

Differentialgeometrie der Extreme: Minimalflächen und die isoperimetrische Ungleichung

Maturaarbeit

von

Frieder Jäckel

Gymnasium Kirchenfeld

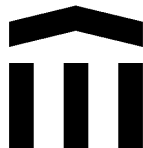
Abteilung für Mathematik und Naturwissenschaften

Klasse M2017a

Bern, November 2016

Betreuer der Arbeit:

Dr. Heiner Rohner



Inhaltsverzeichnis

Einleitung	3
I Die isoperimetrische Ungleichung	5
1 Die isoperimetrische Ungleichung in der Ebene	5
1.1 Problemstellung	5
1.2 Untersuchung ebener Polygone	6
1.3 Beweis der isoperimetrischen Ungleichung	10
1.4 Die isoperimetrische Ungleichung für Gebiete mit glattem Rand	12
2 Volumenfreundliche euklidische Räume	13
2.1 Fragestellung	13
2.2 Berechnung der Oberfläche der $(n - 1)$ -Sphäre	13
2.3 Bestimmung der volumenfreundlichen euklidischen Räume	15
II Minimalflächen	16
3 Definition	16
4 Rotationsminimalflächen	18
4.1 Rotationsflächen	18
4.2 Einfluss der Krümmung der erzeugenden Kurve auf die Gaußkrümmung der Rotationsfläche	18
4.3 Bestimmung aller Rotationsminimalflächen	20
4.4 Die Anzahl Rotationsminimalflächen bei vorgegebenem Rand	24
5 Tunnelflächen	26
5.1 Die partielle Differentialgleichung der Tunnelminimalflächen	26
5.2 Erraten von Lösungen	28
Anhang	30
A Mathematische Grundlagen	30
A.1 Differentialrechnung	30
A.2 Ebene Kurven	32
A.3 Glatte Flächen	33
Literatur	36
Selbstständigkeitserklärung	37

Zusammenfassung

Im ersten Teil der Arbeit untersuchen wir eines der ältesten Optimierungsprobleme der Mathematik, die isoperimetrische Ungleichung, von einem differentialgeometrischen Standpunkt aus. Ein Grossteil der Arbeit besteht darin zu zeigen, dass das isoperimetrische Problem überhaupt eine Lösung besitzt. In Abschnitt 1.2 wird das Problem vom Standpunkt der ebenen Polygone aus betrachtet. Daraus folgt bereits die isoperimetrische Ungleichung, jedoch ohne Charakterisierung der Gleichheitsfälle. Um den Beweis zu vollenden, werden in Abschnitt 1.3 Maximierungskurven in Normalenrichtung variiert.

Der zweite Teil befasst sich mit Minimalflächen. Diese werden in Kapitel 3 sauber eingeführt. Ein Ziel in den Kapiteln 4 und 5 ist es, in zwei Klassen von Flächen, den sogenannten Rotations- und Tunnelflächen, alle zu bestimmen, die zugleich Minimalflächen sind. Während bei den Rotationsflächen eine genaue Charakterisierung gelingt, bleibt bei den Tunnelflächen noch Raum für weitere Untersuchungen. Weiter liefert Satz 4.4 eine nicht offensichtliche Antwort auf die Frage, wieviele Rotationsflächen, die zugleich Minimalflächen sind, mit gegebenem Rand existieren.

Einleitung

Die erste Hälfte meiner Maturaarbeit befasst sich mit der isoperimetrischen Ungleichung. Obwohl die meisten Leute in ihrem Leben den Namen dieses Satzes, und schon gar nicht seine genaue Formulierung, jemals gehört haben, kennt ihn ein Grossteil von ihnen ganz intuitiv. Die isoperimetrische Ungleichung besagt folgendes: Unter allen ebenen Figuren mit gleichem Umfang besitzt der Kreis die grösste Fläche und keine andere Figur hat die gleiche Fläche wie der Kreis. «Diese Tatsache ist doch offensichtlich» könnte man meinen und sich fragen, warum sich jemand im Rahmen einer Maturaarbeit damit beschäftigen sollte. Es liegt jedoch in der Natur der Mathematiker, eine scheinbar «offensichtliche» Tatsache nicht einfach so als wahr zu akzeptieren. Sie wollen es ganz genau wissen. Sie wollen einen Beweis. Und im Fall der isoperimetrischen Ungleichung liess dieser Beweis sehr lange auf sich warten. Obwohl bereits die alten Griechen den Satz kannten, war es erst kurz vor der Hälfte des 19. Jahrhunderts, als ein Schweizer Mathematiker namens Jakob Steiner zeigen konnte, dass aus der Existenz einer Lösung die Eindeutigkeit des Kreises als Lösung folgt. Die Existenz der Lösung ist jedoch ein überhaupt nicht trivialer Punkt, wie wir in dieser Arbeit ebenfalls sehen werden. Der erste vollständige Beweis kam von Karl Weierstrass.

In dieser Arbeit benutzen wir Werkzeuge der Differentialgeometrie, einem Teilgebiet der Mathematik, um die isoperimetrische Ungleichung zu beweisen. Die klassische Differentialgeometrie beschäftigt sich mit der Untersuchung von Kurven und Flächen unter Zuhilfenahme der Differentialrechnung. Dies bringt jedoch mit sich, dass wir nur «schöne» Figuren betrachten können. Allerdings haben diese Figuren die Eigenschaft, dass man sie beliebig gut durch Polygone approximieren kann. Diese Tatsache wird uns dabei helfen, die Existenz einer Lösung zu zeigen. Der einzige Punkt, an welchem wir wirklich Werkzeuge der Differentialgeometrie benötigen, ist beim Beweis der Eindeutigkeitsaussage.

In Kapitel 1 beschäftigen wir uns lediglich mit der isoperimetrischen Ungleichung in der Ebene. Wir können uns aber denken, dass eine analoge Aussage auch in höheren Dimensionen gilt, d.h. dass das Verhältnis von n -dimensionalem Volumen zur $n - 1$ -dimensionalen Oberfläche eines n -dimensionalen Objektes nach oben durch dieses Verhältnis der n -dimensionalen Kugel beschränkt ist. In Kapitel 2 suchen wir die Dimension, in welcher diese obere Schranke am grössten ist. Dabei werden wir sehen, dass sich die Vorstellung «in höheren Dimension ist mehr Platz» in dieser Situation nicht anwenden lässt.

In der zweiten Hälfte der Arbeit beschäftigen wir uns mit sogenannten «Minimalflächen». Das sind Flächen mit der folgenden Eigenschaft: Jede andere Fläche, die den gleichen Rand besitzt und die ohne zu viel Bewegung des Inneren aus der Minimalfläche hervorgeht, hat eine grössere Fläche als die Minimalfläche. Diese intuitive Erklärung werden wir in Kapitel 3 noch präzisieren. Auch wenn sich die meisten Leute noch nie Gedanken über Minimalflächen gemacht haben, war schon fast jeder mal mit ihnen in Kontakt. Taucht man nämlich geschlossene Drähte in Seifenwasser und zieht diese wieder heraus, spannt sich zwischen den Drähten eine sogenannte Seifenhaut. Diese Seifenhaut besitzt die Drähte als Rand und nimmt aus physikalischen Gründen eine Form an, die ihre Oberfläche minimiert. In vielen Fällen kann es helfen, sich Minimalflächen als Seifenhäute vorzustellen.

In Kapitel 3 geben wir eine Art Herleitung für die Definition einer Minimalfläche an. Danach führen wir in Kapitel 4 den Begriff der Rotationsfläche ein. Dies ist eine Fläche, welche man erhält, wenn man eine Kurve in der xz -Ebene um die z -Achse rotieren lässt. Ausserdem bestimmen wir alle Rotationsflächen, welche zugleich Minimalflächen sind. Weiterhin beantworten wir in einer nicht offensichtlichen Weise die Frage, wieviele Rotationsflächen bei gegebenem Rand existieren, die ebenfalls Minimalflächen sind. Im

letzten Kapitel führen wir Tunnelflächen ein. Diese sind eine Verallgemeinerung der Rotationsflächen. Auch hier wird es unser Ziel sein, alle Tunnelflächen zu bestimmen, die ebenfalls Minimalflächen sind. Dies wird uns jedoch nur ansatzweise gelingen, sodass weitere Untersuchungen in diese Richtung möglich sind.

