gitternetz.

Die Landesfläche könnte ausserdem abgeschätzt werden, indem man ein Gitternetz mit Punkten auf die Karte legt und mithilfe des Verhältnisses zwischen den Punkten innerhalb des Landes und der Gesamtzahl an Punkten einen Schätzwert berechnet (siehe Abbildung 4). In beiden Fällen wird die Approximation präziser, je mehr Darts auf die Karte geworfen werden oder je feiner das verwendete Gitternetz ist (Dunn und Shultis, 2011, [DS11]).

# Kapitel 3

## Präzision und Effizienz

Dieses Kapitel befasst sich mit der Effizienz und Präzision von Monte Carlo Methoden. Die Konvergenzrate der Verfahren wird betrachtet und Kriterien zum Effizienzvergleich verschiedener Schätzwerte werden eingeführt. Der letzte Abschnitt des Kapitels behandelt einen Vergleich zwischen der Trapezregel und der Monte Carlo Integration. Die Grundlagen, welche man für das Verständnis dieses Kapitels benötigt, sind im Anhang B zu finden.

### 3.1 Monte Carlo und die Wahrscheinlichkeit

Obwohl bei Monte Carlo Verfahren die Wahrscheinlichkeit eine wichtige Rolle spielt, können die Methoden auch auf Problemstellungen angewandt werden, die keinen direkten Wahrscheinlichkeitsbezug aufweisen. Falls sich die Simulation auf mathematische Modelle stützt, ist sie meistens schichtweise aufgebaut. Das heisst, dass (offensichtliche) Wahrscheinlichkeit nur in der untersten Schicht des Prozesses eine Rolle spielt. Beispielsweise bei der Ziehung von Werten  $U_1, U_2, U_3, \dots$ , welche unabhängig und gleichverteilt in einem Intervall liegen sollen. Wird mit diesen Werten nun weitergerechnet und schlussendlich ein Schätzwert  $\hat{\alpha}$  kalkuliert, so sind diese oberen Schichten nicht mehr wahrscheinlichkeitsbasiert, sondern deterministisch. Die nachfolgende Darstellung verdeutlicht dies:

$$\underbrace{U_1, U_2, U_3, \dots \sim P}_{\text{wahrscheinlichkeitsbasiert}} \longrightarrow \underbrace{f(U_1), f(U_2), f(U_3), \dots}_{\text{deterministisch}} \longrightarrow \dots \longrightarrow \hat{\alpha}$$

$P$  ist die vorherrschende Wahrscheinlichkeit, nach der  $U_1, U_2, U_3, \dots$  unabhängig verteilt sind. Sowohl die Berechnung der Funktionswerte von  $f$  als auch die des Schätzwertes  $\hat{\alpha}$  verläuft deterministisch (Glasserman, 2003, [Gla03]).

### 3.2 Konvergenzrate

Der zentrale Grenzwertsatz (Anhang B.3) ist die Basis der Monte Carlo Konvergenzrate. Die Form der Standardabweichung  $\frac{\sigma_w}{\sqrt{n}}$  des Schätzwertes  $\mu_w$  ist eine zentrale Eigenschaft der Monte Carlo Verfahren: Bei grösserem  $n$  wird das Verfahren präziser. Da in einer Problemstellung, in der  $\mu_w$  gesucht ist, meistens auch die Standardabweichung  $\sigma_w$  nicht gegeben ist, kann diese durch ihre empirische Form  $s_w$  ersetzt werden. Man erhält die Konvergenzrate der Monte Carlo Methoden:

$$\frac{\sigma_w}{\sqrt{n}} \approx \frac{s_w}{\sqrt{n}}. \tag{3.1}$$

Eine Halbierung der Abweichung erfordert eine Vervielfachung von  $n$ . Zur Erhöhung der Präzision um eine Dezimalstelle sind 100-mal mehr Durchführungen vonnöten. Ausserdem erkennt man in der Form der Konvergenzrate von Monte Carlo, dass diese nicht von der Dimension  $d$  des Problems abhängig ist, im Gegensatz zu den Konvergenzraten anderer Quadraturverfahren (Abschnitt 3.4). Zwar verändert sich durch Erhöhung von  $d$  die Funktion  $f$ , deren Integral berechnet werden soll, und somit auch die Standardabweichung  $\sigma_f$ , jedoch bleibt die Form der Konvergenzrate dieselbe. Monte Carlo Verfahren sind daher sehr gut geeignet zur Annäherung bestimmter Integrale in hohen Dimensionen. Aber nicht nur bei Monte Carlo Quadraturverfahren ist die Dimensionsunabhängigkeit der Konvergenzgeschwindigkeit interessant, auch bei Problemstellungen in der Finanzmathematik ist  $d$  meist sehr gross oder sogar unendlich (Abschnitt D.2) (Glasserman, 2003, [Gla03]).

In den meisten Fällen kann nichts gegen die eher langsame Konvergenz ( $\sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ ) der Monte Carlo Verfahren unternommen werden. Neben den Quasi-Monte Carlo Methoden ist eine der einzigen Möglichkeiten eine Anpassung des genutzten Stichprobenverfahrens, wie im Kapitel 5 durch einige Beispiele erläutert. Die Konvergenzrate ist eine zentrale Charakteristik von Monte Carlo: Die Verfahren sind zwar robust, können also bei hochdimensionalen Problemstellungen angewandt werden, sie konvergieren aber auch langsam und sind deshalb erst konkurrenzfähig, wenn durch die Dimensionsabhängigkeit die Konvergenzrate anderer numerischer Methoden unter jene von Monte Carlo fällt (Glasserman, 2003, [Gla03]).

Im nächsten Abschnitt werden neben der Konvergenzrate noch andere Kriterien zum Vergleich verschiedener Methoden der Numerik und deren Schätzwerte eingeführt. Anschliessend wird im Abschnitt 3.4 ein Vergleich zwischen den Monte Carlo Verfahren und der Trapezregel, einem anderen Quadraturverfahren, aufgeführt.

### 3.3 Vergleich der Effizienz unterschiedlicher Monte Carlo Schätzwerte

Wie in 2.1 beschrieben, ist die hohe Flexibilität ein Vorteil der Monte Carlo Methoden, denn eine Problemstellung kann so auf unterschiedliche Arten modelliert und schliesslich approximiert werden. Allerdings kommt durch diese flexible Beschaffenheit auch die Frage auf, welcher Monte Carlo Schätzer bei gegebenem Problem zu bevorzugen ist.

#### 3.3.1 Varianz und Rechenaufwand

Beim Vergleich mehrerer Monte Carlo Verfahren und deren Schätzwerte sind drei Faktoren ausschlaggebend: Rechenaufwand (Zeit), Varianz und Bias (systematische Abweichung). Zu Beginn werden nur ungezinkte oder „unbiased“ Schätzwerte betrachtet, das heisst, die ersten beiden Faktoren werden untersucht und die systematische Abweichung wird vorerst nicht beachtet. Ver-

glichen werden zwei Verfahren, bei denen  $\hat{\beta}_n$  den Schätzer darstellt und  $\beta$  der Wert ist, der angenähert werden soll. Der Schätzwert  $\hat{\beta}_n$  ist der Mittelwert von  $n$  unabhängig und gleichverteilten Stichproben  $\beta_i$ . Wenn der Rechenaufwand bei beiden  $\hat{\beta}_n$  derselbe ist, so ist selbstverständlich das Verfahren mit der kleineren Varianz  $\sigma_{\hat{\beta}}^2$  zu bevorzugen, da dieses die bessere Konvergenzrate aufweist (Abschnitt 3.2) (Glasserman, 2003, [Gla03]).

Aber was, wenn die Unterschiede der Verfahren nicht nur die Varianz betreffen? Angenommen bei zwei Schätzwerten, die verglichen werden sollen, hat einer eine höhere Varianz als der andere, kann aber schneller berechnet werden. Wie gleichen sich Varianz und Rechenaufwand aus? Sei  $\tau$  die notwendige Berechnungszeit eines Punktes beziehungsweise einer Replikation  $\beta_i$  und  $z$  das Zeitbudget zur Berechnung der Schätzwerte. Der Rechenaufwand wird relativ verglichen,  $\tau$  und  $z$  haben dieselben Einheiten, diese sind an sich allerdings unwichtig. Die Zahl der Durchführungen ( $n$ ) ist gegeben durch  $\lfloor \frac{z}{\tau} \rfloor$ , den ganzzahligen Teil von  $\frac{z}{\tau}$ , und der resultierende Schätzwert lautet  $\hat{\beta}_{\lfloor \frac{z}{\tau} \rfloor}$ . Durch den zentralen Grenzwertsatz kann gezeigt werden, dass der Fehler des Schätzers approximativ normalverteilt mit Varianz  $\frac{\sigma^2 \tau}{z}$  ist (Abschnitt B.3). Diese Eigenschaft bietet ein Kriterium für den Vergleich unterschiedlicher, ungezinkter Schätzwerte. Gegeben sind zwei Schätzer, bei denen die Varianz pro Probelauf  $\sigma_1^2$  des ersten grösser ist als die Varianz  $\sigma_2^2$  des zweiten, aber für deren Berechnungszeiten pro Punkt  $\tau_1 < \tau_2$  gilt. Ist der erste Schätzwert, welcher auf mehr Replikationen mit grösserer Varianz basiert, die bessere Wahl oder der zweite Schätzer mit weniger kalkulierten Replikationen, die allerdings auch weniger streuen? Eine Bedingung, welche bei der Wahl zwischen den beiden Schätzwerten Hilfe leistet, liefert ebenfalls der zentrale Grenzwertsatz: Wenn das Zeitbudget  $z$  und somit auch die Zahl der Probelläufe  $n = \lfloor \frac{z}{\tau} \rfloor$  wachsen, sollte das Verfahren gewählt werden, bei dem das Produkt  $\sigma_i^2 \tau_i$  den kleineren Wert annimmt, um den effizienteren Schätzwert zu erhalten (Hammersley und Handscomb, 1964, [HH64]; Glasserman, 2003, [Gla03]).

Eine zentrale Eigenschaft des Produkts  $\sigma^2 \tau$  (Varianz per Probelauf mal Zeit per Probelauf) als Mass für die Effizienz eines Schätzwertes ist die Tatsache, dass eine Definitionsänderung der Replikation keine Einwirkung auf  $\sigma^2 \tau$  hat. Definiert man beispielsweise eine neue Replikation als den Mittelwert von zwei ursprünglichen Durchführungen, so halbiert sich zwar die Varianz pro Replikation, allerdings wird dadurch die Berechnungszeit verdoppelt. Das Produkt der beiden Grössen ändert sich bei Umdefinierung, ohne die Simulation an sich zu verändern, nicht. Für Fälle, in denen die Varianz  $\sigma^2$  und die Berechnungszeit  $\tau$  konstant sind, gilt  $\sigma^2 \tau$ . Vor allem bei der Berechnungszeit ist dies in der Praxis jedoch nicht immer der Fall (Barriere-Optionen in der Finanzmathematik). Eine Einschätzung der Effizienz in solchen Fällen wird ermöglicht, indem man die generierten Punkte  $\beta_i$  und ihre jeweiligen Berechnungszeiten  $\tau_i$  als unabhängig und gleichverteilt ansieht. Sind die Berechnungszeiten stochastisch, so gilt dasselbe auch für die Zahl der Replikationen  $n$ . Daher werden zum Vergleich von zwei Monte Carlo Schätzwerten die

Erwartungswerte der Berechnungszeiten verwendet. Das Mass für die Effizienz eines ungezinkten Schätzers lautet folglich:

$$\underbrace{\text{Varianz per Replikation}}_{\sigma^2} \cdot \underbrace{\text{Erwartungswert der Berechnungszeit per Replikation}}_{\mathbb{E}[\tau]} \quad (3.2)$$

(Glasserman, 2003, [Gla03]).

### 3.3.2 Bias (systematische Abweichung)

Das Produkt zum Effizienzvergleich aus 3.3.1 basiert auf dem zentralen Grenzwertsatz und der Tatsache, dass die Schätzwerte  $\hat{\beta}_n$  Mittelwerte von ungezinkten Replikationen  $\beta_i$  sind. Ist dies der Fall, sind Varianz und Berechnungszeit die wichtigsten Faktoren zum Vergleich der Effizienz und Präzision unterschiedlicher Methoden. Aber Verfahren zur Varianz- und Berechnungszeitreduktion sind sinnlos, wenn dadurch die Konvergenz zu einem inkorrekten Wert beschleunigt wird. Deshalb muss beim Vergleich von zwei Schätzwerten auch das Bias betrachtet werden. Systematische Abweichung oder systematischer Fehler, oft *Bias* (englischer Ausdruck) genannt, ist die Differenz zwischen dem Erwartungswert eines Schätzers  $\hat{\beta}$  und dem tatsächlichen Wert der zu schätzenden Grösse  $\beta$ :

$$\text{bias}(\hat{\beta}) = \mathbb{E}[\hat{\beta}] - \beta. \quad (3.3)$$

Gilt  $\text{bias}(\hat{\beta}) = 0$ , ist der Schätzwert ungezinkt oder „unbiased“, ansonsten spricht man von einem gezinkten oder „biased“ Schätzer (Baum u. a., 2013, [BBB<sup>+</sup>13]). Während eine systematische Abweichung bei kleinen Stichproben manchmal unumgänglich ist, werden in der Praxis vor allem Schätzer verwendet, deren Bias durch eine Erhöhung des Zeitbudgets  $z$  eliminiert werden kann. Ein Beispiel hierfür ist das Problem der Berechnung eines Quotienten von zwei Erwartungswerten  $\mathbb{E}[\hat{\gamma}]$  und  $\mathbb{E}[\hat{\eta}]$  aus unabhängigen und gleichverteilten Replikationspaaren  $(\gamma_i, \eta_i)$ . Der Quotient von zwei empirischen Mittelwerten ist „biased“, denn es gilt

$$\mathbb{E}\left[\frac{\hat{\gamma}}{\hat{\eta}}\right] \neq \frac{\mathbb{E}[\hat{\gamma}]}{\mathbb{E}[\hat{\eta}]}. \quad (3.4)$$

Dennoch konvergiert  $\frac{\hat{\gamma}}{\hat{\eta}}$  zu  $\frac{\mathbb{E}[\hat{\gamma}]}{\mathbb{E}[\hat{\eta}]}$ , wenn  $n \rightarrow \infty$ . Die systematische Abweichung verschwindet (Glasserman, 2003, [Gla03]).