Ab Abschnitt 1.3 werden viele Begriffe und Resultate verwendet, mit denen der durchschnittliche Gymnasialschüler nicht vertraut ist. Da sich die Arbeit aber auch an interessierte Gymnasiasten, d.h. v.a. an interessierte PAM-Primaner, richtet, ist im Anhang eine kleine Einführung in die mehrdimensionale Differentialrechnung und in die Differentialgeometrie von Kurven und Flächen gegeben. Alle wichtigen Definitionen und Sätze, die in der Arbeit verwendet werden, sind dort vorzufinden. Ich möchte jedoch anmerken, dass die getroffene Auswahl sehr minimalistisch ist. Das soll heissen: Wer mit dem Anhang vertraut ist, sollte der Arbeit folgen können. Der Anhang bietet aber keine Gelegenheit, ein tieferes Verständnis der eingeführten Begriffe zu entwickeln.

Ich möchte mir nun Zeit nehmen und mich bei folgenden Personen bedanken, die am Gelingen dieser Arbeit beteiligt waren:

Bei meinem Betreuer Heiner Rohner für seine stets kompetente Beratung.

Bei Sebastian Baader, der stets ein offenes Ohr für und eine ehrliche Antwort auf meine Ideen hatte.

Bei meinem Freund Linus Rösler für seine sehr hilfreichen Denkanstösse.

Und zuletzt bei meiner Mutter, die mich immer unterstützte, wo und wann sie konnte.

Teil I

Die isoperimetrische Ungleichung

1 Die isoperimetrische Ungleichung in der Ebene

1.1 Problemstellung

Wir wollen in diesem Kapitel das folgende Resultat beweisen.

Satz 1.1. (Isoperimetrische Ungleichung für differenzierbare Kurven)

Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine reguläre, einfach geschlossene Kurve. $L(\gamma)$ bezeichne die Länge und $A(\gamma)$ den eingeschlossenen Flächeninhalt von γ . Dann gilt

$$\frac{A(\gamma)}{L(\gamma)^2} \leq \frac{1}{4\pi}, \quad (1.1)$$

wobei Gleichheit genau dann eintritt, wenn die Spur der Kurve ein Kreis ist.

Bevor wir mit der Untersuchung des Problems beginnen, müssen einige Begriffe besprochen werden. Wie es in der Differentialgeometrie von Kurven und Flächen üblich ist, ist mit dem Wort *differenzierbar* stets unendlich oft differenzierbar, d.h. C^∞ , gemeint. Ist weiterhin $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($a < b$) eine auf einem kompakten Intervall definierte Funktion, so nennen wir f differenzierbar, wenn die Einschränkung von f auf (a, b) differenzierbar ist und wenn die Grenzwerte $\lim_{x \searrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ und $\lim_{x \nearrow b} \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$ existieren. In diesem Fall definieren wir f' in den Endpunkten als diese Grenzwerte. Mit dieser Vorbemerkung kommen wir direkt zur ersten Definition.

Definition 1.2. Eine differenzierbare Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, wobei $a < b$, heisst einfach geschlossen, wenn γ auf (a, b) injektiv ist und

$$\gamma^{(n)}(a) = \gamma^{(n)}(b)$$

für alle nichtnegativen ganzen Zahlen n gilt.

Ich möchte nun den Begriff der Länge einer Kurve kurz repetieren. Für eine Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ und eine Partition $P = \{t_0, \dots, t_N\}$ von $[a, b]$ wird $l(\gamma; P)$ definiert als $l(\gamma; P) := \sum_{i=0}^{N-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\|$. Gilt weiterhin $\sup\{l(\gamma; P) \mid P \text{ ist eine Partition von } [a, b]\} < \infty$, so nennt man γ rektifizierbar und definiert die Länge von γ als $L(\gamma) := \sup\{l(\gamma; P) \mid P \text{ ist eine Partition von } [a, b]\}$. Es ist wohlbekannt, dass aus der stetigen Differenzierbarkeit von γ die Rektifizierbarkeit folgt. In diesem Fall gilt ausserdem:

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

Jetzt einige Worte zum eingeschlossenen Flächeninhalt: Nach dem Jordanschen Kurvensatz¹ existiert ein Gebiet G_γ mit $\partial G_\gamma = \text{Spur}(\gamma)$. Wenn wir vom von γ eingeschlossenen Flächeninhalt sprechen, meinen wir damit lediglich den orientierten Flächeninhalt von G_γ , wobei die Orientierung durch die Umlaufsrichtung von γ gegeben ist. Damit der orientierte Flächeninhalt von G_γ positiv ist, nehmen wir von nun an an, dass jede einfach geschlossene Kurve γ ihre Spur *im Gegenuhrzeigersinn durchläuft*². Das folgende Lemma gibt eine Formel, um den von γ eingeschlossenen Flächeninhalt einfach zu berechnen.

Lemma 1.3. Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine differenzierbare, einfach geschlossene Kurve und $A(\gamma)$ der von γ eingeschlossene Flächeninhalt. Dann gilt

$$A(\gamma) = \frac{1}{2} \int_a^b \det(\gamma(t), \gamma'(t)) dt, \quad (1.2)$$

wobei $\gamma(t)$ und $\gamma'(t)$ als Spaltenvektoren aufzufassen sind.

¹Auf diesen wollen wir hier jedoch nicht weiter eingehen.

²Falls γ ihre Spur im Uhrzeigersinn durchläuft ist $A(\gamma)$ negativ (wir beschäftigen uns allerdings nicht damit, warum dies der Fall ist, da dies nicht dem Ziel der Arbeit entspricht), die isoperimetrische Ungleichung für differenzierbare Kurven dementsprechend trivial. Wir sehen die Annahme also nicht als Einschränkung an.

Beweis. Betrachte die beiden Differentialformen $\omega = xdy$ und $\sigma = -ydx$. Eine simple Rechnung liefert $d\omega = d\sigma = dx \wedge dy$. Schreibt man γ als $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ so folgt nach dem Satz von Stokes (siehe [Forster, 2012]) einerseits

$$\int_{G_\gamma} dx dy = \int_{G_\gamma} d\omega = \int_{\partial G_\gamma} \omega = \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt = \int_a^b x(t)y'(t) dt$$

und andererseits

$$\int_{G_\gamma} dx dy = \int_{G_\gamma} d\sigma = \int_{\partial G_\gamma} \sigma = \int_a^b \sigma_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt = \int_a^b (-y(t))x'(t) dt.$$

Aufsummieren und die Tatsache, dass der Flächeninhalt von G_γ durch $\int_{G_\gamma} dx dy$ gegeben ist, beenden den Beweis. \square

Damit haben wir alle nötigen Begriffe ausführlich dargelegt und können nun mit dem Beweis von Satz 1.1 beginnen. Da wir nur differenzierbare Kurven untersuchen und man diese beliebig gut durch Polygone approximieren kann, liegt es nahe, die Isoperimetrische Ungleichung vorerst vom Standpunkt der Polygone zu betrachten.

1.2 Untersuchung ebener Polygone

Im Folgenden sei n immer eine natürliche Zahl grösser gleich 3 und \mathcal{E}_n die Menge aller n -Ecke in der Ebene. Für ein Polygon E bezeichne $A(E)$ den Flächeninhalt und $L(E)$ den Umfang des Polygons.

Lemma 1.4. *Die Menge $\{\frac{A(E)}{L(E)^2} \mid E \in \mathcal{E}_n\}$ besitzt ein Supremum.*

Beweis. Sei E ein n -Eck mit den Eckpunkten p_1, \dots, p_n . Nach der Dreiecksungleichung gilt

$$\|p_k - p_1\| < \|p_n - p_1\| + \sum_{i=1}^{n-1} \|p_{i+1} - p_i\| = L(E)$$

für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$. Also ist $E \subset B_{p_1}(L(E)) = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \|p - p_1\| \leq L(E)\}$, woraus

$$A(E) \leq A(B_{p_1}(L(E))) = \pi L(E)^2$$

folgt. Folglich ist π eine obere Schranke der Menge $\{\frac{A(E)}{L(E)^2} \mid E \in \mathcal{E}_n\}$, d.h. $\{\frac{A(E)}{L(E)^2} \mid E \in \mathcal{E}_n\}$ besitzt ein Supremum. \square

Lemma 1.5. *Die Menge $\{\frac{A(E)}{L(E)^2} \mid E \in \mathcal{E}_n\}$ besitzt ein Maximum.*