### 3.3.3 Mittlere quadratische Abweichung

Sei das Zeitbudget  $z$  zur Berechnung eines Schätzwertes  $\hat{\beta}$  mit dem systematischen Fehler  $\text{bias}(\hat{\beta})$  und der Varianz  $\sigma_{\hat{\beta}}^2$  vorgegeben. Dieses Budget muss aufgeteilt werden: Verwendet man mehr Berechnungszeit pro Replikation, wird sowohl die systematische Abweichung als auch die Zahl der durchführbaren Probeläufe bei gegebenem  $z$  kleiner, was eine Erhöhung der Varianz

zur Folge hat. In diesem Fall ist ein Mass für das Gleichgewicht zwischen Bias und Varianz erforderlich: die mittlere quadratische Abweichung (auf Englisch *Mean Squared Error*). Der mittlere quadratische Fehler für einen Schätzer  $\hat{\beta}$  des Wertes  $\beta$  ist definiert als

$$\text{MSE}(\hat{\beta}) = \mathbb{E} \left[ (\hat{\beta} - \beta)^2 \right] \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} &= \left( \mathbb{E}[\hat{\beta}] - \beta \right)^2 + \mathbb{E} \left[ \left( \hat{\beta} - \mathbb{E}[\hat{\beta}] \right)^2 \right] \\ &= \text{bias}^2(\hat{\beta}) + \sigma_{\hat{\beta}}^2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ein Schätzwert  $\hat{\beta}$  heisst konsistent, wenn  $\text{MSE}(\hat{\beta})$  gegen null strebt, falls  $n \rightarrow \infty$ . In der Anwendung der Monte Carlo Methoden, beispielsweise in der Finanzmathematik (Kapitel 6), ist die Varianz eines Schätzers  $\sigma_{\hat{\beta}}^2$  meistens grösser als das Quadrat seiner systematischen Abweichung  $\text{bias}^2(\hat{\beta})$ . Im Allgemeinen ist die Implementation einer Simulation mit relativ kleinem Bias einfacher als die Umsetzung einer Methode mit relativ geringer Standardabweichung (Glasserman, 2003, [Gla03]).

### 3.4 Monte Carlo und andere Quadraturverfahren

Monte Carlo ist eines von vielen Verfahren der numerischen Mathematik. In diesem Abschnitt wird Monte Carlo mit einem anderen Quadraturverfahren, der Trapezregel, verglichen und Vor- sowie Nachteile der beiden Methoden werden besprochen.

Betrachtet wird das bestimmte Integral

$$\mu = \int_a^b f(x) dx, \quad (3.7)$$

welches durch die numerischen Verfahren angenähert werden soll. Sei die Funktion  $f$  zwischen den Grenzen  $a$  und  $b$  integrierbar. Der Ansatz zur Approximation dieses Integrals mittels Monte Carlo Quadratur ist im Abschnitt 2.2 beschrieben. Bei der Trapezregel wird die Fläche unter dem Graphen der Funktion  $f$  durch Trapeze gefüllt. Dabei wird das Integrationsintervall  $[a, b]$  in  $n$  Teilintervalle  $[x_i, x_{i+1}]$  zerlegt. Jedes dieser Teilstücke hat dieselbe Breite (Höhe der einzelnen Trapeze):

$$h = \frac{b - a}{n}. \quad (3.8)$$

Der Flächeninhalt des  $i$ -ten Trapezes kann durch die Funktionswerte und die Trapezhöhe  $h$  berechnet werden:

$$\begin{aligned} A_i &= h \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \\ &= \frac{b - a}{2n} (f(x_i) + f(x_{i+1})). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Durch das Aufsummieren der einzelnen Flächen erhält man eine Annäherung für den Wert  $\mu$ :

$$\hat{\mu}_{Trapez} = \frac{b-a}{2n} \left( f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) + f(b) \right). \quad (3.10)$$

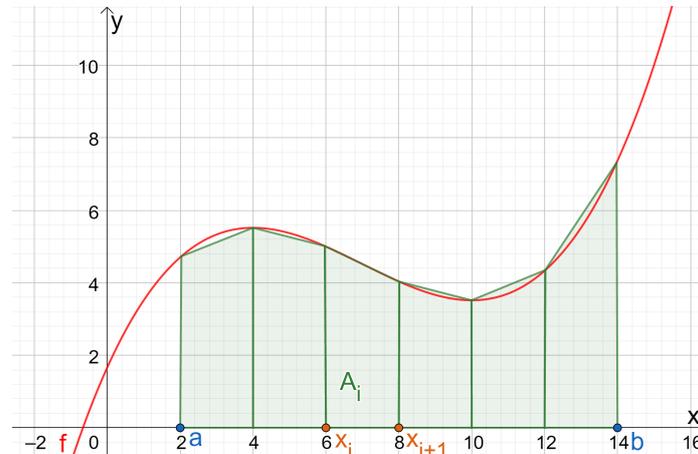


Abbildung 5: Integralannäherung mittels Trapezregel.

In der Abbildung 5 ist die Unterteilung des Integrationsintervalls in Teilintervalle zu sehen. Es ist bereits erkennbar, dass  $\hat{\mu}_{Trapez}$  präziser wird, wenn eine feinere Unterteilung des Intervalls  $[a, b]$  vorgenommen wird. Sowohl die Trapezregel als auch ein Monte Carlo Quadraturverfahren liefert eine bessere Approximation bei grösser werdendem  $n$ , das heisst bei mehr Teilintervallen (Trapezverfahren) oder einer höheren Anzahl Punkten (Monte Carlo) (Vogel, 2019, [Vog19]; Waldvogel, 2010, [Wal10]).

Das wichtigste Kriterium beim Vergleich zweier numerischer Methoden ist die Konvergenzrate, da diese die Effizienz und Präzision der Verfahren beschreibt. Wie im Abschnitt 3.2 erklärt, ist die Konvergenzgeschwindigkeit bei Monte Carlo Methoden proportional zu  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ . Im Gegensatz dazu ist die Konvergenzrate des Trapezverfahrens proportional zu  $\frac{1}{n^{\frac{d}{2}}}$  und daher abhängig von der Dimension  $d$  einer Funktion beziehungsweise von der Dimension des Integrationsintervalls (Glasserman, 2003, [Gla03]). Bei Problemstellungen in höheren Dimensionen nimmt die Konvergenzgeschwindigkeit der Trapezregel ab. Dies ist eine Eigenschaft aller deterministischen Integrationsmethoden (numerische Verfahren, welche Schätzwerte durch Flächenunterteilung hervorbringen). Die Trapezregel ist einer Monte Carlo Quadratur vorzuziehen, wenn

$$n^{\frac{2}{d}} > \sqrt{n} \Rightarrow \frac{2}{d} > \frac{1}{2} \Rightarrow 4 > d \quad (3.11)$$

gilt. Die Trapezregel sollte in niedrigen Dimensionen bevorzugt werden, eine Monte Carlo Integration bei höherdimensionalen Problemstellungen. Dies unterstreicht erneut, warum Monte Carlo Verfahren häufig bei der Auswertung komplexer Modelle angewandt werden. Mathematische Modelle in der Finanzmathematik (Kapitel 6) beispielsweise sind oft sehr hochdimensional, wodurch die Konvergenzrate von Monte Carlo dank ihrer Dimensionsunabhängigkeit konkurrenzfähig gegenüber anderen Verfahren der Numerik wird (Glasserman, 2003, [Gla03]).

# Kapitel 4

## Simulationen zur Annäherung von $\pi$

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit mehreren Anwendungsbeispielen der Monte Carlo Simulationen und zeigt deren Flexibilität auf. Es handelt sich dabei um Approximationen der irrationalen Kreiszahl  $\pi$ . Die Verfahren werden implementiert und sind im Anhang C als *processing* Programm vorzufinden. Nähere Informationen zur Programmiersprache und Software *processing* können der Quelle [RF07] entnommen werden.

### 4.1 Kreissektor

Die Annäherung von  $\pi$  durch das zufällige Generieren von Punkten im Kreissektor des ersten Quadranten ist ein häufiges Einstiegsbeispiel zur Erklärung des Grundgedankens der Monte Carlo Simulationen. Die Vorgehensweise ähnelt hierbei dem Prozedere aus Abschnitt 2.3.1: In ein Quadrat mit Seitenlänge  $s = 1$  wird ein Viertelkreis mit Radius  $r = 1$  einbeschrieben. Statt Darts auf eine Landkarte zu werfen (Beispiel Flächenannäherung eines Landes), werden zufällige Punkte im Inneren des Quadrats generiert. Dividiert man die Anzahl der Punkte im Viertelkreis ( $n_{in}$ ) durch die Gesamtzahl der Punkte ( $n_{tot}$ ) und multipliziert das Resultat mit der Quadratfläche ( $A_{Quadrat} = 1$ ), erhält man eine Approximation für den Flächeninhalt des Viertelkreises:

$$\hat{A}_{Viertelkreis} = \frac{n_{in}}{n_{tot}} A_{Quadrat} = \frac{n_{in}}{n_{tot}}. \quad (4.1)$$

Die Fläche eines Viertelkreises kann ferner über den Radius und  $\pi$  berechnet werden (Geometrie):

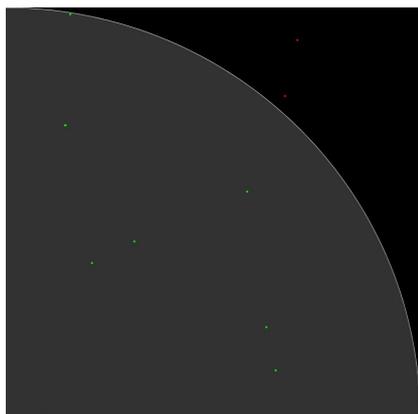
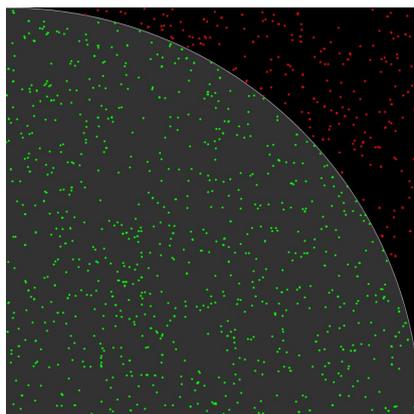
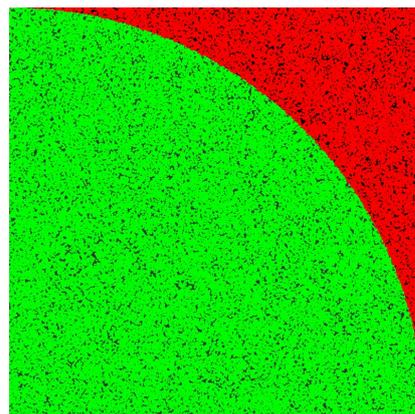
$$A_{Viertelkreis} = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi}{4}. \quad (4.2)$$

In dieser Gleichung kann  $A_{Viertelkreis}$  durch den Bruch aus (4.1) ersetzt werden. Eine Umformung der Gleichung ermöglicht eine Annäherung der Kreiszahl  $\pi$ :

$$\hat{\pi} = 4\hat{A}_{Viertelkreis} = 4\frac{n_{in}}{n_{tot}}. \quad (4.3)$$

Wie bei allen Monte Carlo Simulationen gilt: je grösser  $n_{tot}$ , desto präziser der Schätzwert (Dunn und Shultis, 2011, [DS11]).

Das beschriebene Verfahren wird implementiert. Zu Beginn generiert das erstellte Programm  $x$ - und  $y$ -Werte im Intervall  $[0, 1]$ , anschliessend wird mit der Kreisgleichung  $x^2 + y^2 = 1$  überprüft, ob die generierten Punkte  $P_i(x_i/y_i)$  innerhalb oder ausserhalb des Viertelkreises liegen. Ist dies für  $n_{tot}$  Punkte geschehen, wird mit (4.3) ein Schätzer für  $\pi$  berechnet.

Abbildung 6:  $n_{tot} = 10$ .Abbildung 7:  $n_{tot} = 1'000$ .Abbildung 8:  $n_{tot} = 100'000$ .

Die Abbildungen 6, 7 und 8 sind drei Beispiele für Programmdurchläufe mit unterschiedlicher Anzahl generierter Punkte. Die Punkte innerhalb des Viertelkreises werden vom Programm grün eingefärbt, die Punkte ausserhalb rot. Bei den dargestellten Abbildungen wurden folgende Schätzwerte kalkuliert:

$n_{tot}$ (Anzahl Punkte $P_i$ )	$n_{in}$ (Punkte innerhalb des Viertelkreises)	$\hat{\pi}_n$
10	8	3,2
1'000	797	3,118
100'000	78'634	3,14536

Tabelle 2: Werte der Simulation zur Annäherung von  $\pi$ .

Bei der Betrachtung der Resultate in der Tabelle 2 kann die Konvergenz der Monte Carlo Simulationen beobachtet werden. Wird  $n_{tot}$  100-mal grösser, so wird der Schätzwert  $\hat{\pi}_n$  um eine Stelle präziser. Dies liegt an der Konvergenzrate (Abschnitt 3.2) der Monte Carlo Verfahren, welche proportional zu  $\frac{1}{\sqrt{n_{tot}}}$  ist. Die Präzision der Verfahren wird um eine Dezimalstelle erhöht, wenn die Zahl der Durchführungen ver Hundertfacht wird (Glasserman, 2003, [Gla03]).