Beweis. Die Menge $\{\frac{A(E)}{L(E)^2} \mid E \in \mathcal{E}_n\}$ besitzt nach Lemma 1.4 ein Supremum. Sei S_n dieses Supremum. Es existiert eine Folge $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{E}_n , sodass die Folge $\left(\frac{A(E_k)}{L(E_k)^2}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ gegen S_n konvergiert. Für jedes E_k seien $p_k^{(1)}, \dots, p_k^{(n)} \in \mathbb{R}^2$ seine Eckpunkte. Weil $\frac{A(E_k)}{L(E_k)^2}$ bei Streckung und Translation unverändert bleibt, können wir ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit annehmen, dass $p_k^{(1)} = 0$ und $L(E_k) = 1$ für alle natürlichen k erfüllt ist. Wegen

$$1 = L(E_k) = \|p_k^{(n)} - p_k^{(1)}\| + \sum_{i=1}^{n-1} \|p_k^{(i+1)} - p_k^{(i)}\| \geq \|p_k^{(m)} - p_k^{(1)}\| = \|p_k^{(m)}\|$$

gilt $p_k^{(m)} \in B_0(1)$ für alle natürlichen k und alle $m \in \{1, \dots, n\}$. Da $B_0(1)$ kompakt ist, besitzt die Folge $\left(p_k^{(2)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $\left(p_{k_l}^{(2)}\right)_{l \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert in $B_0(1)$. Mit dem gleichen Argument folgt, dass $\left(p_{k_l}^{(3)}\right)_{l \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $\left(p_{k_{l_i}}^{(3)}\right)_{i \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert in $B_0(1)$ besitzt. Die Folge $\left(p_{k_{l_i}}^{(2)}\right)_{i \in \mathbb{N}}$ ist als Teilfolge der konvergenten Folge $\left(p_{k_l}^{(2)}\right)_{l \in \mathbb{N}}$ selbst konvergent und besitzt sogar den gleichen Grenzwert. So fährt man fort bis zu einer Folge $\left(p_{k_N}^{(n)}\right)_{N \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert in $B_0(1)$. Nach

Konstruktion gilt für alle $m \in \{1, \dots, n\}$, dass die Folge $\left(p_{k_N}^{(m)}\right)_{N \in \mathbb{N}}$ konvergiert mit Grenzwert in $B_0(1)$. Die Folge $(E_{k_N})_{N \in \mathbb{N}}$ konvergiert also gegen ein $E \in \mathcal{E}_n$. Als Teilfolge der konvergenten Folge $\left(\frac{A(E_k)}{L(E_k)^2}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert $\left(\frac{A(E_{k_N})}{L(E_{k_N})^2}\right)_{N \in \mathbb{N}}$ ebenfalls gegen S_n . Aus der Stetigkeit von $A : \mathcal{E}_n \rightarrow \mathbb{R}, E \mapsto A(E)$ folgt

$$S_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A(E_{k_N})}{L(E_{k_N})^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} A(E_{k_N}) = A\left(\lim_{N \rightarrow \infty} E_{k_N}\right) = A(E).$$

Also ist $\frac{A(E)}{L(E)^2} = S_n$, d.h. das Supremum wird angenommen und ist damit sogar ein Maximum. \square

Damit ist es uns schon fast möglich, eine ähnliche Aussage über einfach geschlossene Kurven zu machen. Davor ist jedoch eine genauere Kenntnis der Polygone, welche $\frac{A(\cdot)}{L(\cdot)^2}$ maximieren, nötig.

Lemma 1.6. *Sei E_0 ein n -Eck mit $\frac{A(E_0)}{L(A_0)^2} = \max\{\frac{A(E)}{L(E)^2} \mid E \in \mathcal{E}_n\}$. Dann ist E_0 ein regelmässiges n -Eck.*

Beweis. Sei E_0 ein n -Eck mit $\frac{A(E_0)}{L(E_0)^2} = \max\{\frac{A(E)}{L(E)^2} \mid E \in \mathcal{E}_n\}$ und seien p_1, \dots, p_n die Eckpunkte von E_0 . Um Spezialfälle bei der Notation im Folgenden zu vermeiden, betrachten wir die Indices modulo n , d.h. ist m eine natürliche Zahl, so definieren wir $p_m := p_r$, wobei $r \in \{0, \dots, n-1\}$ und eine ganze Zahl q durch $m = qn + r$ eindeutig bestimmt sind. Die erste Beobachtung ist, dass E_0 konvex ist. Nehme, um dies einzusehen, an, dass E_0 nicht konvex ist. Dann existiert ein $k \in \{1, \dots, n\}$, sodass das Dreieck $\triangle p_{k-1}p_k p_{k+1}$ nicht vollständig in E_0 enthalten ist. Sei \tilde{p}_k der Punkt, welcher durch Spiegelung von p_k an der Geraden durch p_{k-1} und p_{k+1} entsteht und sei \tilde{E}_0 das n -Eck mit den Eckpunkten $p_1, \dots, p_{k-1}, \tilde{p}_k, p_{k+1}, \dots, p_n$. Dann gilt $L(\tilde{E}_0) = L(E_0)$ und $A(\tilde{E}_0) = A(E_0) + A(\triangle p_{k-1}p_k p_{k+1}) + A(\triangle p_{k-1}\tilde{p}_k p_{k+1}) > A(E_0)$. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu $\frac{A(E_0)}{L(A_0)^2} = \max\{\frac{A(E)}{L(E)^2} \mid E \in \mathcal{E}_n\}$.

Behauptung 1. *Alle Seiten von E_0 sind gleich lang.*

Beweis von Behauptung 1. Nehme an, dies sei nicht der Fall, d.h. es existiert ein $k \in \{1, \dots, n\}$ mit $\|p_k - p_{k-1}\| \neq \|p_{k+1} - p_k\|$. Sei \tilde{p}_k so gewählt, dass \tilde{p}_k auf der gleichen Seite der Geraden durch p_{k-1} und p_{k+1} wie p_k liegt und sodass $\|\tilde{p}_k - p_{k-1}\| = \|p_{k+1} - \tilde{p}_k\| = \frac{1}{2}(\|p_k - p_{k-1}\| + \|p_{k+1} - p_k\|)$ gilt. Sei \tilde{E}_0 das n -Eck mit den Eckpunkten $p_1, \dots, p_{k-1}, \tilde{p}_k, p_{k+1}, \dots, p_n$. Dann gilt einerseits $L(\tilde{E}_0) = L(E_0)$ und wegen Herons Formel andererseits

$$\begin{aligned} A(\triangle p_{k-1}\tilde{p}_k p_{k+1}) &= \sqrt{s(s - \|p_{k+1} - p_{k-1}\|)(s - \|p_{k+1} - \tilde{p}_k\|)(s - \|\tilde{p}_k - p_{k-1}\|)} \\ &= \sqrt{s(s - \|p_{k+1} - p_{k-1}\|) \left(s - \frac{\|p_k - p_{k-1}\| + \|p_{k+1} - p_k\|}{2}\right)^2} \\ &> \sqrt{s(s - \|p_{k+1} - p_{k-1}\|)(s - \|p_{k+1} - p_k\|)(s - \|p_k - p_{k-1}\|)} \\ &= A(\triangle p_{k-1}p_k p_{k+1}), \end{aligned}$$

wobei $s = \frac{1}{2}L(\triangle p_{k-1}p_k p_{k+1}) = \frac{1}{2}L(\triangle p_{k-1}\tilde{p}_k p_{k+1})$. Folglich ist $A(\tilde{E}_0) > A(E_0)$ und damit auch $\frac{A(\tilde{E}_0)}{L(\tilde{E}_0)^2} > \frac{A(E_0)}{L(E_0)^2}$, was allerdings ein Widerspruch ist. \square

Für $n = 3$ ist das Lemma damit bewiesen. Wir können für die nächste Behauptung also $n \geq 4$ annehmen.