## 4.2 Buffons Nadelproblem

Das Nadelexperiment von Comte de Buffon, dessen Anwendung zur Schätzung der Kreiszahl  $\pi$  genutzt werden kann (Pierre-Simon de Laplace), ist im Anhang A.2 beschrieben. Nun werden der mathematische Hintergrund des Nadelproblems und die entsprechende Monte Carlo Simulation (Implementation als Programm) diskutiert.

Die Abbildung 9 ermöglicht ein besseres Verständnis der nachfolgenden Überlegungen. Betrachtet werden Nadeln der Länge  $L$  und Linien im Abstand  $A$ , wobei  $A > L$  gilt. Die geworfene Nadel schliesst mit der Vertikalen (Gerade parallel zu den Linien) den Winkel  $\varphi$  ein. Die horizontale

Komponente der Nadel ist daher gegeben durch  $L \sin \varphi$ .

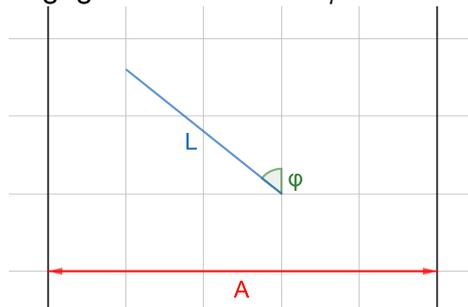


Abbildung 9: Herleitung von  $P_{\text{schnitt}}$ .

Da die Nadeln unabhängig und gleichverteilt zwischen zwei Linien landen, ist die Wahrscheinlichkeit eines Schnittes der linken Linie bei Winkel  $\varphi$  gleich der Länge der horizontalen Nadelkomponente dividiert durch den Abstand  $A$ :

$$P_{\text{schnitt}}(\varphi) = \frac{L \sin \varphi}{A}. \quad (4.4)$$

Dies entspricht der Definition, laut der die Wahrscheinlichkeit  $P$  eines Ereignisses betrachtet werden kann als

$$P = \frac{\text{Anzahl der für das Ereignis günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}} \quad (4.5)$$

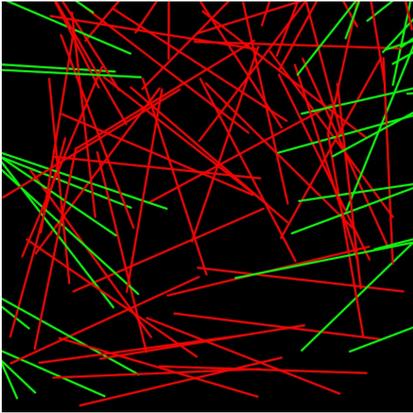
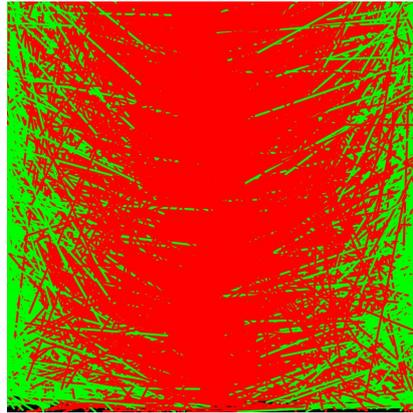
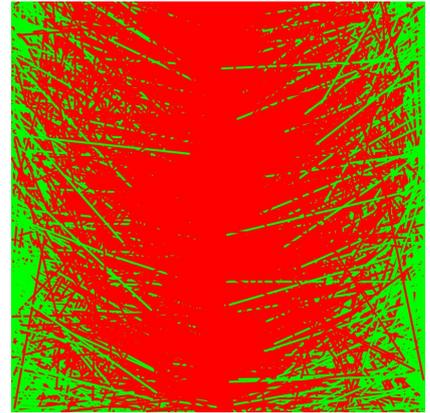
(Baum u. a., 2013, [BBB<sup>+</sup>13]).

Die Wahrscheinlichkeit, mit der die Nadel in einem infinitesimalen Winkel  $d\varphi$  über  $\varphi$  landet, beträgt gemäss (4.5)  $\frac{d\varphi}{\pi}$ . Hierbei wird  $\pi$  ( $180^\circ$ ) anstelle von  $2\pi$  ( $360^\circ$ ) verwendet, weil die Problemstellung symmetrisch ist. Es gilt

$$P_{\text{schnitt}} = \int_0^\pi P_{\text{schnitt}}(\varphi) \frac{d\varphi}{\pi} = \int_0^\pi \frac{L \sin \varphi}{A} \frac{d\varphi}{\pi} = \frac{L}{\pi A} \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = \frac{2L}{\pi A}. \quad (4.6)$$

Die Herleitung basiert auf der Voraussetzung  $A > L$ . Bei Nadeln beliebiger Länge ist die Gleichung (4.6) nicht gültig (Dunn und Shultis, 2011, [DS11]).

Durch eine Monte Carlo Simulation kann mit Buffons Nadelexperiment die Kreiszahl  $\pi$  angenähert werden. Das erstellte Programm hierfür befindet sich im Anhang C.2. Zu Beginn eines Programmdurchlaufs werden die  $x$ - und  $y$ -Werte der Nadelspitze im Intervall  $[0, A]$  und der Winkel  $\varphi$  im Intervall  $[0, \pi]$  generiert. Dann wird getestet, ob die Nadel eine der beiden Linien schneidet. Ist dies der Fall, wird sie grün eingefärbt, ansonsten zeichnet das Programm sie rot ein. Nachdem  $n_{\text{tot}}$  Nadeln generiert und ausgewertet wurden, kann mithilfe der Gleichung (4.6) und der empirisch bestimmten Wahrscheinlichkeit  $P_{\text{schnitt}}$  der Schätzwert  $\hat{\pi}_n$  berechnet werden.

Abbildung 10:  $n_{tot} = 100$ .Abbildung 11:  $n_{tot} = 10'000$ .Abbildung 12:  $n_{tot} = 1'000'000$ .

Die Abbildungen 10, 11 und 12 sind Beispieldurchläufe des Programms mit unterschiedlicher Anzahl generierter Nadeln, dabei wurden die folgenden Schätzwerte berechnet:

$n_{tot}$ (Anzahl geworfene Nadeln)	$n_s$ (Nadeln, die eine Linie schneiden)	$\hat{\pi}_n$
100	33	3,030303030303030
10'000	3'154	3,170577045022194
1'000'000	318'404	3,140664062009271

Tabelle 3: Werte der Simulation des Buffon'schen Nadelproblems.

Wie im Abschnitt 4.1 fällt beim Betrachten der Tabelle 3 auf, dass die Schätzwerte  $\hat{\pi}_n$  um eine Stelle präziser werden, wenn die Gesamtzahl der geworfenen Nadeln ( $n_{tot}$ ) mit 100 multipliziert wird. Diese Beobachtung ist auf die Konvergenzrate der Monte Carlo Verfahren zurückzuführen (Abschnitt 3.2).

# Kapitel 5

## Varianzreduzierungstechniken

Dieses Kapitel basiert auf dem Kapitel 3 und zeigt Methoden auf, mit denen Präzision und Effizienz der Monte Carlo Verfahren verbessert werden können. Da durch diese Methoden meistens die Varianz verringert wird, spricht man von Varianzreduzierungstechniken. Das Kapitel stellt eine Auswahl an Möglichkeiten zur Optimierung von Monte Carlo dar. Die Ideen hinter den Techniken stehen im Vordergrund. Auf eine umfangreiche Anwendung der Methoden wird verzichtet.

### 5.1 Was sind Varianzreduzierungstechniken?

Varianzreduzierungstechniken (VRT) sind Verfahren, welche die Effizienz von Monte Carlo Methoden durch eine Varianzreduzierung der Schätzwerte steigern. Die Techniken basieren auf zwei möglichen Strategien: Entweder werden veränderliche Komponenten des mathematischen Modells, das der Monte Carlo Simulation zugrunde liegt, angepasst, um den Simulationsoutput zu korrigieren oder die Variabilität des Simulationsinputs wird verringert. Obwohl die verschiedenen Methoden zur Varianzreduktion unterschiedliche Ansätze verfolgen, gelten folgende zwei Punkte immer (Glasserman, 2003, [Gla03]):

- Die bestmögliche Effizienzoptimierung durch eine Varianzreduktion wird erzielt, wenn spezifische Eigenschaften einer Problemstellung berücksichtigt werden und nicht durch eine allgemeine Anwendung einer unspezifischen Methode.
- Die Fehlerreduktion eines Schätzwerts ist oft gekoppelt mit der Abschätzung des Fehlers selber. Daher kann bei der Berechnung eines varianzreduzierten Schätzers mit gültigem Vertrauensintervall nicht immer das ganze Optimierungspotential ausgeschöpft werden.

Beispielmethoden zur Varianzreduktion sind Control Variates, Antithetic Variates, Stratified Sampling, Latin Hypercube Sampling oder Importance Sampling (Glasserman, 2003, [Gla03]). In den folgenden Abschnitten wird das Grundprinzip von zwei Varianzreduzierungstechniken näher erläutert: Importance Sampling und Control Variates.

### 5.2 Importance Sampling

Bei der Anwendung einer Importance Sampling Methode wird die Varianz einer Monte Carlo Simulation verringert, indem man die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Replikationen verändert. Mithilfe einer geeigneten Wahrscheinlichkeitsanpassung kann signifikanten Ereignissen des Ergebnisraumes eine höhere Gewichtung zugeordnet werden, was zu einer Effizienzsteigerung des Monte Carlo Verfahrens führt (Glasserman, 2003, [Gla03]).

Die deutsche Übersetzung des englischen Ausdrucks *Importance Sampling* ist „Stichprobenverfahren nach Wichtigkeit“ oder „gewichtete Stichprobenentnahme“ (Hirber, 2015, [Hir15]). Obwohl dieser Begriff die Gewichtung der signifikanten Ereignisse hervorhebt, wird in der vorliegenden Arbeit der englische Term verwendet. Zur Verdeutlichung des Grundgedankens von Importance Sampling wird die Annäherung des Integrals

$$\alpha = \int h(x)f(x)dx \quad (5.1)$$

betrachtet. Die Funktion  $h$ , die jedem Element  $x$  der Menge  $\mathbb{R}^d$  ein Element der Menge  $\mathbb{R}$  zuordnet, basiert auf der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $f$ , welche die Verteilung der stochastischen Variable  $X$ , Element der Menge  $\mathbb{R}^d$ , beschreibt. Der Wert  $\alpha$  kann, wie im Abschnitt 2.2 erläutert, als Erwartungswert aufgefasst werden:

$$\alpha = \mathbb{E}[h(X)]. \quad (5.2)$$

Der Monte Carlo Schätzwert für das betrachtete Integral ist gegeben durch

$$\hat{\alpha}_f = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(X_i). \quad (5.3)$$

Hierbei sind  $X_1, X_2, \dots, X_n$  unabhängige Punkte aus  $\mathbb{R}^d$  mit der Wahrscheinlichkeitsdichte  $f$ . In der Praxis können Werte der Zufallsvariable  $X$  nicht immer effizient mittels  $f$  generiert werden. Gibt es eine Möglichkeit, die Funktion  $f$  zu umgehen? Und kann dabei das Monte Carlo Verfahren sogar optimiert werden?

Sei  $g$  eine andere Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion, welche die Wahrscheinlichkeitsdichte einer Zufallsvariablen  $X$  aus  $\mathbb{R}^d$  beschreibt, mit folgender Eigenschaft:

$$f(x) > 0 \Rightarrow g(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d. \quad (5.4)$$

Das Integral wird umgeformt. Man erhält:

$$\alpha = \int h(x) \frac{f(x)}{g(x)} g(x) dx. \quad (5.5)$$

Die Einschränkung aus (5.4) hat zur Folge, dass der Zähler und der Nenner des Bruches  $\frac{f(x)}{g(x)}$  dieselben Nullstellen besitzen. Eine Division durch null wird verhindert. Der umformulierte Integralwert  $\alpha$  kann ebenfalls als Erwartungswert (mit  $X$  basierend auf  $g$ ) ausgedrückt werden:

$$\alpha = \tilde{\mathbb{E}} \left[ h(X) \frac{f(X)}{g(X)} \right]. \quad (5.6)$$

Das Symbol „ $\tilde{\cdot}$ “ in der Schreibweise des Erwartungswertes  $\tilde{\mathbb{E}}$  gibt an, dass die Variable  $X$  gemäss  $g$  verteilt ist. Generiert man  $n$  unabhängige Punkte  $X_1, X_2, \dots, X_n$  mithilfe der Wahrscheinlichkeitsdichte  $g$ , kann ein auf  $g$  basierender Monte Carlo Schätzwert berechnet werden:

$$\hat{\alpha}_g = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(X_i) \frac{f(X_i)}{g(X_i)}. \quad (5.7)$$

Die Gewichtung  $\frac{f(X_i)}{g(X_i)}$  wird Wahrscheinlichkeitsverhältnis (auf Englisch *Likelihood Ratio*) an der Stelle  $X_i$  genannt. Aus der Gleichung (5.6) folgt, dass  $\hat{\alpha}_g$  ein ungezinkter oder „unbiased“ Schätzer für den Wert  $\alpha$  ist, weil  $\tilde{\mathbb{E}}[\hat{\alpha}_g] = \alpha$  gilt. Zum Effizienzvergleich der Schätzwerte mit und ohne Importance Sampling muss daher die Varianz der beiden Verfahren betrachtet werden (Abschnitt 3.3.1). Durch den veränderten Integranden und die neue Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $g$  kann nach einer Importance Sampling Anwendung die Varianz des Schätzers  $\hat{\alpha}_g$  sowohl kleiner als auch grösser sein als die des Schätzwertes  $\hat{\alpha}_f$ . Die „Kunst“ von Importance Sampling liegt folglich in der Wahl der Wahrscheinlichkeitsdichte  $g$ , welche der Problemstellung angepasst werden muss: Sie sollte so gewählt werden, dass die Anzahl der Stichproben proportional zum Produkt  $|h| \cdot f$  zunimmt, um den signifikanten Stellen eine höhere Gewichtung zuzuordnen und die Effizienz der Monte Carlo Simulation zu erhöhen (Glasserman, 2003, [Gla03]).

### 5.3 Control Variates

Die Verwendung von Kontrollvariaten (auf Englisch *Control Variates*) ist eine der effizientesten Techniken zur Optimierung von Monte Carlo Verfahren. Kontrollvariate nutzen Informationen über die Abweichung von Schätzwerten bekannter Grössen zur Fehlerreduktion bei Schätzern unbekannter Grössen (Glasserman, 2003, [Gla03]).

Zur Erklärung dieser Varianzreduzierungstechnik wird eine Simulation betrachtet, bei welcher die Werte  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  die Outputs von  $n$  Replikationen darstellen. Die Werte  $Y_i$  sind unabhängig und gleichverteilt und das Ziel der vorliegenden Monte Carlo Simulation ist die Annäherung des Erwartungswertes  $\mathbb{E}[Y]$ . Dieser kann durch den empirischen Mittelwert der Stichproben  $Y_i$  approximiert werden:

$$\bar{Y} = \frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n}{n}. \quad (5.8)$$

Der resultierende Schätzwert ist ungezinkt und konvergiert gegen  $\mathbb{E}[Y]$  für  $n \rightarrow \infty$ . Für jede Replikation wird neben  $Y_i$  ein zusätzlicher Output  $X_i$  berechnet. Die Paare  $(X_i, Y_i)$  seien unabhängig und gleichverteilt. Der Erwartungswert  $\mathbb{E}[X]$  sei bekannt. Für jede Zahl  $b$  und jede Replikation mit dem Wertepaar  $(X_i, Y_i)$  kann der folgende Term ausgewertet werden:

$$Y_i(b) = Y_i - b(X_i - \mathbb{E}[X]). \quad (5.9)$$

Anschliessend wird der empirische Mittelwert der Werte  $Y_i(b)$  kalkuliert:

$$\bar{Y}(b) = \bar{Y} - b(\bar{X} - \mathbb{E}[X]) = \frac{1}{n} \sum_{n=1}^n (Y_i - b(X_i - \mathbb{E}[X])). \quad (5.10)$$

Das Ergebnis ist ein Schätzwert, der auf Kontrollvariaten basiert. Das heisst, der beobachtete Fehler  $\bar{X} - \mathbb{E}[X]$  ermöglicht eine Kontrolle der Abschätzung von  $\mathbb{E}[Y]$ . Je grösser man  $b$  wählt, desto stärker wird die Replikation  $Y_i$  mithilfe der Abweichung zwischen  $X_i$  und  $\mathbb{E}[X]$  korrigiert.

Eine optimale Wahl des Parameters  $b$  führt zur grösstmöglichen Varianzreduktion und somit zur maximalen Effizienzsteigerung. Zur Annäherung von  $\mathbb{E}[Y]$  ist der Kontrollvariate Schätzwert  $\bar{Y}(b)$  ungezinkt:

$$\mathbb{E}[\bar{Y}(b)] = \mathbb{E}[\bar{Y} - b(\bar{X} - \mathbb{E}[X])] = \mathbb{E}[\bar{Y}] = \mathbb{E}[Y]. \quad (5.11)$$

Der Schätzer ist ausserdem konsistent (Abschnitt 3.3.3) und jedes  $Y_i(b)$  hat die Varianz

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y_i(b)] &= \text{Var}[Y_i - b(X_i - \mathbb{E}[X])] \\ &= \sigma_Y^2 - 2b\sigma_X\sigma_Y\rho_{XY} + b^2\sigma_X^2 =: \sigma^2(b). \end{aligned} \quad (5.12)$$

In der Gleichung (5.12) ist  $\sigma_X^2$  die Varianz von  $X$  und  $\sigma_Y^2$  die Varianz von  $Y$ , während  $\rho_{XY}$  die Korrelation zwischen  $X$  und  $Y$  beschreibt. Regression (Korrelation) ist die Untersuchung und Darstellung des Zusammenhanges zweier Grössen. Der Korrelationskoeffizient beschreibt die Qualität einer Regression beziehungsweise den Grad der Abhängigkeit der beiden Werte (Baum u. a., 2013, [BBB<sup>+</sup>13]). Der Kontrollvariate Schätzwert  $\bar{Y}(b)$  besitzt die Varianz  $\frac{\sigma^2(b)}{n}$ . Die Varianz des empirischen Mittelwerts  $\bar{Y}$  ohne Kontrollvariate beträgt hingegen  $\frac{\sigma_Y^2}{n}$  (Abschnitt 3.2). Der kontrollierte Schätzer hat daher die geringere Streuung als der unkontrollierte Mittelwert, wenn

$$b^2\sigma_X < 2b\sigma_Y\rho_{XY} \quad (5.13)$$

gilt (folgt aus Gleichung (5.12)). Der optimale Koeffizient  $b^*$ , der die Varianz von  $\bar{Y}(b)$  minimiert, ist gegeben durch

$$b^* = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\text{Var}[X]}. \quad (5.14)$$

Hierbei ist  $\text{Cov}[X, Y]$  die Kovarianz von  $X$  und  $Y$ . Wird in der Gleichung (5.12)  $b$  durch den erhaltenen Wert  $b^*$  ersetzt und der Term vereinfacht, kann das Verhältnis der Varianzen des optimal kontrollierten Schätzwertes und des unkontrollierten Schätzers berechnet werden:

$$\frac{\text{Var}[\bar{Y}(b^*)]}{\text{Var}[\bar{Y}]} = 1 - \rho_{XY}^2. \quad (5.15)$$

Die Effizienz der Varianzreduktion ist also abhängig von der Korrelationsstärke zwischen den Replikationswerten  $X$  und  $Y$ , ausgedrückt durch den Wert  $\rho_{XY}$ .

Da in der Praxis bei unbekanntem  $\mathbb{E}[Y]$  meistens auch die Varianz  $\sigma_Y$  und der Korrelationskoeffizient  $\rho_{XY}$  nicht gegeben sind, muss  $b^*$  empirisch angenähert werden durch

$$\hat{b}_n = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}. \quad (5.16)$$

Mit der Annäherung  $\hat{b}_n$  für den Wert  $b^*$  kann mithilfe der Gleichung (5.10), den Replikationspaaren  $(X_i, Y_i)$  und dem Erwartungswert  $\mathbb{E}[X]$  der kontrollierte Schätzwert  $\bar{Y}(\hat{b}_n)$  berechnet werden (Glasserman, 2003, [Gla03]).

# Kapitel 6

## Monte Carlo in der Finanzmathematik

In diesem Kapitel wird die Theorie der Monte Carlo Methoden auf Problemstellungen der Finanzmathematik angewandt. Nach einer Einführung in das Black-Scholes Modell wird eine Simulation zur Bestimmung des Payoffs einer europäischen Call-Option durchgeführt und diskutiert. Die Effizienz der Simulation wird mithilfe einer Varianzreduzierungstechnik erhöht. Die Abschnitte *Die Mathematik in der Finanzwelt*, *Warum Monte Carlo in der Finanzmathematik?* und *Optionen* bilden die Grundlage dieses Kapitels und sind im Anhang D dargestellt.

### 6.1 Berechnung des Wertes einer europäischen Call-Option

Die folgenden Abschnitte legen dar, wie der Wert einer europäischen Option mithilfe des Black-Scholes Modells berechnet oder durch eine Monte Carlo Simulation angenähert werden kann. Eine europäische Option ist ein Derivat (Wertpapier), dessen Besitzer das Recht hat, an einem fixen Zeitpunkt eine bestimmte Menge eines Basiswertes zu kaufen oder zu verkaufen (siehe Anhang D.3) (Hull, 2011, [Hul11]). Im Abschnitt 6.1.3 wird die Effizienz des Monte Carlo Schätzwertes mittels einer Kontrollvariante Varianzreduktion gesteigert.

#### 6.1.1 Das Black-Scholes Modell

In diesem Beispiel wird die Berechnung des Gegenwartswertes einer Call-Option zum Kauf einer Aktie (auf Englisch *Call Option on a Stock*) betrachtet. Sei  $S(t)$  der Preis der Aktie zur Zeit  $t$ . Die Call-Option ist europäisch. Der Besitzer hat das Recht, die Aktie zu einem festgelegten Preis  $K$  zum Zeitpunkt  $T$  in der Zukunft zu erwerben. Die momentane Zeit ist  $t = 0$ . Falls der Aktienpreis zur Zeit  $T$  grösser ist als der Ausübungspreis  $K$ , erzielt der Inhaber der Option beim Kauf einen *Payoff* (englisch für Auszahlung) von  $S(T) - K$ , ansonsten läuft die Option für den Besitzer wertlos aus. Der Payoff des Eigentümers zum Zeitpunkt  $T$  ist daher

$$(S(T) - K)^+ = \max\{0, S(T) - K\}. \quad (6.1)$$

Die Begriffe *Payoff* und *Gewinn* müssen differenziert werden, denn der Gewinn, den der Inhaber einer Option erzielt, entspricht dem Payoff abzüglich der Optionsprämie (Preis, welcher der Optionskäufer dem Verkäufer zahlen musste) (Hull, 2011, [Hul11]).

Um den Gegenwartswert des Payoffs zu erhalten, muss mit einem Abzinsungsfaktor  $e^{-rT}$  multipliziert werden, wobei  $r$  die stetige Zinsrate ist. Als Erwartungswert formuliert ist der Gegenwartswert des Payoffs gegeben durch

$$\mathbb{E} [e^{-rT} (S(T) - K)^+]. \quad (6.2)$$

Damit der erwartete Gegenwartswert aussagekräftig ist, muss die Verteilung der Zufallsvariable  $S(T)$ , das heisst die Verteilung des Aktienpreises zum Ausübungszeitpunkt  $T$ , angegeben werden. Es gibt mehrere mathematische Modelle zur Beschreibung der Dynamik eines Aktienpreises. Eines der berühmtesten ist das Black-Scholes Modell. Dieses beschreibt die Entwicklung eines Aktienwertes durch die folgende stochastische Differentialgleichung:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = rdt + \sigma dW(t). \quad (6.3)$$

Hierbei ist  $W(t)$  eine Brown'sche Bewegung, die durch das mathematische Modell eines Wiener Prozesses beschrieben werden kann. Eine skalare Brown'sche Bewegung, auch skalarer Wiener Prozess genannt, über dem Intervall  $[0, T]$  ist eine stochastische Variable  $W(t)$  mit den folgenden drei Eigenschaften (Higham, 2001, [Hig01]; Hull, 2011, [Hul11]):

1.  $W(0) = 0$  (mit Wahrscheinlichkeit 1).
2. Für  $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$  ist die Zufallsvariable  $W(t_2) - W(t_1)$  normalverteilt mit Mittelwert 0 und Varianz  $t_2 - t_1$ .
3. Für  $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < t_4 \leq T$  sind die Inkremente  $W(t_2) - W(t_1)$  und  $W(t_4) - W(t_3)$  unabhängig voneinander.

Die stochastische Differentialgleichung (6.3) kann aufgefasst werden als Modell zur Beschreibung der prozentualen Änderung  $\frac{dS}{S}$  des Aktienpreises mithilfe der Brown'schen Bewegung. Der Parameter  $\sigma$  ist die Volatilität, ein Mass für die Unsicherheit der Rendite einer Anlage (Hull, 2011, [Hul11]). Der Koeffizient  $r$  ist die mittlere Rentabilität und entspricht im betrachteten Beispiel der Zinsrate  $r$ . Die Lösung der stochastischen Differentialgleichung (6.3) ist

$$S(T) = S(0)\exp\left(\left[r - \frac{1}{2}\sigma^2\right]T + \sigma W(T)\right). \quad (6.4)$$

Warum die Lösung der Differentialgleichung (6.3) durch die Gleichung (6.4) beschrieben werden kann, wird in dieser Arbeit nicht näher erläutert, kann aber beispielsweise im Anhang B (*Results from Stochastic Calculus*) der Quelle [Gla03] nachgelesen werden. Da es sich bei  $S(0)$  um den aktuellen Preis der Aktie handelt, ist der Wert bekannt. Die Zufallsvariable  $W(T)$  ist normalverteilt mit Mittelwert 0 und Varianz  $T$  (folgt aus den Eigenschaften einer Brown'schen Bewegung) und kann daher durch die stochastische Variable  $\sqrt{T}Z$  ersetzt werden, wenn  $Z$  eine standardnormalverteilte Zufallsvariable (Mittelwert 0 und Varianz 1) ist. Die Gleichung (6.4) wird umgeformt:

$$S(T) = S(0)\exp\left(\left[r - \frac{1}{2}\sigma^2\right]T + \sigma\sqrt{T}Z\right). \quad (6.5)$$

Man sieht nun, dass der Logarithmus des Aktienpreises normalverteilt ist und somit der Aktienpreis selber eine logarithmische Normalverteilung besitzt. Der Erwartungswert aus (6.2) ist

ein Integral basierend auf der log-normalen Wahrscheinlichkeitsdichte von  $S(T)$ . Dieses Integral kann ausgewertet werden. Die Lösung ist die Black-Scholes Formel zur Berechnung einer Call-Option (Becker, 1994, [Bec94]; Glasserman, 2003, [Gla03]).