Behauptung 2. *Alle Innenwinkel von E_0 sind gleich gross.*

Beweis von Behauptung 2. Nehme an, dies sei falsch. Dann existiert ein $k \in \{1, \dots, n\}$ mit $\angle p_{k-1}p_k p_{k+1} \neq \angle p_k p_{k+1} p_{k+2}$. Dann ist das Viereck mit den Ecken $p_{k-1}, p_k, p_{k+1}, p_{k+2}$ kein Sehnenviereck. Denn falls dem so wäre, würde nach dem Peripheriewinkelsatz $\angle p_{k-1}p_k p_{k+2} = \angle p_{k-1}p_{k+1}p_{k+2}$ und $\angle p_k p_{k-1}p_{k+1} = \angle p_k p_{k+2}p_{k+1}$ folgen. Da aber, nach Behauptung 1, die Dreiecke $\triangle p_{k-1}p_k p_{k+1}$ und $\triangle p_k p_{k+1} p_{k+2}$ gleichschenkelig sind, gilt $\angle p_k p_{k-1}p_{k+1} = \angle p_{k-1}p_{k+1}p_k$ und $\angle p_{k+1}p_k p_{k+2} = \angle p_k p_{k+2}p_{k+1}$, woraus $\angle p_{k-1}p_k p_{k+1} = \angle p_k p_{k+1} p_{k+2}$ folgt. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme. Das Viereck mit den Ecken $p_{k-1}, p_k, p_{k+1}, p_{k+2}$ ist also kein Sehnenviereck. Sei im Folgenden $s = \|p_i - p_{i-1}\|$ die Länge aller Seiten von E_0 und $d = \|p_{k+2} - p_{k-1}\|$. Da $p_{k-1}, p_k, p_{k+1}, p_{k+2}$ nicht kollinear sind, gilt nach der Dreiecksungleichung $d < 3s$. Betrachte nun die Funktion

$$f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}, \alpha \longmapsto d + 2s \cos \alpha.$$

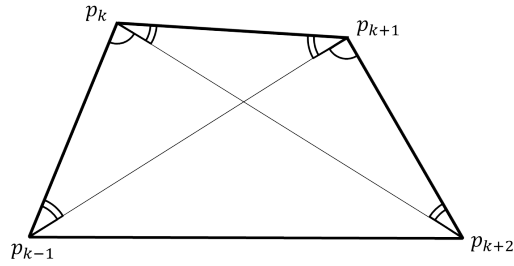


Abbildung 1: Zur Annahme, dass das Viereck mit den Eckpunkten $p_{k-1}, p_k, p_{k+1}, p_{k+2}$ ein Sehnenviereck ist

Wegen der Stetigkeit von f und $f(0) = d + 2s > s$, $f(\pi) = d - 2s < s$ existiert nach dem Zwischenwertsatz

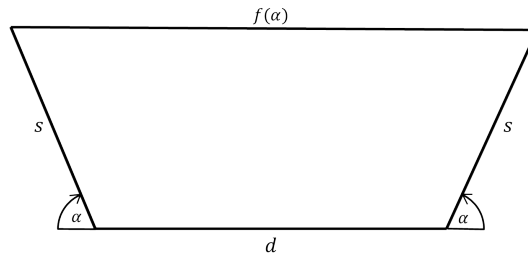


Abbildung 2: Die Funktion $f(\alpha) = d + 2s \cos \alpha$

ein $\alpha_0 \in (0, \pi)$ mit $f(\alpha_0) = s$. Seien \tilde{p}_k und \tilde{p}_{k+1} die Punkte mit $\angle p_{k+2} p_{k-1} \tilde{p}_k = \angle p_{k-1} p_{k+2} \tilde{p}_{k+1} = \pi - \alpha_0$ und $\|\tilde{p}_k - p_{k-1}\| = \|p_{k+2} - \tilde{p}_{k+1}\| = s$. Dann gilt $\|\tilde{p}_{k+1} - \tilde{p}_k\| = f(\alpha_0) = s$ (siehe dazu Abbildung 3). Aus Symmetriegründen gilt $\angle \tilde{p}_k p_{k-1} \tilde{p}_{k+1} = \angle \tilde{p}_k p_{k+2} \tilde{p}_{k+1}$. Also ist das Viereck $\square p_{k-1} \tilde{p}_k \tilde{p}_{k+1} p_{k+2}$ ein

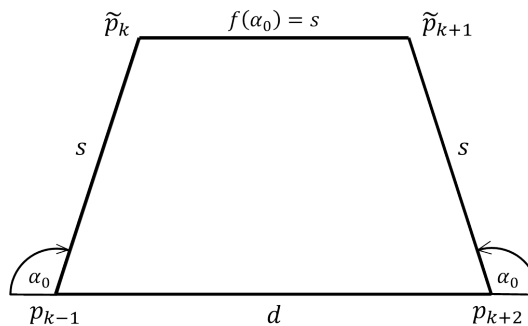


Abbildung 3: Konstruktion des Vierecks $\square p_{k-1} \tilde{p}_k \tilde{p}_{k+1} p_{k+2}$ mittels der Funktion $f(\alpha) = d + 2s \cos \alpha$

konvexes Sehnenviereck und nach der Formel von Bretschneider gilt deshalb

$$\begin{aligned}
A(\square p_{k-1}\tilde{p}_k\tilde{p}_{k+1}p_{k+2}) &= \sqrt{\left(\frac{L}{2} - s\right)^3 \left(\frac{L}{2} - d\right) - s^3 d \cos^2\left(\frac{\angle p_{k+2}p_{k-1}\tilde{p}_k + \angle p_{k+2}\tilde{p}_{k+1}\tilde{p}_k}{2}\right)} \\
&= \sqrt{\left(\frac{L}{2} - s\right)^3 \left(\frac{L}{2} - d\right) - s^3 d \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)} \\
&= \sqrt{\left(\frac{L}{2} - s\right)^3 \left(\frac{L}{2} - d\right)} \\
&> \sqrt{\left(\frac{L}{2} - s\right)^3 \left(\frac{L}{2} - d\right) - s^3 d \cos^2\left(\frac{\angle p_{k+2}p_{k-1}p_k + \angle p_{k+2}p_{k+1}p_k}{2}\right)} \\
&= A(\square p_{k-1}p_k p_{k+1}p_{k+2}),
\end{aligned}$$

wobei $L = 3s + d = L(\square p_{k-1}\tilde{p}_k\tilde{p}_{k+1}p_{k+2}) = L(\square p_{k-1}p_k p_{k+1}p_{k+2})$. Wenn \tilde{E}_0 das n -Eck bestehend aus den Punkten $p_1, \dots, p_{k-1}, \tilde{p}_k, \tilde{p}_{k+1}, p_{k+2}, \dots, p_n$ ist, gilt folglich ebenfalls $A(\tilde{E}_0) > A(E_0)$. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu $\frac{A(E_0)}{L(E_0)^2} = \max\left\{\frac{A(E)}{L(E)^2} \mid E \in \mathcal{E}_n\right\}$. \square

Diese zwei Behauptungen vollenden den Beweis. \square

Wir wollen nun $\max_{E \in \mathcal{E}_n} \frac{A(E)}{L(E)^2}$ explizit berechnen. Bezeichne dazu P_n ein regelmässiges n -Eck mit Eckpunkten auf dem Einheitskreis. Mit grundlegender Trigonometrie folgt $A(P_n) = \frac{n}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ und $L(P_n) = n\sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$. Lemma 1.6 liefert deswegen

$$\max_{E \in \mathcal{E}_n} \frac{A(E)}{L(E)^2} = \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{4n(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right))} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{2\pi}{n}\right)}}{4n(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right))} = \frac{1}{4n} \sqrt{\frac{1 + \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{1 - \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)}}.$$

Wir wollen zeigen, dass dies eine monoton steigende Folge ist. Betrachte dazu die Funktion

$$g : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x \sqrt{\frac{1 + \cos(x)}{1 - \cos(x)}}.$$

Für alle $x \in (0, \pi)$ gilt

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \sqrt{\frac{1 + \cos(x)}{1 - \cos(x)}} + x \frac{-\sin(x)(1 - \cos(x)) - (1 + \cos(x)) \sin(x)}{(1 - \cos(x))^2} \\
&= \sqrt{\frac{1 + \cos(x)}{1 - \cos(x)}} + x \frac{-2\sin(x)}{2\sqrt{\frac{1 + \cos(x)}{1 - \cos(x)}}} \\
&= \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}} \left(\frac{1 + \cos(x)}{1 - \cos(x)} - x \frac{\sin(x)}{(1 - \cos(x))^2} \right) \\
&= \frac{1}{(1 - \cos(x))^2} \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}} ((1 + \cos(x))(1 - \cos(x)) - x \sin(x)) \\
&= \frac{\sin(x)}{(1 - \cos(x))^2} \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}} (\sin(x) - x) \\
&< 0,
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt $\sin(x) < x$ für alle $x > 0$ verwendet haben. Wegen $\max_{E \in \mathcal{E}_n} \frac{A(E)}{L(E)^2} = \frac{1}{8\pi} g\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ ist $\left(\max_{E \in \mathcal{E}_n} \frac{A(E)}{L(E)^2}\right)_{n \geq 3}$ eine streng monoton steigende Folge. Für jede natürliche Zahl $N \geq 3$ gilt deshalb

$$\max_{E \in \mathcal{E}_N} \frac{A(E)}{L(E)^2} < \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{E \in \mathcal{E}_n} \frac{A(E)}{L(E)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(P_n)}{L(P_n)^2} = \frac{A(S^1)}{L(S^1)^2} = \frac{1}{4\pi}.$$

Mit $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ haben wir also ein Beispiel für eine differenzierbare einfach geschlossene Kurve mit $\frac{A(\gamma)}{L(\gamma)^2} > \max_{E \in \mathcal{E}_N} \frac{A(E)}{L(E)^2}$ für alle $N \geq 3$.