### 6.1.2 Monte Carlo Simulation des Aktienpreises

Da der Erwartungswert  $\mathbb{E} [e^{-rT}(S(T) - K)^+]$  mithilfe der Black-Scholes Formel algebraisch berechnet werden kann, ist eine Monte Carlo Simulation zur Annäherung dieses Wertes eigentlich nicht notwendig. Zudem sind Monte Carlo Verfahren aufgrund ihrer eher langsamen Konvergenz (Abschnitt 3.2) keine konkurrenzfähigen Methoden zur Auswertung eindimensionaler Integrale. Dennoch verdeutlicht eine Anwendung von Monte Carlo in diesem Beispiel das Vorgehen bei komplexeren finanzmathematischen Problemstellungen. Aus der Gleichung (6.5) folgt, dass Stichproben des Aktienpreises zum Ausübungszeitpunkt  $S(T)$  durch Stichproben einer Standardnormalverteilung ersetzt werden können. Seien  $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$  unabhängige Zufallsvariablen einer Standardnormalverteilung. Mithilfe der Werte  $Z_i$  kann der Erwartungswert  $\mathbb{E} [e^{-rT}(S(T) - K)^+]$  angenähert werden. Hierfür wird für jedes  $Z_i$  der Term

$$S_i(T) = S(0)\exp\left(\left[r - \frac{1}{2}\sigma^2\right]T + \sigma\sqrt{T}Z_i\right) \quad (6.6)$$

ausgewertet. Anschliessend kann mithilfe der nachfolgenden Formel und dem erhaltenen Aktienpreis zum Ausübungszeitpunkt  $S_i(T)$  der Payoff der  $i$ -ten Replikation  $P_i$  berechnet werden:

$$P_i = e^{-rT}(S_i(T) - K)^+. \quad (6.7)$$

Der Monte Carlo Schätzwert für den Gegenwartswert der Call-Option  $\hat{P}_n$  ist der Mittelwert der Payoffs  $P_i$ :

$$\hat{P}_n = \frac{P_1 + P_2 + \dots + P_n}{n}. \quad (6.8)$$

Für jedes  $n \geq 1$  ist der Schätzer  $\hat{P}_n$  ungezinkt (Bias) und konsistent (mittlerer quadratischer Fehler). Der Payoff einer europäischen Call-Option wird durch den Aktienpreis zum Ausübungszeitpunkt  $S(T)$  bestimmt und hängt nicht von der Entwicklung des Aktienwertes  $S(t)$  während der Laufzeit ab. Dies ermöglicht einen direkten Sprung von  $t = 0$  bis  $t = T$  bei der Annäherung des Erwartungswertes  $\mathbb{E} [e^{-rT}(S(T) - K)^+]$ . Jeder mögliche Stichprobenpfad besteht nur aus dem Startwert des Aktienpreises  $S(0)$  und seinem Endwert  $S(T)$  (Glasserman, 2003, [Gla03]). Ein direkter Sprung vom Anfang zum Ende des Pfades ist allerdings nicht immer möglich. Wenn beispielsweise der Payoff einer asiatischen Call-Option ausgewertet werden soll, muss das Zeitintervall  $[0, T]$  in kleinere Teilintervalle zerlegt werden, da der Payoff einer asiatischen Option abhängig ist vom Mittelwert des der Option zugrundeliegenden Aktienpreises während der Optionslaufzeit (Hull, 2011, [Hul11]). Die Entwicklung des Aktienpreises  $S(t)$  im Intervall  $[0, T]$  beeinflusst also den Payoff der Call-Option und muss in der Monte Carlo Simulation berücksichtigt werden (Glasserman, 2003, [Gla03]).

### 6.1.3 Varianzreduktion durch Kontrollvariante

Bei Monte Carlo Simulationen zur Derivatpreisannäherung bieten die betroffenen Basiswerte (im betrachteten Beispiel der Aktienpreis) oft eine Möglichkeit zur Varianzreduktion des Monte Carlo Schätzwertes mittels Kontrollvariante (siehe Abschnitt 5.3). Der Einsatz von Kontrollvariante bei der Auswertung einer europäischen Call-Option zum Kauf einer Aktie beruht auf der mathematischen Tatsache, dass Basiswertpreise unter gewissen finanzmathematischen Bedingungen Martingale sind. Martingale sind stochastische Prozesse ohne Drift, das heisst der Wert der betroffenen Zufallsvariable zu Beginn des Prozesses entspricht ihrem Erwartungswert am Ende (Hull, 2011, [Hul11]). Dadurch kann der Monte Carlo Schätzer für den Payoff der Call-Option  $\hat{P}_n$  kontrolliert werden durch den Aktienpreis  $S(t)$ , ein Martingal. Es gilt:

$$\underbrace{\mathbb{E} [e^{-rT} S(T)]}_{\text{Enderwartungswert}} = \underbrace{S(0)}_{\text{Startwert}}. \quad (6.9)$$

Die Zinsrate  $r$  ist konstant. Der Payoff der  $i$ -ten Replikation ist gemäss (6.7) gegeben durch  $P_i = e^{-rT} (S_i(T) - K)^+$ . Da neben  $P_i$  für jede Replikation auch  $S_i(T)$  berechnet wird, ist der resultierende Kontrollvariante Schätzwert (Gleichung (5.10))

$$\hat{P}_n(b) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (P_i - b [S_i(T) - e^{rT} S(0)]). \quad (6.10)$$

Wie in Abschnitt 5.3 beschrieben, muss der Parameter  $b$  durch  $\hat{b}_n$  mithilfe der Gleichung (5.16) empirisch angenähert werden (Glasserman, 2003, [Gla03]). Die Korrelation zwischen  $P$  und  $S(T)$  und somit die Effizienz der Varianzreduktion hängt vom Ausübungspreis der Option  $K$  ab. Bei  $K = 0$  würde eine perfekte Korrelation vorliegen, ist  $K$  hingegen sehr gross, nimmt der Betrag des Korrelationskoeffizienten ab (Glasserman, 2003, [Gla03]).

### 6.1.4 Durchführung der Simulationen

In diesem Abschnitt werden die Simulationen der in 6.1.2 und 6.1.3 besprochenen Monte Carlo Verfahren durchgeführt und diskutiert. Seien der Aktienpreis zu Beginn  $S(0) = 50$ , der Ausübungspreis  $K = 45$ , die Volatilität  $\sigma = 0,3$ , die Zinsrate  $r = 0,05$  und die Laufzeit  $T = 0,25$  gegeben. Dies sind realistische Werte (Grössenordnung Volatilität und Zinsrate) wie sie beispielsweise in der Quelle [Gla03] vorkommen. Die erhaltenen Werte der Monte Carlo Simulation zur Annäherung des Optionspayoffs ohne und mit Varianzreduktion sind in den Tabellen 4 und 5 zusammengefasst. Die Berechnungen wurden mit *Excel* durchgeführt. Da die Schätzwerte auf der Ziehung von Zufallswerten basieren, handelt es sich bei den Tabellen um Beispieltabellen. Bei beiden Simulationen ist die Anzahl der Replikationen ( $n$ ), das heisst die Anzahl der kalkulierten Aktienpreise zum Ausübungszeitpunkt  $S_i(T)$ , identisch. Betrachtet man die Tabellen 4 und

5 fällt auf, dass die empirische Standardabweichung des Schätzwertes  $\hat{P}_n(\hat{b}_n)$  durch die Varianzreduktion verringert werden kann. Der Schätzer  $\hat{P}_n(\hat{b}_n)$  streut weniger stark als  $\hat{P}_n$ . Der Kontrollvariante Koeffizient der Tabelle 5 wird empirisch angenähert durch

$$\hat{b}_n = \frac{\sum_{i=1}^n (S_i(T) - e^{rT}S(0)) (P_i - \hat{P}_n)}{\sum_{i=1}^n (S_i(T) - e^{rT}S(0))^2}. \tag{6.11}$$

Diese Formel folgt aus der Gleichung (5.16) (Glasserman, 2003, [Gla03]).

$n$ (Anzahl Replikationen)	$\hat{P}_n$ (Schätzer des Optionspayoffs)	$s_{\hat{P}_n}$ (empirische Standardabweichung des Schätzers)
20'000	6,432876395	0,013484498

Tabelle 4: Werte der Simulation zur Annäherung des Optionspayoffs ohne Varianzreduktion.

$n$ (Anzahl Replikationen)	$\hat{b}_n$ (empirischer Kontrollvariante Koeffizient)	$\hat{P}_n(\hat{b}_n)$ (Kontrollvariante Schätzer des Optionspayoffs)	$s_{\hat{P}_n(\hat{b}_n)}$ (empirische Standardabweichung des Kontrollvariante Schätzers)
20'000	0,801420978	6,418284462	0,001252767

Tabelle 5: Werte der Simulation zur Annäherung des Optionspayoffs mit Varianzreduktion.

### Interpretation der Resultate

Die Resultate der durchgeführten Monte Carlo Simulationen werden in diesem Abschnitt aus Sicht der Finanzwelt kurz interpretiert. Sowohl ohne als auch mit Varianzreduktion beträgt der durchschnittliche Payoff der betrachteten europäischen Call-Option in etwa 6,4 (Schätzwerte  $\hat{P}_n$  und  $\hat{P}_n(\hat{b}_n)$ ). Einen Gewinn erzielt der Inhaber der Option, wenn für den Payoff  $P$  und die Optionsprämie  $p$  gilt:

$$P - p > 0. \tag{6.12}$$

Aus den Simulationsresultaten folgt, dass Optionen geeignete Finanzinstrumente zur Risikominimierung sind. Call- und Put-Optionen ermöglichen dem Optionsinhaber eine Verlustminimierung, da dieser zum Ausübungszeitpunkt das Recht hat, die festgelegte Menge des Basiswertes zu kaufen beziehungsweise zu verkaufen oder die Option auslaufen zu lassen (europäische Option) (Hull, 2011, [Hul11]).

# Kapitel 7

## Schlussfolgerung

Der erste Teil der Schlussfolgerung enthält eine Zusammenfassung der wichtigsten Erkenntnisse der vorliegenden Arbeit. Anschliessend werden in Form eines Ausblickes Möglichkeiten zur Weiterführung der Arbeit beleuchtet.

### 7.1 Erkenntnisse

Die praxisorientierte Relevanz der Numerik als Teilgebiet der modernen Mathematik wird immer grösser. Das Ziel numerischer Verfahren ist die Kalkulation effizienter Approximationen und Präzisionsabschätzungen für gesuchte Lösungen. Monte Carlo ist eine Methode der Numerik, welche heutzutage oft zum Einsatz kommt.

Der erste Punkt, auf den man trifft, wenn man sich näher mit den Monte Carlo Methoden befasst, ist die Vielseitigkeit und Flexibilität der Verfahren. Der Monte Carlo Grundgedanke, laut dem empirische Mittelwerte einer Stichprobe genutzt werden können, um Mittelwerte (Erwartungswerte) einer Untersuchungsgesamtheit anzunähern, ermöglicht eine Anwendung der Methoden auf viele verschiedene Problemstellungen in unterschiedlichen Anwendungsbereichen. Die hohe Flexibilität macht die Monte Carlo Verfahren sowohl interessant als auch vielseitig einsetzbar. Obwohl Monte Carlo auf Stichprobenverfahren basiert, müssen die Probleme, auf welche die Methoden angewandt werden sollen, keinen Wahrscheinlichkeitscharakter aufweisen. So kann beispielsweise die Fläche eines Landes (Abschnitt 2.3.1) mithilfe zufällig geworfener Dartpfeile angenähert werden, ohne dass die Flächenberechnung selber wahrscheinlichkeitsbasiert ist.

Die Monte Carlo Konvergenzrate, welche proportional zu  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  ist, wenn  $n$  die Anzahl Replikationen beschreibt, ist eine zentrale Eigenschaft der Verfahren. Die Methoden konvergieren zwar relativ langsam, sind aber sehr robust, da die Konvergenzgeschwindigkeit nicht von der Dimension  $d$  des angenäherten Problems abhängt. Die charakteristische Monte Carlo Konvergenzrate macht die Verfahren konkurrenzfähig gegenüber anderen numerischen Methoden bei hochdimensionalen Problemstellungen.

Durch Varianzreduzierungstechniken kann die Konvergenz und somit auch die Effizienz und Präzision von Monte Carlo verbessert werden. Die bestmögliche Effizienzoptimierung wird erzielt, wenn spezifische Eigenschaften einer Problemstellung berücksichtigt werden. Die Varianzreduzierungstechnik Importance Sampling basiert auf der Veränderung der Wahrscheinlichkeitsverteilung, die einem Problem zugrunde liegt. Eine Wahrscheinlichkeitsanpassung sorgt dafür, dass signifikanten Ereignissen des Ergebnisraumes eine höhere Gewichtung zugeordnet wird. Bei einer Varianzreduktion mittels Kontrollvariaten werden Informationen über die Abweichung

von Schätzwerten bekannter Grössen zur Fehlerreduktion bei Schätzern unbekannter Grössen genutzt. Es gilt: je stärker die Korrelation zwischen kontrolliertem Wert und Kontrollwert, desto geringer die Streuung des Kontrollvariante Schätzwertes.

Die Finanzmathematik ist ein interdisziplinärer Fachbereich, der sich mit der mathematischen Modellierung von Problemen der Finanzwelt auseinandersetzt. Die finanzmathematischen Modelle beruhen auf Differentialgleichungen, das heisst auf Gleichungen, die den Zusammenhang zwischen einer Funktion  $f$  und ihren Ableitungen  $f'$ ,  $f''$ , ... beschreiben. Das Black-Scholes Modell beispielsweise ist eines der berühmtesten Modelle zur Darstellung der Dynamik eines Aktienpreises. Optionen, Finanzprodukte aus der Kategorie der Derivate, ermöglichen ihrem Inhaber eine Risikominimierung und können durch Monte Carlo Simulationen bewertet werden. Man unterscheidet die Standardoptionen (europäische und amerikanische Option) und die exotischen Optionen. Der Erwerb einer Option gibt dem Inhaber das Recht, eine bestimmte Menge eines Basiswertes innerhalb einer Zeitspanne oder an einem gewissen Zeitpunkt zu einem festgelegten Preis zu kaufen (Call-Option) oder zu verkaufen (Put-Option).

## 7.2 Ausblick

Aufgrund der Vielfalt an Anwendungsbereichen und der Flexibilität der Monte Carlo Methoden gäbe es genügend Themenbereiche, die für den Ausbau der vorliegenden Arbeit genutzt werden könnten. In diesem Abschnitt werden einige Möglichkeiten näher betrachtet.

Beim Weiterführen dieser Arbeit könnte das Generieren von Zufallszahlen und Pseudozufallszahlen, welche den meisten Stichproben der Monte Carlo Verfahren zugrunde liegen, untersucht werden. Ausserdem wäre eine nähere Betrachtung der verwendeten Stichprobenverfahren möglich. Im Bereich der Varianzreduzierungstechniken könnten zusätzliche Methoden, beispielsweise Antithetic Variates, Stratified Sampling oder Latin Hypercube Sampling, diskutiert werden. Zusätzliche Wege, die Arbeit auszubauen, wären die Quasi-Monte Carlo Methoden und die Markov-Chain-Monte Carlo Verfahren. Hierbei handelt es sich um Monte Carlo ähnliche Techniken der numerischen Mathematik. Im Bereich der Finanzmathematik könnten andere Optionsarten oder Finanzprodukte betrachtet werden. Des Weiteren wäre ein Ausbau in Richtung des finanzmathematischen Risikomanagements mittels Monte Carlo Simulationen vorstellbar. Abschliessend sollte erwähnt werden, dass man sich natürlich auch mit einem anderen Anwendungsbereich der Monte Carlo Methoden, beispielsweise mit der Physik, der Biologie oder dem Transportwesen, auseinandersetzen könnte.

# Anhang A

## Historische Entwicklung

Dieser Teil des Anhangs stellt eine Übersicht des geschichtlichen Hintergrunds der Monte Carlo Methoden dar. Verschiedene historische Beispiele und Anwendungen werden aufgezeigt und die Entstehung des Namens *Monte Carlo* wird speziell hervorgehoben.

### A.1 Bernoulli und das Gesetz der grossen Zahlen

Der Ursprung der Monte Carlo Methoden liegt im 17. Jahrhundert, genauer gesagt bei der niederländischen Händlerfamilie Bernoulli, welche aus religiösen und politischen Gründen ihre Heimat verliess und in die Schweiz zog. Diese Familie brachte mehrere grosse Mathematiker hervor, darunter Jakob und Johann Bernoulli. Jakob studierte Philosophie und Theologie, liebte aber die Mathematik und wurde 1687 in Basel zum Mathematikprofessor ernannt. Er formulierte erstmals das Gesetz der grossen Zahlen, auf welchem die Monte Carlo Simulationen unter anderem beruhen, und veröffentlichte es in seinem posthumen Werk „Ars Conjectandi“, auf Deutsch „Die Kunst des Vermutens“ (Dunn und Shultis, 2011, [DS11]).

Im Anhang B.2 wird das Gesetz der grossen Zahlen und sein Zusammenhang zu den Monte Carlo Methoden erläutert.

### A.2 Comte de Buffon, die Nadeln und $\pi$

Im Jahre 1777 führte Georg Louis-Leclerc, Comte de Buffon, erstmals sein berühmtes Nadelexperiment durch. Dabei handelt es sich um einen Versuch, bei dem er Nadeln der Länge  $L$  auf eine Fläche mit parallelen Linien im Abstand  $A \geq L$  zufällig fallen liess. Buffon zeigte, dass die Wahrscheinlichkeit  $P_{\text{schnitt}}$ , mit der eine Nadel eine der Linien schneidet (überlagert oder kreuzt), ausgedrückt werden kann durch

$$P_{\text{schnitt}} = \frac{2L}{\pi A}. \quad (\text{A.1})$$

Ein paar Jahre später kam Pierre-Simon de Laplace auf die Idee mit der von Buffon gefundenen Formel  $\pi$  anzunähern. Sein Vorgehen würde man heute als Monte Carlo Methode bezeichnen. Durch die Durchführung des Versuches von Buffon bestimmte de Laplace näherungsweise  $P_{\text{schnitt}}$ , indem er die Anzahl der Nadeln, welche eine Linie schnitten ( $n_s$ ), durch die Gesamtanzahl der geworfenen Nadeln teilte ( $n_{\text{tot}}$ ). Zusätzlich waren  $L$  und  $A$  bekannt und de Laplace erhielt durch Umstellen von (A.1) eine Annäherung für  $\pi$  (Dunn und Shultis, 2011, [DS11]):

$$\pi = \frac{2L}{P_{\text{schnitt}}A} \approx \frac{2L}{\frac{n_s}{n_{\text{tot}}}A}. \quad (\text{A.2})$$

Im Abschnitt 4.2 wird auf diese Annäherung von  $\pi$  und ihren Monte Carlo Charakter näher eingegangen. Die Herleitung der von Buffon gefundenen Formel wird erläutert und mehrere Computersimulationen werden durchgeführt.

### A.3 Fermis Experimente

Für seine Untersuchungen im Bereich der Geschwindigkeitsabnahme von Neutronen nutzte der italienische Physiker Enrico Fermi in den 1930-er Jahren „statistical sampling“-Methoden. Dies sind Verfahren, bei denen durch Stichprobenbeobachtung Aussagen über eine Untersuchungsgesamtheit ermöglicht werden (Metropolis, 1987, [Met87]). Laut seines Schülers und Mitarbeiters Emilio Segrè verblüffte Fermi seine Arbeitskollegen oft durch ziemlich präzise Vorhersagen von experimentellen Resultaten. Fermi erzählte ihnen jedoch nie, wie er an diese Prognosedaten kam. Die Tatsache, dass Fermi keinen Computer als Generator für die notwendigen Zufallszahlen zur Verfügung hatte und Berechnungen auf mechanischen Geräten oder im Kopf durchführen musste, macht seine Resultate noch bemerkenswerter. Fermi veröffentlichte seine Berechnungen nie und gerät daher im Zusammenhang mit Monte Carlo Methoden oft in Vergessenheit (Metropolis, 1987, [Met87]).

### A.4 Los Alamos, die Atombombe und eine prägnante Namensgebung

Bis ins Jahr 1945 waren die Verfahren, welche man heute als Monte Carlo Methoden bezeichnen würde, nur unter dem Namen „statistical sampling“ bekannt. Dieses Vorgehen wurde auch bei den Berechnungen zum Bau der Atombombe in Los Alamos während des Zweiten Weltkriegs angewandt und weiterentwickelt. Die Wissenschaftler Von Neumann, Ulam und Metropolis führten die Berechnungen damals mit dem ersten elektronischen Computer durch, welcher an der University of Pennsylvania in Philadelphia entwickelt worden war. Mithilfe des *ENIACs* (Electronic Numerical Integrator and Computer), so hiess der Computer (Abbildung 13), konnten die Wissenschaftler komplizierte Kalkulationen vergleichsweise präzise und schnell lösen. Durch die Konfrontation mit dieser immensen Rechenleistung kam der Mathematiker Stan Ulam auf die Idee der Anwendung von „statistical sampling“ zur Modellierung der Neutronenmultiplikation. Nicholas Metropolis schlug vor, das angewandte Verfahren *Monte Carlo* zu nennen, denn Ulam war fasziniert von Wahrscheinlichkeitsspielen und hatte einen Onkel, der viel Zeit bei Glücksspielen in Monte-Carlo, einem Stadtbezirk Monacos mit gleichnamiger Spielbank, verbrachte (Metropolis, 1987, [Met87]).

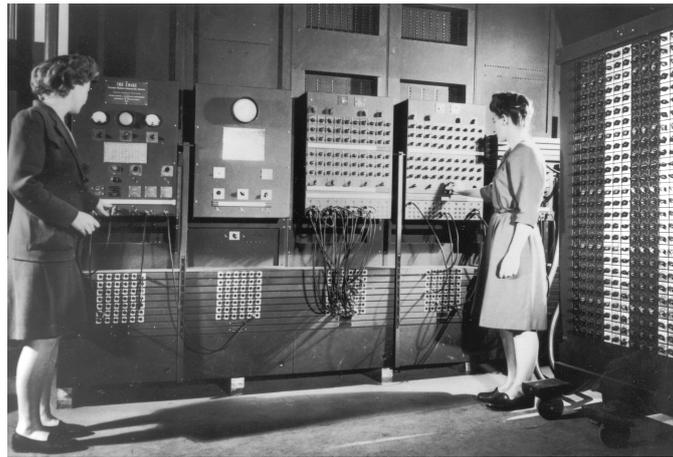


Abbildung 13: Der ENIAC.

Obwohl der Name *Monte Carlo* auf den ersten Blick banal erscheint, steckt mehr als nur der Hang von Ulams Onkel zu Glücksspielen dahinter. Casinos sichern sich nämlich mit ein wenig „Bias“ in den Regeln ihrer Spiele ab, sodass sie nach grosser Rundenzahl im Durchschnitt gewinnen. „Bias“, auf Deutsch systematische Abweichung (siehe Abschnitt 3.3.2), heisst in diesem Fall, dass der Erwartungswert des Gewinns für die Casinobesucher kleiner als null ist. Die Spiele sind also gezinkt oder „biased“ (Baum u. a., 2013, [BBB<sup>+</sup>13]). Damit der Reiz für den Spieler dennoch erhalten bleibt, hat auch er die Chance auf einen Glücksspielgewinn. Monte Carlo Simulationen verhalten sich ähnlich: Jede einzelne Durchführung kann sowohl in einem Volltreffer (Gewinn) als auch in einem Ausreisser (Verlust) enden und trotzdem ist der Anwender der Simulation versichert, dass bei einer grossen Anzahl an Probeläufen der Prozess zum korrekten Resultat konvergiert (Dunn und Shultis, 2011, [DS11]).

## A.5 Monte Carlo heute

In den letzten fünfzig Jahren wurden sehr viele Bücher und Artikel über die Theorie und Anwendung von Monte Carlo Simulationen und Methoden verfasst. Unter anderem wurden dadurch Themen wie numerische Integration, Varianzreduzierungstechniken und Stichprobenvorgehen behandelt. Die ersten grossen Anwendungsbereiche waren Strahlungstransport und Neutronenbewegung (Metropolis, 1987, [Met87]). Heute wird Monte Carlo beispielsweise bei Physikproblemen, Wettermodellen, beim Transportwesen oder in der Finanzmathematik genutzt (Dunn und Shultis, 2011, [DS11]).

# Anhang B

## Grundlagen zur Präzision und Effizienz

### B.1 Lage- und Streuungsparameter

Zu Beginn dieses Abschnittes werden die statistischen Masszahlen einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion definiert. Im zweiten Teil wird erklärt, wie diese Masszahlen empirisch angenähert werden können, falls sie nicht gegeben sind.

#### B.1.1 Mittelwert, Varianz und Standardabweichung der Untersuchungsgesamtheit

Zwei wichtige Grössen jeder Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (WDF)  $f(x)$  sind der Mittelwert  $\mu$  und die Varianz  $\sigma^2$ . Eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der stochastischen Variable  $x$  hat folgende Eigenschaften: Die Funktion ist definiert auf dem Intervall  $[a, b]$  und nimmt auf diesem keine negativen Werte an, kann aber null sein für manche  $x \in [a, b]$ . Bei Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen entspricht die Fläche zwischen der Funktion und der  $x$ -Achse von einem Punkt  $p$  zu einem Punkt  $q$  der Wahrscheinlichkeit, mit der die Zufallsvariable  $x$  einen Wert zwischen  $p$  und  $q$  annimmt. Hierbei sind  $p, q \in [a, b]$  und  $p < q$  (Dunn und Shultis, 2011, [DS11]). Der Mittelwert  $\mu_x$  der WDF ist der Erwartungswert  $\mathbb{E}[x]$  und ist definiert als

$$\mu_x = \int_a^b x f(x) dx. \quad (\text{B.1})$$

Die Varianz  $\sigma_x^2$  beschreibt die Streuung der Variable  $x$  um den Mittelwert  $\mu_x$ . Sie ist definiert als

$$\sigma_x^2 = \int_a^b [x - \mu_x]^2 f(x) dx. \quad (\text{B.2})$$

Die Quadratwurzel der Varianz ist die Standardabweichung  $\sigma_x$ :

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}. \quad (\text{B.3})$$

Nun wird eine Funktion  $g(x)$  betrachtet, die auf der WDF  $f(x)$  basiert, bei der  $x$  also eine stochastische Variable ist, welche durch die WDF  $f(x)$  beschrieben wird. Daher ist auch die Funktion  $g(x)$  eine Zufallsvariable. Der Erwartungs- oder Mittelwert von  $g(x)$  ist in diesem Fall

$$\mu_g = \int_a^b g(x) f(x) dx. \quad (\text{B.4})$$

Die Varianz der Zufallsvariable  $g(x)$  ist gemäss (B.2)

$$\sigma_g^2 = \int_a^b [g(x) - \mu_g]^2 f(x) dx \quad (\text{B.5})$$

(Dunn und Shultis, 2011, [DS11]).