1.3 Beweis der isoperimetrischen Ungleichung

Mit den Resultaten des vorherigen Abschnittes sind wir dem Beweis von Satz 1.1 schon sehr viel näher.

Proposition 1.7. *Für jede differenzierbare, einfach geschlossene Kurve γ gilt*

$$\frac{A(\gamma)}{L(\gamma)^2} \leq \frac{1}{4\pi},$$

wobei $L(\gamma)$ die Länge von γ und $A(\gamma)$ der von γ eingeschlossene Flächeninhalt ist.

Beweis. Setze $\mathcal{Q}_+ = \frac{1}{4\pi}$. Nehme an, es gibt eine einfach geschlossene Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\frac{A(\gamma)}{L(\gamma)^2} > \mathcal{Q}_+$. Schreibe deshalb $\frac{A(\gamma)}{L(\gamma)^2} = \mathcal{Q}_+ + \delta_0$ mit einem $\delta_0 > 0$. Setze $\varepsilon_0 := \min\{\frac{1}{2}, \frac{L(\gamma)^2}{A(\gamma)}\delta_0\}$. Aus der Differenzierbarkeit von γ folgt die Existenz einer Partition $P = \{t_0, \dots, t_N\}$ von $[a, b]$ mit

$$|A(\gamma) - A(P_\gamma)| = |A(G_\gamma) - A(P_\gamma)| \leq \varepsilon_0 A(\gamma),$$

wobei P_γ das N -Eck mit den Eckpunkten $\gamma(t_0), \dots, \gamma(t_{N-1})$ ist. Aus

$$L(P_\gamma) = l(\gamma; P) \leq \sup\{l(\gamma; P) | P \text{ ist eine Partition von } [a, b]\} = L(\gamma)$$

folgt

$$\frac{A(P_\gamma)}{L(P_\gamma)^2} \geq \frac{A(\gamma)}{L(\gamma)^2} (1 - \varepsilon_0).$$

Da P_γ ein N -Eck ist, gilt weiterhin $\frac{A(P_\gamma)}{L(P_\gamma)^2} < \mathcal{Q}_+$. Daraus folgt

$$\delta_0 < \frac{A(\gamma)}{L(\gamma)^2} - \frac{A(P_\gamma)}{L(P_\gamma)^2} \leq \frac{A(\gamma)}{L(\gamma)^2} - \frac{A(\gamma)}{L(\gamma)^2} (1 - \varepsilon_0) = \frac{A(\gamma)}{L(\gamma)^2} \varepsilon_0 \leq \frac{A(\gamma)}{L(\gamma)^2} \frac{L(\gamma)^2}{A(\gamma)} \delta_0 = \delta_0,$$

was ein Widerspruch ist. □

Um Satz 1.1 zu beweisen, müssen wir nur noch zeigen, dass Gleichheit genau dann eintritt, wenn die Spur von γ einem Kreis entspricht. Da man reguläre Kurven nach Bogenlänge parametrisieren kann und $A(\gamma)$ und $L(\gamma)$ unabhängig von orientierungserhaltenden Umparametrisierungen sind, können wir ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit annehmen, dass γ nach Bogenlänge parametrisiert ist.

Sei nun $\gamma : [0, L(\gamma)] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $\frac{A(\gamma)}{L(\gamma)^2} = \frac{1}{4\pi}$. Definiere eine Familie von Kurven $(\gamma_\varepsilon)_{\varepsilon \geq 0}$ durch

$$\gamma_\varepsilon : [0, L(\gamma)] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto \gamma(t) + \varepsilon f(t) \nu_\gamma(t),$$

wobei $f : [0, L(\gamma)] \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion ist, die $f^{(n)}(0) = f^{(n)}(L(\gamma))$ für alle nichtnegativen ganzen Zahlen n erfüllt, und ν_γ den Normalenvektor von γ bezeichnet. Für kleine ε ist γ_ε auch wieder eine einfach geschlossene Kurve.

Einfache Rechnungen zeigen, dass

$$\begin{aligned} \partial_\varepsilon \gamma_\varepsilon(t) &= f(t) \nu_\gamma(t) \\ \gamma'_\varepsilon(t) &= (1 - \varepsilon f(t) \kappa_\gamma(t)) \gamma'(t) + \varepsilon f'(t) \nu_\gamma(t) \\ \partial_\varepsilon \gamma'_\varepsilon(t) &= -f(t) \kappa_\gamma(t) \gamma'(t) + f'(t) \nu_\gamma(t) \end{aligned}$$

für alle $t \in [0, L(\gamma)]$ und $\varepsilon \geq 0$ gilt. Daraus folgen

$$\begin{aligned}
\partial_\varepsilon L(\gamma_\varepsilon)|_{\varepsilon=0} &= \partial_\varepsilon \left(\int_0^{L(\gamma)} \|\gamma'_\varepsilon(t)\| dt \right) \Big|_{\varepsilon=0} \\
&= \int_0^{L(\gamma)} \partial_\varepsilon \|\gamma'_\varepsilon(t)\| \Big|_{\varepsilon=0} dt \\
&= \int_0^{L(\gamma)} \partial_\varepsilon \sqrt{\langle \gamma'_\varepsilon(t), \gamma'_\varepsilon(t) \rangle} \Big|_{\varepsilon=0} dt \\
&= \int_0^{L(\gamma)} \frac{\partial_\varepsilon \langle \gamma'_\varepsilon(t), \gamma'_\varepsilon(t) \rangle \Big|_{\varepsilon=0}}{2\sqrt{\langle \gamma'_\varepsilon(t), \gamma'_\varepsilon(t) \rangle} \Big|_{\varepsilon=0}} dt \\
&= \int_0^{L(\gamma)} \frac{2\langle \partial_\varepsilon \gamma'_\varepsilon(t)|_{\varepsilon=0}, \gamma'_\varepsilon(t)|_{\varepsilon=0} \rangle}{2\|\gamma'(t)\|} dt \\
&= \int_0^{L(\gamma)} \langle -f(t)\kappa_\gamma(t)\gamma'(t) + f'(t)\nu_\gamma(t), \gamma'(t) \rangle dt \\
&= - \int_0^{L(\gamma)} f(t)\kappa_\gamma(t) dt
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\partial_\varepsilon A(\gamma_\varepsilon)|_{\varepsilon=0} &= \partial_\varepsilon \left(\frac{1}{2} \int_0^{L(\gamma)} \det(\gamma_\varepsilon(t), \gamma'_\varepsilon(t)) dt \right) \Big|_{\varepsilon=0} \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{L(\gamma)} \partial_\varepsilon \det(\gamma_\varepsilon(t), \gamma'_\varepsilon(t)) \Big|_{\varepsilon=0} dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{L(\gamma)} \det(\partial_\varepsilon \gamma_\varepsilon(t)|_{\varepsilon=0}, \gamma'_\varepsilon(t)|_{\varepsilon=0}) + \det(\gamma_\varepsilon(t)|_{\varepsilon=0}, \partial_\varepsilon \gamma'_\varepsilon(t)|_{\varepsilon=0}) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{L(\gamma)} \det(f(t)\nu_\gamma(t), \gamma'(t)) + \det(\gamma(t), (f(t)\nu(t))') dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{L(\gamma)} \det(f(t)\nu_\gamma(t), \gamma'(t)) - \det((f(t)\nu(t))', \gamma(t)) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{L(\gamma)} 2 \det(f(t)\nu_\gamma(t), \gamma'(t)) - (\det(f(t)\nu(t), \gamma(t)))' dt \\
&= - \int_0^{L(\gamma)} f(t) \det(\gamma'(t), \nu_\gamma(t)) dt - \frac{1}{2} \det(f(t)\nu(t), \gamma(t)) \Big|_{t=0}^{t=L(\gamma)} \\
&= - \int_0^{L(\gamma)} f(t) dt.
\end{aligned}$$

Wegen $\frac{A(\gamma)}{L(\gamma)^2} = \frac{1}{4\pi} \geq \frac{A(\gamma_\varepsilon)}{L(\gamma_\varepsilon)^2}$ gilt:

$$0 = \partial_\varepsilon \left(\frac{A(\gamma_\varepsilon)}{L(\gamma_\varepsilon)^2} \right) \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{L(\gamma)^2 \partial_\varepsilon A(\gamma_\varepsilon)|_{\varepsilon=0} - 2A(\gamma)L(\gamma)\partial_\varepsilon L(\gamma_\varepsilon)|_{\varepsilon=0}}{L(\gamma)^4}$$

Da $L(\gamma) \neq 0$, folgt mit den vorher durchgeführten Berechnungen:

$$L(\gamma) \int_0^{L(\gamma)} f(t) dt = 2A(\gamma) \int_0^{L(\gamma)} f(t)\kappa_\gamma(t) dt \quad (1.3)$$

Einsetzen von $f(t) \equiv 1$ in (1.3) liefert:

$$L(\gamma)^2 = 2A(\gamma) \int_0^{L(\gamma)} \kappa_\gamma(t) dt = 4\pi A(\gamma)$$

Auch wenn wir schon gesehen haben, dass $\frac{A(\alpha)}{L(\alpha)^2} \leq \frac{1}{4\pi}$ für jede reguläre einfach geschlossene Kurve α gilt, bemerken wir an dieser Stelle, dass die Existenz einer Kurve, welche $\frac{A(\cdot)}{L(\cdot)^2}$ maximiert, ebenfalls diese

Ungleichung liefert.

Aus dem Einsetzen von $f(t) = \kappa_\gamma(t)$ in (1.3) folgt

$$2\pi L(\gamma) = L(\gamma) \int_0^{L(\gamma)} \kappa_\gamma(t) dt = 2A(\gamma) \int_0^{L(\gamma)} \kappa_\gamma^2(t) dt$$

und daraus wiederum

$$\int_0^{L(\gamma)} \kappa_\gamma^2(t) dt = \pi \frac{L(\gamma)}{A(\gamma)} = \frac{4\pi^2}{L(\gamma)}.$$

Wegen der Cauchy-Schwarz-Ungleichung für Integrale gilt weiterhin:

$$\begin{aligned} 4\pi^2 L(\gamma)^2 &= L(\gamma)^3 \frac{4\pi^2}{L(\gamma)} \\ &= \left(\int_0^{L(\gamma)} L(\gamma)^2 dt \right) \left(\int_0^{L(\gamma)} \kappa_\gamma^2(t) dt \right) \\ &\geq \left(\int_0^{L(\gamma)} L(\gamma) \kappa_\gamma(t) dt \right)^2 \\ &= L(\gamma)^2 \left(\int_0^{L(\gamma)} \kappa_\gamma(t) dt \right)^2 \\ &= L(\gamma)^2 (2\pi)^2 \\ &= 4\pi^2 L(\gamma)^2 \end{aligned}$$

Da die linke und die rechte Seite gleich sind, muss bei der Cauchy-Schwarz-Ungleichung ebenfalls Gleichheit gelten. Also sind die Funktionen κ_γ und $g : [0, L(\gamma)] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto L(\gamma)$ linear abhängig in $C([0, L(\gamma)], \mathbb{R})$, d.h. κ_γ ist ebenfalls konstant.

Bekanntlich ist die Spur einer Kurve mit konstanter Krümmung Teilmenge einer Geraden, falls $\kappa_\gamma = 0$, oder eines Kreises, falls $\kappa_\gamma \neq 0$. Da die Kurve γ allerdings einfach geschlossen ist, muss ihre Spur ein Kreis sein. Damit ist die isoperimetrische Ungleichung für differenzierbare Kurven vollständig bewiesen.

1.4 Die isoperimetrische Ungleichung für Gebiete mit glattem Rand

Wir wollen die isoperimetrische Ungleichung ebenfalls für beschränkte Gebiete mit glattem Rand formulieren. Deshalb die folgende Definition.

Definition 1.8. Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit Rand ∂G . Der Rand ∂G heisst *glatt*, falls eine natürliche Zahl N und reguläre, einfach geschlossene Kurven $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ mit

$$\partial G = \text{Spur}(\gamma_1) \cup \dots \cup \text{Spur}(\gamma_N)$$

und $\text{Spur}(\gamma_i) \cap \text{Spur}(\gamma_j) = \emptyset$, wenn $i \neq j$, existieren.

Satz 1.9. (Isoperimetrische Ungleichung für Gebiete mit glattem Rand)

Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand ∂G . $A(G)$ bezeichne die Fläche von G und $L(\partial G)$ die Länge des Randes ∂G . Dann gilt

$$A(G) \leq \frac{L(\partial G)^2}{4\pi} \tag{1.4}$$

und Gleichheit tritt genau dann ein, wenn $G \cup \partial G$ eine Kreisscheibe ist.

Beweis. Seien $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ reguläre, einfach geschlossene Kurven mit $\partial G = \text{Spur}(\gamma_1) \cup \dots \cup \text{Spur}(\gamma_N)$ und $\text{Spur}(\gamma_i) \cap \text{Spur}(\gamma_j) = \emptyset$ wenn $i \neq j$. Jede Kurve γ_i beschränkt ein Gebiet G_i mit Flächeninhalt $A(G_i) = A(\gamma_i)$. Es kann sein, dass $i_1, i_2 \in \{1, \dots, N\}$ mit $i_1 \neq i_2$ aber $G_{i_1} \subset G_{i_2}$ existieren. Deshalb gilt $A(G) \leq \sum_{i=1}^N A(G_i)$. Mit Satz 1.1 folgt ausserdem

$$A(G) \leq \sum_{i=1}^N A(\gamma_i) \leq \sum_{i=1}^N \frac{L(\gamma_i)^2}{4\pi} \leq \frac{1}{4\pi} \left(\sum_{i=1}^N L(\gamma_i) \right)^2 = \frac{L(\partial G)^2}{4\pi},$$

wobei bei der dritten Ungleichung wegen $L(\gamma_i) > 0$ Gleichheit genau dann eintritt, wenn $N = 1$. Bei der zweiten Ungleichung tritt nach Satz 1.1 genau dann Gleichheit ein, wenn $\text{Spur}(\gamma_1)$ ein Kreis ist. Damit ist der Satz bewiesen. \square

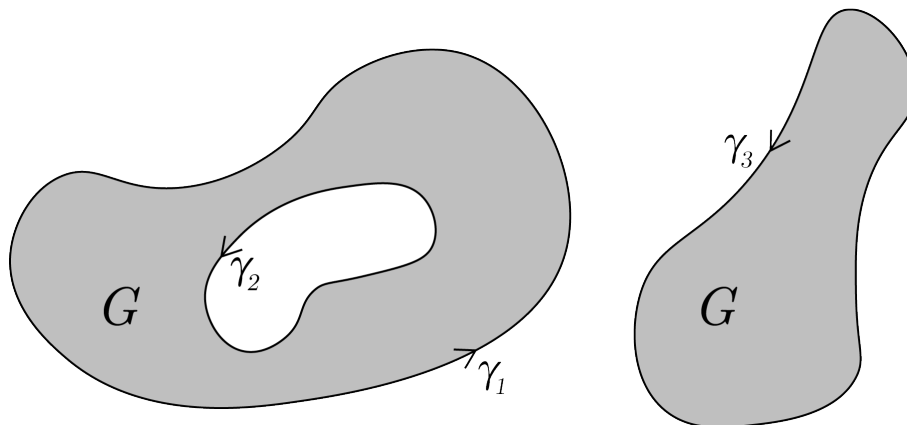


Abbildung 4: Ein Gebiet G mit $A(G) = A(\gamma_1) - A(\gamma_2) + A(\gamma_3)$

2 Volumenfreundliche euklidische Räume

2.1 Fragestellung

Im Abschnitt 1.4 haben wir gesehen, dass für jedes beschränkte Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ mit glattem Rand gilt:

$$\frac{A(G)}{L(\partial G)^2} \leq \frac{A(B^2)}{L(S^1)^2}$$

Die Fläche $A(G)$ von G ist natürlich nichts anderes als das zweidimensionale Volumen von G und die Länge des Randes $L(\partial G)$ entspricht dessen eindimensionalem Volumen. Wir können uns denken, dass in höheren Dimensionen folgendes Analogon gilt:

Sei \mathcal{M} eine beschränkte Teilmenge des \mathbb{R}^n , sodass $\partial\mathcal{M}$ eine Hyperfläche ist. Dann gilt

$$\frac{(\text{vol}_n(\mathcal{M}))^{n-1}}{(\text{vol}_{n-1}(\partial\mathcal{M}))^n} \leq \frac{(\text{vol}_n(B^n))^{n-1}}{(\text{vol}_{n-1}(S^{n-1}))^n},$$

wobei Gleichheit genau dann eintritt, wenn \mathcal{M} durch Streckung und Translation aus B^n hervorgeht. Dabei ist $B^n := \{p \in \mathbb{R}^n \mid \|p\| < 1\}$ der n -Ball und die $(n-1)$ -Sphäre $S^{n-1} := \{p \in \mathbb{R}^n \mid \|p\| = 1\}$ dessen Rand.