### B.1.2 Empirischer Mittelwert und empirische Varianz

Der empirische Mittelwert  $\bar{u}$  einer Funktion  $u$  der stochastischen Variable  $x$  ist ein Schätzwert für den Mittelwert  $\mu_u$  der Untersuchungsgesamtheit. Dieser Wert, den man durch eine endliche Anzahl Stichproben ( $n$ ) erhält, ist definiert als

$$\bar{u} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u(x_i). \quad (\text{B.6})$$

Durch Betrachtung der Gleichung (B.2) fällt auf, dass die Varianz  $\sigma^2$  vom Mittelwert  $\mu$  abhängig ist. In einer Problemstellung, in der  $\sigma^2$  nicht bekannt ist, ist oft auch  $\mu$  nicht gegeben. Ein Schätzwert für die Varianz kann daher meist nicht direkt durch die folgende Formel berechnet werden:

$$\sigma_u^2 \cong \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [u(x_i) - \mu_u]^2. \quad (\text{B.7})$$

Allerdings kann der Mittelwert, falls er nicht bekannt ist, mittels (B.6) approximiert werden. Dieser Schätzwert von  $\sigma_u^2$  mit  $\mu_u$  angenähert durch  $\bar{u}$  wird empirische Varianz genannt und mit  $s_u^2$  bezeichnet. Beim Ersetzen von  $\mu_u$  durch  $\bar{u}$  geht ein „Grad an Freiheit“ verloren. Daher wird bei der Berechnung der empirischen Varianz  $n$  durch  $n - 1$  ersetzt:

$$s_u^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [u(x_i) - \bar{u}]^2. \quad (\text{B.8})$$

Die Anzahl der Freiheitsgrade  $\nu$  ist ein oft benutzter Parameter in der Statistik (Schätztheorie) (Dunn und Shultis, 2011, [DS11]). In Anwendungsfällen mit  $n$  unabhängigen Stichproben wie im betrachteten Beispiel ist die Anzahl der Freiheitsgrade die Gesamtzahl der unabhängigen Variablen minus die Zahl der Einschränkungen  $c$ :

$$\nu = n - c. \quad (\text{B.9})$$

Die ursprünglichen  $n$  Stichproben sind uneingeschränkt (unabhängig), dadurch ist in der Berechnung des empirischen Mittelwerts  $c = 0$  und somit  $\nu = n$ , was die Verwendung des Bruchs  $\frac{1}{n}$  erklärt. Bei der Kalkulation der empirischen Varianz hingegen ist einer der Werte von  $[u(x_i) - \bar{u}]^2$  eingeschränkt ( $c = 1$ ), weil  $\bar{u}$  genutzt wird, um  $\mu_u$  zu approximieren. Die Differenzen in  $n - 1$  Fällen sind unabhängig voneinander, es handelt sich um stochastische Stichproben, von denen eine Konstante ( $\bar{u}$ ) subtrahiert wird. Für die Berechnung des empirischen Mittelwerts wird ein Freiheitsgrad eingeschränkt, daher  $c = 1$  und  $\nu = n - 1$ .

Analog zur Standardabweichung der Untersuchungsgesamtheit ist die empirische Standardabweichung die Quadratwurzel der empirischen Varianz:

$$s_u = \sqrt{s_u^2} \quad (\text{B.10})$$

(Dunn und Shultis, 2011, [DS11]).

## B.2 Das Gesetz der grossen Zahlen

Den Monte Carlo Verfahren liegt eine doppelte mathematische Basis zugrunde: das Gesetz der grossen Zahlen (GGZ) und der zentrale Grenzwertsatz (ZGS). Auf diese beiden mathematischen Sätze wird in den zwei folgenden Abschnitten eingegangen.

Das Gesetz der grossen Zahlen kann unterteilt werden in eine schwache und eine starke Form. Für die Anwendung des Gesetzes auf Monte Carlo Methoden ist diese Unterscheidung unwichtig, da die Grundaussage bei beiden Formen dieselbe ist: Ein empirischer Mittelwert  $\bar{u}_n$  nähert sich dem Mittelwert  $\mu_u$  der Grundgesamtheit, falls  $n$  gegen unendlich strebt. Oder mathematisch ausgedrückt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{u}_n = \mu_u. \quad (\text{B.11})$$

Der Unterschied zwischen den beiden Gesetzen der grossen Zahlen liegt lediglich in der Art, in welcher die Konvergenz zum tatsächlichen Wert verläuft (Dunn und Shultis, 2011, [DS11]).

Nun zur Betrachtung eines bestimmten Integrals, dessen Wert durch ein Monte Carlo Verfahren approximiert werden soll. Wie im Abschnitt 2.2 erläutert, kann

$$\mu = \int_0^1 v(x)f(x)dx \quad (\text{B.12})$$

angenähert werden durch

$$\bar{v} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v(x_i). \quad (\text{B.13})$$

Dies ist ein allgemeinerer Fall als in 2.2 behandelt, da die  $n$  Punkte  $x_i$  nicht unabhängig und gleichverteilt im Intervall  $[0, 1]$  liegen, sondern mithilfe der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $f(x)$  generiert werden. Unter der Bedingung, dass der Mittelwert existiert und die Varianz beschränkt ist ( $\sigma^2 < \infty$ ), gilt nach dem Gesetz der grossen Zahlen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{v} = \mu. \quad (\text{B.14})$$

Eine zweite mögliche Schreibweise wäre

$$\frac{1}{n}(v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu. \quad (\text{B.15})$$

Das Gesetz der grossen Zahlen versichert dem Durchführenden, dass das Resultat des Monte Carlo Verfahrens bei grösser werdendem  $n$  zum tatsächlichen Wert konvergiert, sagt ihm aber nicht, wie gross  $n$  hierfür sein muss. Die Antwort auf diese Frage liefert die zweite mathematische Basis von Monte Carlo: der zentrale Grenzwertsatz (Dunn und Shultis, 2011, [DS11]).

## B.3 Der zentrale Grenzwertsatz

Eine wichtige Eigenschaft von Monte Carlo ist die Tatsache, dass sich durch die Verfahren nicht nur ein Schätzwert für eine gegebene Problemstellung berechnen lässt (durch das Gesetz der

grossen Zahlen), sondern auch eine Abschätzung der Unsicherheit dieses Schätzwertes möglich ist (durch den zentralen Grenzwertsatz). Dadurch hat man am Ende der Monte Carlo Simulation sowohl eine Approximation des tatsächlichen Resultats als auch eine Einschätzung der Abweichung der erhaltenen Approximation vom eigentlichen Wert.

Nach dem zentralen Grenzwertsatz gilt für einen empirischen Mittelwert  $\bar{w}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Prob} \left\{ \alpha \leq \frac{\bar{w} - \mu_w}{\sigma_w / \sqrt{n}} \leq \beta \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{u^2}{2}} du. \tag{B.16}$$

Hierbei ist  $\mu_w$  der Mittelwert der Grundgesamtheit und  $\sigma_w$  die Standardabweichung. Durch Umschreiben erhält man ausserdem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Prob} \left\{ \left| \frac{\bar{w} - \mu_w}{\sigma_w / \sqrt{n}} \right| \leq \lambda \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-\frac{u^2}{2}} du. \tag{B.17}$$

Der zentrale Grenzwertsatz legt dar, dass wenn  $n$  gegen unendlich strebt, die Verteilung von  $\frac{\bar{w} - \mu_w}{\sigma_w / \sqrt{n}}$  einer Normalverteilung entspricht: Der empirische Mittelwert  $\bar{w}$  ist normalverteilt mit Mittelwert  $\mu_w$  und Standardabweichung  $\frac{\sigma_w}{\sqrt{n}}$ . Die Normalverteilung ist eine häufig vorkommende Wahrscheinlichkeitsverteilung, welche auf der Gauss'schen Glockenfunktion (rechter Teil von (B.16)) basiert (Baum u. a., 2013, [BBB<sup>+</sup>13]).

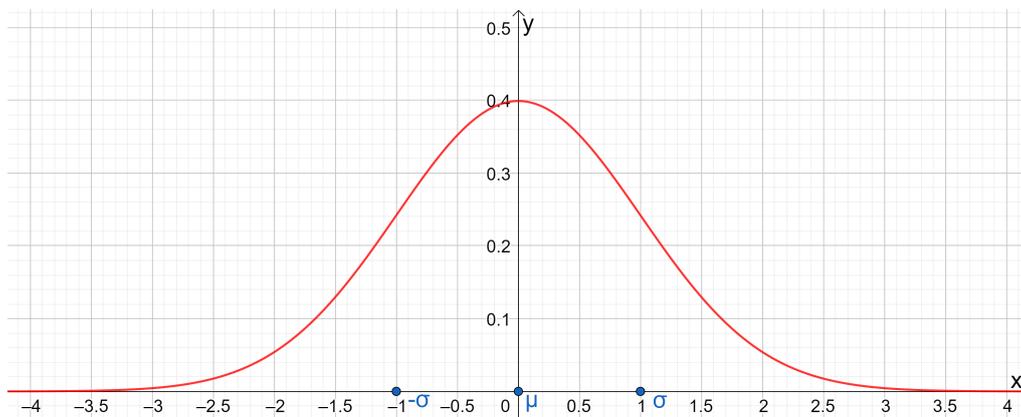


Abbildung 14: Die Gauss'sche Glockenfunktion.

Beim zentralen Grenzwertsatz fehlen jegliche Angaben zur Verteilungsfunktion, welche den  $n$  Stichproben der stochastischen Variablen  $w$  zugrunde liegt. Das heisst, die Art der Verteilung ist nicht entscheidend. Solange die Varianz  $\sigma_w^2$  endlich ist, ist der empirische Mittelwert  $\bar{w}$  asymptotisch ( $n$  strebt gegen unendlich) normalverteilt. Wenn  $\lambda \rightarrow 0$ , nähert sich der rechte Teil der Gleichung (B.17) null. Der empirische Mittelwert  $\bar{w}$  konvergiert zum tatsächlichen Mittelwert  $\mu_w$  für  $n \rightarrow \infty$ . Dieses Resultat entspricht dem Gesetz der grossen Zahlen (Abschnitt B.2). Mithilfe des zentralen Grenzwertsatzes kann die Unsicherheit eines Monte Carlo Verfahrens abgeschätzt werden (siehe Abschnitt 3.2) (Dunn und Shultis, 2011, [DS11]).

# Anhang C

## Programme zur Annäherung von $\pi$

### C.1 Kreissektor

In diesem Abschnitt wird der Code des *processing* Programmes aus 4.1 präsentiert.

```

double anzahl=100000; //Gesamtzahl der Probeläufe
float x,y;
double innerhalb; //Probeläufe innerhalb des Viertelkreises
void setup(){
  fill(50);
  background(0);
  strokeWeight(0.001);
  stroke(255);
  size(800,800);
  translate(0,800); //Verschiebung Ursprung
  scale(800); //Skalierung Fenster
  rotate(PI*-0.5);
  ellipseMode(RADIUS);
  ellipse(0,0,1,1); //Zeichnen des Viertelkreises
  strokeWeight(0.005);

  for(int i=0;i<anzahl;i++){
    x=random(0,1); //Zufallszahl zwischen 0 und 1
    y=random(0,1);

    println("[",x,y,"]");
    if(sqrt(pow(x,2)+pow(y,2))<1){ //Test: Generierter Punkt im Viertelkreis?
      innerhalb++;
      stroke(0,255,0); //grün
    }else{
      stroke(255,0,0); //rot
    }

    point(x,y); //Zeichnen des Punktes
  }
  println("Generierte Punkte:",anzahl); //Ausgabe Konsole
  println("Punkte innerhalb des Viertelkreises:",innerhalb);
  println("Entspricht: ",(innerhalb/anzahl)*100,"%"); //Berechnung des Schätzwertes für PI
  println("Pi-Annäherung: ",(innerhalb/anzahl)*4);
  println("Pi exakt: ",PI);

  saveFrame("pi_###.jpg"); //Speichern des Fensters als Bild
}

```

## C.2 Buffons Nadelproblem

In diesem Abschnitt wird der Code des *processing* Programmes aus 4.2 präsentiert.

```

double anzahl=100000; //Gesamtzahl der Probeläufe
float x,y;
float laenge=0.5; //Länge der Nadel
float abstand=1; //Abstand der Linien
float winkel; //Winkel der Nadel
double schneiden; //Nadeln, die eine der Linien schneiden
void setup(){
  fill(50);
  background(0);
  size(800,800);
  translate(0,800);
  scale(800);
  rotate(PI*-0.5); //Verschiebung, Skalierung und Rotation
  strokeWeight(0.005); //des Koordinatensystems

  for(int i=0;i<anzahl;i++){
    x=random(0,abstand); //Zufallszahl zwischen 0 und Abstand
    y=random(0,abstand); //x- und y-Werte in processing vertauscht!
    winkel=random(0,PI);

    println("[",y,winkel,"]");
    if((y+laenge*cos(winkel)<0)||(y+laenge*cos(winkel)>abstand)){//Schnitttest
      stroke(0,255,0); //grün
      schneiden++;
    }else{
      stroke(255,0,0); //rot
    }

    line(x,y,x+laenge*sin(winkel),y+laenge*cos(winkel)); //Zeichnen der Nadel
  }
  println("Generierte Nadeln:",anzahl); //Ausgabe Konsole
  println("Nadeln, die die Linien schneiden:",schneiden);
  println("Entspricht:",(schneiden/anzahl)*100,"%");
  println("Pi-Annäherung:",(2*laenge)/((schneiden/anzahl)*abstand)); //Berechnung des Schätzwertes für PI
  println("Pi exakt:",PI);

  saveFrame("pibuffon_###.jpg"); //Speichern des Fensters als Bild
}

```

# Anhang D

## Grundlagen zu Monte Carlo in der Finanzmathematik

### D.1 Die Mathematik in der Finanzwelt

Die Finanzmathematik (auf Englisch *Financial Engineering*) ist ein interdisziplinärer Fachbereich, welcher sich mit Problemstellungen der Finanzdienstleistungsindustrie auseinandersetzt. Die wichtigsten Stützen der Finanzmathematik sind mathematische und statistische Modelle sowie rechnergestützte Technologien (Birge und Linetsky, 2007, [BL07]). Der Rohstoff des heutigen Bankwesens ist nicht Geld, sondern Risiko. Aber was ist Risiko? Man unterscheidet zwischen Risiko und Ungewissheit. Bei Entscheidungen unter Risiko ist eine statistische Verteilung der Ergebnisse bekannt, bei solchen unter Ungewissheit nicht. Daher beschäftigt sich die Finanzmathematik unter anderem mit dem Risikomanagement. Weitere wichtige Bereiche finanzmathematischer Betrachtungen sind die Bewertung von Finanzprodukten und die Portfoliooptimierung. Ziel der Finanzmathematik ist die Modellierung von Problemen und Prozessen der Finanzwelt mithilfe der Mathematik. Die resultierenden mathematischen Modelle beruhen auf Differentialgleichungen (Hull, 2011, [Hul11]; Topper, 2005, [Top05]).