Es stellt sich nun die Frage, ob $\frac{(\text{vol}_n(B^n))^{n-1}}{(\text{vol}_{n-1}(S^{n-1}))^n}$ unbegrenzt wächst, ein Supremum aber kein Maximum besitzt oder für welche natürlichen n das Maximum angenommen wird. Auch wenn wir noch nicht wissen, dass ein Maximum existiert, führen wir die folgende Sprechweise ein. Das soeben aufgeführte Analogon sollte diese Sprechweise erklären.

Definition 2.1. Ein euklidischer Raum \mathbb{R}^N heißt volumenfreundlicher euklidischer Raum, falls

$$\frac{(\text{vol}_N(B^N))^{N-1}}{(\text{vol}_{N-1}(S^{N-1}))^N} = \max_{n \in \mathbb{N}} \frac{(\text{vol}_n(B^n))^{n-1}}{(\text{vol}_{n-1}(S^{n-1}))^n}.$$

Unser Ziel ist es, alle volumenfreundlichen euklidischen Räume zu bestimmen. Um dieses Ziel zu erreichen, berechnen wir zuerst $\text{vol}_{n-1}(S^{n-1})$.

2.2 Berechnung der Oberfläche der $(n-1)$ -Sphäre

Betrachte die Abbildungen

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2, u_1 \longmapsto (\cos u_1, \sin u_1) \\ \varphi_n : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, (u, u_n) \longmapsto (\sin u_n \varphi_{n-1}(u), \cos u_n) \end{aligned}$$

mit der natürlichen Identifikation $\mathbb{R}^{m+1} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ für $m = n-1, n$ und $(u_1, \dots, u_n) = (u, u_n)$. Es ist leicht einzusehen, dass $\varphi_{n-1}([0, 2\pi] \times [0, \pi]^{n-2}) = S^{n-1}$ gilt, φ_{n-1} auf $(0, 2\pi) \times (0, \pi)^{n-2}$ allerdings injektiv ist. Deshalb (siehe [Forster, 2012]) gilt

$$\text{vol}_{n-1}(S^{n-1}) = \int_{[0, 2\pi] \times [0, \pi]^{n-2}} \sqrt{\det(g_{ij, n-1}(u))} d^{n-1}u, \quad (2.1)$$

wobei $(g_{ij, n-1}(u)) = ((\partial_i \varphi_{n-1}(u), \partial_j \varphi_{n-1}(u)))_{1 \leq i, j \leq n-1}$ die erste Fundamentalform von φ_{n-1} in u ist. Um dies explizit zu berechnen, wollen wir eine Rekursionsformel für $\det(g_{ij, n}(u))$ herleiten. Wegen

$$\begin{aligned} \partial_n \varphi_n(u, u_n) &= (\cos u_n \varphi_{n-1}(u), -\sin u_n) \\ \partial_k \varphi_n(u, u_n) &= (\sin u_n \partial_k \varphi_{n-1}(u), 0) \end{aligned}$$

für $k \in \{1, \dots, n-1\}$, folgt für alle $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$

$$\begin{aligned} g_{ij, n}(u, u_n) &= \sin^2 u_n g_{ij, n-1}(u) \\ g_{nj, n}(u, u_n) &= g_{jn, n}(u, u_n) = 0 \\ g_{nn, n}(u, u_n) &= 1, \end{aligned}$$

wobei wir $\langle (v, v_{n+1}), (w, w_{n+1}) \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} = \langle v, w \rangle_{\mathbb{R}^n} + v_{n+1} w_{n+1}$ für alle $(v, v_{n+1}), (w, w_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\langle \partial_j \varphi_{n-1}(u), \varphi_{n-1}(u) \rangle = \frac{1}{2} \partial_j \langle \varphi_{n-1}(u), \varphi_{n-1}(u) \rangle$ und $\langle \varphi_{n-1}(u), \varphi_{n-1}(u) \rangle = 1$ verwendet haben. Also ist

$$(g_{ij, n}) = \begin{pmatrix} \sin^2 u_n g_{11, n-1} & \dots & \sin^2 u_n g_{1(n-1), n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sin^2 u_n g_{(n-1)1, n-1} & \dots & \sin^2 u_n g_{(n-1)(n-1), n-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

woraus wir mit dem Laplace'schen Entwicklungssatz

$$\det(g_{ij, n}(u, u_n)) = \sin^{2(n-1)} u_n \det(g_{ij, n-1}(u)) \quad (2.2)$$

schliessen. Einsetzen in (2.1) liefert

$$\begin{aligned} \text{vol}_n(S^n) &= \int_{[0, 2\pi] \times [0, \pi]^{n-1}} \sqrt{\det(g_{ij, n}(u))} d^n u \\ &= \int_{[0, 2\pi] \times [0, \pi]^{n-1}} \sin^{n-1} u_n \sqrt{\det(g_{ij, n-1}(u))} d^n u \\ &= \left(\int_{[0, 2\pi] \times [0, \pi]^{n-2}} \sqrt{\det(g_{ij, n-1}(u))} d^{n-1} u \right) \left(\int_0^\pi \sin^{n-1} u_n du_n \right) \\ &= \text{vol}_{n-1}(S^{n-1}) \int_0^\pi \sin^{n-1} u du. \end{aligned}$$

Um dies weiter zu vereinfachen, ist eine genauere Kenntnis der Integrale $\int_0^\pi \sin^m u du$ nötig. Für $m \geq 2$ folgt mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin^m u du &= \int_0^\pi \sin u \sin^{m-1} u du \\ &= [-\sin^{m-1} u \cos u]_0^\pi - \int_0^\pi (m-1)(-\cos u) \sin^{m-2} u \cos u du \\ &= (m-1) \int_0^\pi \sin^{m-2} u (1 - \sin^2 u) du \\ &= (m-1) \int_0^\pi \sin^{m-2} u du - (m-1) \int_0^\pi \sin^m u du, \end{aligned}$$

weshalb

$$\int_0^\pi \sin^m u du = \frac{m-1}{m} \int_0^\pi \sin^{m-2} u du$$

gilt. Wegen $\int_0^\pi \sin u \, du = 2$ und $\int_0^\pi \sin^0 u \, du = \pi$ lässt sich daraus speziell

$$\begin{cases} \int_0^\pi \sin^{2k} u \, du = \frac{\pi}{2^k k!} \prod_{i=1}^{k-1} (2i+1) \\ \int_0^\pi \sin^{2k+1} u \, du = \frac{2^{k+1} k!}{\prod_{i=1}^k (2i+1)} \end{cases} \quad (2.3)$$

für alle nichtnegativen ganzen Zahlen k schliessen. Damit haben wir alles, um $\text{vol}_{n-1}(S^{n-1})$ in einer geschlossenen Form anzugeben.

Lemma 2.2. *Für jede positive ganze Zahl k gilt*

$$\text{vol}_{2k-1}(S^{2k-1}) = \frac{2\pi^k}{(k-1)!} \quad (2.4)$$

und

$$\text{vol}_{2k}(S^{2k}) = \frac{2^{k+1} \pi^k}{\prod_{i=1}^{k-1} (2i+1)}. \quad (2.5)$$

Beweis. Wir führen einen Induktionsbeweis. Für $k = 1$ stimmen die Formeln mit den wohlbekannten Werten für den Umfang des Einheitskreises und die Oberfläche der Einheitssphäre S^2 überein. Nehme nun an, dass die zu beweisenden Formeln für alle natürlichen Zahlen kleiner gleich k stimmen. Dann gilt wegen $\text{vol}_n(S^n) = \text{vol}_{n-1}(S^{n-1}) \int_0^\pi \sin^{n-1} u \, du$ und (2.3) ebenfalls

$$\begin{aligned} \text{vol}_{2k+1}(S^{2k+1}) &= \text{vol}_{2k}(S^{2k}) \int_0^\pi \sin^{2k} u \, du = \frac{2^{k+1} \pi^k}{\prod_{i=1}^{k-1} (2i+1)} \frac{\pi}{2^k k!} \prod_{i=1}^{k-1} (2i+1) = \frac{2\pi^{k+1}}{k!} \\ \text{vol}_{2k+2}(S^{2k+2}) &= \text{vol}_{2k+1}(S^{2k+1}) \int_0^\pi \sin^{2k+1} u \, du = \frac{2\pi^{k+1}}{k!} \frac{2^{k+1} k!}{\prod_{i=1}^k (2i+1)} = \frac{2^{k+2} \pi^{k+1}}{\prod_{i=1}^k (2i+1)}. \end{aligned}$$

Dies beendet den Beweis. \square

2.3 Bestimmung der volumenfreundlichen euklidischen Räume

Die nächste Proposition beantwortet die zu Beginn gestellte Frage über volumenfreundliche euklidische Räume. Wie wir im Beweis sehen werden, genügt die Kenntnis über $\text{vol}_{n-1}(S^{n-1})$ vollständig, um dies zu tun.