Eine Differentialgleichung beschreibt den Zusammenhang zwischen einer Funktion  $f$  und ihren Ableitungen  $f', f'', \dots$ , wobei die höchste auftretende Ableitung von  $f$  die Ordnung der Differentialgleichung angibt. Falls die Gleichung nicht algebraisch (zum Beispiel durch Integration) gelöst werden kann, sind Verfahren der Numerik notwendig, um Lösungen anzunähern (Baum u. a., 2013, [BBB<sup>+</sup>13]).

Im nächsten Abschnitt wird erläutert, warum Monte Carlo eine geeignete numerische Methode zur Annäherung bestimmter finanzmathematischer Probleme darstellt.

### D.2 Warum Monte Carlo in der Finanzmathematik?

Zwei Aspekte sind zentral für die Anwendung der Monte Carlo Methoden auf Problemstellungen der Finanzmathematik: die Gegebenheit, dass die Verfahren Schätzwerte für Probleme liefern können, welche als Erwartungswerte formuliert sind, und die Monte Carlo Konvergenzrate. Unter bestimmten Umständen können Derivatpreise (Definition siehe Abschnitt D.3) als Erwartungswerte dargestellt werden. Dadurch wird die Bewertung des Derivatpreises auf die Berechnung eines Erwartungswertes reduziert. Würde man diesen Wert als Integral formulieren, wäre seine Dimension  $d$  sehr gross oder sogar unendlich. Diese Tatsache macht die dimensionsunabhängige Konvergenzrate von Monte Carlo, welche bei  $n$  Replikationen proportional zu  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  ist (Abschnitt

3.2), konkurrenzfähig gegenüber anderen Verfahren der Numerik, deren Konvergenzgeschwindigkeit bei grösserem  $d$  abnimmt (Glasserman, 2003, [Gla03]).

Das Simulationsbeispiel des Abschnittes 4.1 (Annäherung von  $\pi$ ) basiert auf der Ziehung von  $x$ - und  $y$ -Werten im Intervall  $[0, 1]$ . Bei der Anwendung der Monte Carlo Verfahren in der Finanzmathematik ist ein ähnliches Vorgehen vonnöten. Allerdings sind hierbei die Stichproben keine zufälligen Punkte eines Intervalls, sondern mögliche Pfade oder Wege eines stochastischen Prozesses. Ein solcher Prozess beschreibt die stochastische Änderung des Wertes einer Variablen im Laufe der Zeit und kann durch eine Gleichung ausgedrückt werden, welche das probabilistische Verhalten der Zufallsvariablen darstellt (Hull, 2011, [Hul11]). Wie im Abschnitt 3.1 beschrieben, ist oft nur die unterste Schicht einer mehrstufigen Monte Carlo Methode wahrscheinlichkeitsbasiert. Die oberen Schichten sind deterministisch. Jede der  $n$  Replikationen des stochastischen Prozesses beschreibt eine mögliche „Welt“, in der beispielsweise ein bestimmter Derivatpreis auftritt. Die Monte Carlo Simulation ermöglicht durch Auswertung der aus den Stichproben erhaltenen „Welten“ eine Annäherung des Erwartungswertes und somit eine Bewertung des Derivatpreises (Glasserman, 2003, [Gla03]).

## D.3 Optionen

Optionen (auf Englisch *Options*) zählen zu den Derivaten (*Derivatives*). Ein Derivat kann definiert werden als ein finanzielles Wertpapier, dessen Preis auf dem Wert anderer Wertpapiere oder anderer Basiswerte basiert. Terminverträge, Futures und Swaps gehören neben den Optionen ebenfalls zu den Derivaten (Hull, 2011, [Hul11]).

Es gibt zwei Optionsarten: die Call- und die Put-Option. Die Call-Option gibt ihrem Besitzer das Recht, eine bestimmte Menge eines Basiswertes innerhalb einer festgelegten Zeitspanne oder an einem fixen Zeitpunkt zu einem vereinbarten Preis zu kaufen. Die Put-Option hingegen ermöglicht ihrem Eigentümer den Verkauf einer bestimmten Menge eines Basiswertes innerhalb einer Zeitspanne oder an einem gewissen Zeitpunkt zu einem festgelegten Preis. Der Preis im Optionsvertrag wird Ausübungspreis genannt. Die Zeitspanne bis zum Verfall heisst Laufzeit oder Verfallzeit. Amerikanische Optionen (*American Options*) können während der gesamten Laufzeit bis zum Verfall ausgeübt werden, europäische Optionen (*European Options*) nur am Verfallstermin selber. Die Begriffe amerikanisch und europäisch verweisen nicht auf den Ort der Option oder des Marktes. Einige Optionen, welche auf nordamerikanischen Märkten gehandelt werden, sind beispielsweise europäisch. Aufgrund des fixen Ausübungszeitpunktes sind europäische Optionen im Allgemeinen einfacher zu analysieren als amerikanische (Becker, 1994, [Bec94]; Hull, 2011, [Hul11]).

Bei den Optionen sollte hervorgehoben werden, dass der Besitzer das Recht hat, zu kaufen oder zu verkaufen. Er muss dieses Recht aber nicht ausüben. Dies unterscheidet Optionen von

Terminverträgen oder Futures, bei denen der Vertragseigentümer am Verfallstermin verpflichtet ist, einen Basiswert zu kaufen oder zu verkaufen. Während der Eintritt in einen Termin- oder Futurevertrag nichts kostet, muss eine Option erworben werden (Optionsprämie) (Becker, 1994, [Bec94]; Hull, 2011, [Hul11]).

Neben den Standard-Optionen (amerikanische und europäische Option) gibt es noch andere Optionsarten. Beispiele für die sogenannten exotischen Optionen sind die asiatische Option, die Barriere-Option (*Barrier Option*) oder die Lookback-Option (Hull, 2011, [Hul11]).

Die exotischen Optionen werden in dieser Arbeit nicht näher behandelt.

# Abbildungsverzeichnis

Abb. 1:	<a href="https://bialczynski.pl/wielcy-polacy/stanislaw-marcin-ulam-1909-1984-program-orion-kosmiczne-silniki-nuklearne">https://bialczynski.pl/wielcy-polacy/stanislaw-marcin-ulam-1909-1984-program-orion-kosmiczne-silniki-nuklearne</a> , Abruf: 24.10.2019 . . . . .	1
Abb. 2:	Die Exponentialfunktion, erstellt in GeoGebra, 08.09.2019 . . . . .	5
Abb. 3:	<a href="https://www.watson.ch/wissen/schweiz/721426168-die-schweiz-das-kleine-russland-so-gross-koennte-die-eidgenossenschaft-wirklich-sein">https://www.watson.ch/wissen/schweiz/721426168-die-schweiz-das-kleine-russland-so-gross-koennte-die-eidgenossenschaft-wirklich-sein</a> , Abruf: 26.09.2019 . . . . .	7
Abb. 4:	Landkarte mit Gitternetz, basierend auf Abb. 3, bearbeitet in Affinity Designer, 30.09.2019 . . . . .	7
Abb. 5:	Integralannäherung mittels Trapezregel, erstellt in GeoGebra, 19.09.2019 . . .	13
Abb. 6:	Simulation zur Annäherung von $\pi$ ( $n_{tot} = 10$ ), erstellt in processing, 19.09.2019	15
Abb. 7:	Simulation zur Annäherung von $\pi$ ( $n_{tot} = 1'000$ ), erstellt in processing, 19.09.2019 . . . . .	15
Abb. 8:	Simulation zur Annäherung von $\pi$ ( $n_{tot} = 100'000$ ), erstellt in processing, 19.09.2019 . . . . .	15
Abb. 9:	Herleitung von $P_{schnitt}$ , erstellt in GeoGebra, 21.09.2019 . . . . .	16
Abb. 10:	Simulation des Buffon'schen Nadelproblems ( $n_{tot} = 100$ ), erstellt in processing, 26.09.2019 . . . . .	17
Abb. 11:	Simulation des Buffon'schen Nadelproblems ( $n_{tot} = 10'000$ ), erstellt in processing, 26.09.2019 . . . . .	17
Abb. 12:	Simulation des Buffon'schen Nadelproblems ( $n_{tot} = 1'000'000$ ), erstellt in processing, 26.09.2019 . . . . .	17
Abb. 13:	<a href="https://penntoday.upenn.edu/news/eniacs-anniversary-nod-its-female-computers">https://penntoday.upenn.edu/news/eniacs-anniversary-nod-its-female-computers</a> , Abruf: 25.08.2019 . . . . .	31
Abb. 14:	Die Gauss'sche Glockenfunktion, erstellt in GeoGebra, 08.09.2019 . . . . .	35

# Tabellenverzeichnis

Tab. 1:	Integral der Exponentialfunktion, erstellt in Excel, 07.09.2019 . . . . .	6
Tab. 2:	Werte der Simulation zur Annäherung von $\pi$ , erstellt in processing, 19.09.2019	15
Tab. 3:	Werte der Simulation des Buffon'schen Nadelproblems, erstellt in processing, 26.09.2019 . . . . .	17
Tab. 4:	Werte der Simulation zur Annäherung des Optionspayoffs ohne Varianzredukti- on, erstellt in Excel, 23.10.2019 . . . . .	26
Tab. 5:	Werte der Simulation zur Annäherung des Optionspayoffs mit Varianzreduktion, erstellt in Excel, 23.10.2019 . . . . .	26

# Literaturverzeichnis

- [BBB<sup>+</sup>13] BAUM, Manfred ; BELLSTEDT, Martin ; BITSCH, Gerhard ; BRANDT, Dieter ; BRÜSTLE, Gerhard ; BUCK, Heidi ; DENKER, Jürgen ; DOPFER, Günther ; DÜRR, Rolf ; FRANZ, Alfred ; FREUDIGMANN, Hans ; GÖTZ, Herbert u. a.: *Lambacher Schweizer 11/12 (Grundlagen der Mathematik für Schweizer Maturitätsschulen)*. Baar : Klett und Balmer Verlag, 2013.
- [Bec94] BECKER, Ulrich: *Lexikon Terminhandel (Finanz- und Rohstoff-Futures)*. Wiesbaden : Gabler, 1994.
- [BGJM11] BROOKS, Steve ; GELMAN, Andrew ; JONES, Galin ; MENG, Xiao-Li: *Handbook of Markov Chain Monte Carlo*. Boca Raton : Chapman & Hall/CRC, 2011.
- [BL07] BIRGE, John ; LINETSKY, Vadim: *Financial Engineering (Handbooks in Operations Research and Management Science)*. Amsterdam : Elsevier Science, 2007.
- [DS11] DUNN, William L. ; SHULTIS, J. K.: *Exploring Monte Carlo Methods*. Amsterdam : Elsevier Science, 2011.
- [Eck87] ECKHARDT, Roger: Stan Ulam, John von Neumann, and the Monte Carlo Method. In: *Los Alamos Science* (1987), Nr. 15.
- [Gla03] GLASSERMAN, Paul: *Monte Carlo Methods in Financial Engineering (Stochastic Modelling and Applied Probability)*. New York : Springer, 2003.
- [HH64] HAMMERSLEY, John M. ; HANDSCOMB, David C.: *Monte Carlo Methods*. Norwich : Fletcher and Son Ltd, 1964.
- [Hig01] HIGHAM, Desmond J.: An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations. In: *SIAM Review* 43 (2001), Nr. 3.
- [Hir15] HIRBER, Hannes: *Monte-Carlo-Varianzreduktion (Seminar aus Finanz- und Versicherungsmathematik)*. 2015. – Seminararbeit, Technische Universität Wien.
- [Hul11] HULL, John C.: *Options, Futures, and Other Derivatives, 8th Edition*. London : Pearson Academic, 2011.
- [KW08] KALOS, Malvin H. ; WHITLOCK, Paula A.: *Monte Carlo Methods, Second Revised and Enlarged Edition*. Weinheim : Wiley-VCH, 2008.

- [Met87] METROPOLIS, Nicholas: The Beginning of the Monte Carlo Method. In: *Los Alamos Science* (1987), Nr. 15.
- [RF07] REAS, Casey ; FRY, Ben: *Processing (A Programming Handbook for Visual Designers and Artists)*. Cambridge : MIT Press, 2007.
- [Spä94] SPÄTH, Helmuth: *Numerik (Eine Einführung für Mathematiker und Informatiker)*. Braunschweig/Wiesbaden : Vieweg, 1994.
- [Top05] TOPPER, Juergen: *Financial Engineering with Finite Elements*. Chichester : Wiley, 2005.
- [Vog19] VOGEL, Beatrice: *Integralrechnung*. 2019. – Skript Schwerpunktfach AdM, Kollegium Spiritus Sanctus Brig.
- [Wal10] WALDVOGEL, Jörg: Towards a General Error Theory of the Trapezoidal Rule. In: *Springer Optimization and Its Applications (SOIA)* (2010), Nr. 42.

# Authentizitätserklärung

Ich bezeuge mit meiner Unterschrift, dass meine Angaben über die bei der Abfassung meiner Maturaarbeit benützten Hilfsmittel und über mir allenfalls zuteil gewordene Hilfe in jeder Hinsicht der Wahrheit entsprechen und vollzählig sind.

Ort und Datum: \_\_\_\_\_

Unterschrift des Schülers: \_\_\_\_\_