Proposition 2.3. \mathbb{R}^2 ist der einzige volumenfreundliche euklidische Raum.

Beweis. Wir verwenden in diesem Beweis die Notation $\sigma_n := \frac{(\text{vol}_n(B^n))^{n-1}}{(\text{vol}_{n-1}(S^{n-1}))^n}$. Die folgende Behauptung erlaubt es, σ_n in einer deutlich einfacheren Form zu schreiben.

Behauptung. Für alle natürlichen n gilt $\text{vol}_n(B^n) = \frac{1}{n} \text{vol}_{n-1}(S^{n-1})$.

Beweis der Behauptung. Auf S^{n-1} kann man $\nu(x) = x$ als globales Einheitsnormalenvektorfeld wählen. Nach dem Gaussischen Integralsatz (siehe [Forster, 2012]) gilt für jede differenzierbare Abbildung $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\int_{B^n} \text{div} F(x) \, d^n x = \int_{S^{n-1}} \langle F(x), \nu(x) \rangle \, dS(x).$$

Die Behauptung folgt aus der Wahl von F als $F(x) = x$ und der Tatsache, dass $\|x\| = 1$ für alle $x \in S^{n-1}$ gilt. \square

Deshalb ist

$$\sigma_n = \frac{(\text{vol}_n(B^n))^{n-1}}{(\text{vol}_{n-1}(S^{n-1}))^n} = \left(\frac{\text{vol}_n(B^n)}{\text{vol}_{n-1}(S^{n-1})} \right)^{n-1} \frac{1}{\text{vol}_{n-1}(S^{n-1})} = \frac{1}{n^{n-1} \text{vol}_{n-1}(S^{n-1})}.$$

Mit Lemma 2.2 folgt weiterhin

$$\begin{aligned} \sigma_{2k} &= \frac{(k-1)!}{2\pi^k (2k)^{2k-1}} > \frac{k!}{2\pi^{k+1} (2k+2)^{2k+1}} = \sigma_{2k+2} \\ \sigma_{2k+1} &= \frac{\prod_{i=1}^{k-1} (2i+1)}{2^{k+1} \pi^k (2k+1)^{2k}} > \frac{\prod_{i=1}^k (2i+1)}{2^{k+2} \pi^{k+1} (2k+3)^{2k+2}} = \sigma_{2k+3} \end{aligned}$$

für alle natürlichen k . Wegen $\sigma_2 = \frac{1}{4\pi} > \frac{1}{36\pi} = \sigma_3$ gilt also $\sigma_2 > \sigma_n$ für jedes natürliche n grösser gleich 3. \square

Teil II

Minimalflächen

3 Definition

Bevor wir uns der Definition einer Minimalfläche widmen und erste Eigenschaften dieser kennenlernen, wollen wir einen Blick auf die zugrundeliegende Problemstellung werfen. Danach geben wir eine Motivation, um die Definition zu rechtfertigen. Bei der Motivation gehen wir von dem geometrischen Problem aus und probieren dieses mit algebraischen Grössen zu fassen. Dabei werden wir sehen, dass die Krümmung eine zentrale Rolle spielt. Nun aber zu der Problemstellung.

Problem: *Gegeben sei(en) eine (oder mehrere) geschlossene glatte Raumkurve(n). Betrachte alle glatten Flächen, welche diese geschlossene(n) Raumkurve(n) als Rand besitzen. Finde unter diesen Flächen diejenige mit dem kleinsten Flächeninhalt.*

Die Idee, mit welcher wir die anschliessende Definition motivieren wollen, ist die folgende. Wir betrachten eine glatte Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ und verändern das Innere dieser Fläche, lassen den Rand aber unverändert. Dadurch erhalten wir eine Familie $(S_\varepsilon)_{\varepsilon \geq 0}$ von Flächen mit gleichem Rand. Falls nun S den kleinsten Flächeninhalt aller dieser Flächen besitzt, gilt $\partial_\varepsilon A(S_\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = 0$.

Sei S eine orientierte, nicht abgeschlossene, beschränkte glatte Fläche und $f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine differenzierbare Funktion mit $\lim_{p \rightarrow \partial S} f(p) = 0$. Wir wollen nun S entlang des Normalvektors bzgl. der Funktion f variieren. Betrachte dazu die Familie von Abbildungen $(\psi_\varepsilon)_{\varepsilon \geq 0}$ gegeben durch

$$\psi_\varepsilon : S \rightarrow \mathbb{R}^3, p \mapsto p + \varepsilon f(p)\nu(p),$$

wobei $\nu : S \rightarrow S^2$ die Gaussabbildung bezeichnet. Für kleine ε ist $S_\varepsilon := \psi_\varepsilon(S)$ auch wieder eine glatte Fläche mit $\partial S_\varepsilon = \partial S$. Ist $p \in S$ und $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, u = (u_1, u_2) \rightarrow \varphi(u)$ eine lokale Parametrisierung von p , dann ist $\varphi_\varepsilon := \psi_\varepsilon \circ \varphi$ eine lokale Parametrisierung von $\psi_\varepsilon(p)$. Sei $g_{\varepsilon, ij}(u) := \langle \partial_i \varphi_\varepsilon(u), \partial_j \varphi_\varepsilon(u) \rangle$ die erste Fundamentalform einer solchen lokalen Parametrisierung φ_ε und $g_\varepsilon(u) := \det((g_{\varepsilon, ij}(u))_{ij})$. Dann gilt für jedes $u \in U$

$$\sqrt{g_\varepsilon(u)} = \|n_\varepsilon(u)\|,$$

wobei $n_\varepsilon(u) := \partial_1 \varphi_\varepsilon(u) \wedge \partial_2 \varphi_\varepsilon(u)$. Aus

$$\partial_\varepsilon \partial_i \varphi_\varepsilon(u)|_{\varepsilon=0} = f(\varphi(u))(\mathrm{d}\nu)_{\varphi(u)}(\partial_i \varphi(u)) + (\mathrm{d}f)_{\varphi(u)}(\partial_i \varphi(u))\nu(\varphi(u))$$

schliessen wir mit $v \wedge w = -w \wedge v$

$$\begin{aligned} \partial_\varepsilon n_\varepsilon(u)|_{\varepsilon=0} &= \partial_\varepsilon (\partial_1 \varphi_\varepsilon(u) \wedge \partial_2 \varphi_\varepsilon(u))|_{\varepsilon=0} \\ &= \partial_\varepsilon \partial_1 \varphi(u)|_{\varepsilon=0} \wedge \partial_2 \varphi(u) + \partial_1 \varphi(u) \wedge \partial_\varepsilon \partial_2 \varphi(u)|_{\varepsilon=0} \\ &= f(\varphi(u)) \left((\mathrm{d}\nu)_{\varphi(u)}(\partial_1 \varphi(u)) \wedge \partial_2 \varphi(u) + \partial_1 \varphi(u) \wedge (\mathrm{d}\nu)_{\varphi(u)}(\partial_2 \varphi(u)) \right) \\ &\quad + \left((\mathrm{d}f)_{\varphi(u)}(\partial_2 \varphi(u))\partial_1 \varphi(u) - (\mathrm{d}f)_{\varphi(u)}(\partial_1 \varphi(u))\partial_2 \varphi(u) \right) \wedge \nu(\varphi(u)). \end{aligned}$$

Daraus folgt wiederum

$$\begin{aligned} \langle \partial_\varepsilon n_\varepsilon(u)|_{\varepsilon=0}, n(u) \rangle &= f(\varphi(u)) \langle (\mathrm{d}\nu)_{\varphi(u)}(\partial_1 \varphi(u)) \wedge \partial_2 \varphi(u), n(u) \rangle \\ &\quad + f(\varphi(u)) \langle \partial_1 \varphi(u) \wedge (\mathrm{d}\nu)_{\varphi(u)}(\partial_2 \varphi(u)), n(u) \rangle \\ &= f(\varphi(u)) \langle (l_{11} \partial_1 \varphi(u) + l_{12} \partial_2 \varphi(u)) \wedge \partial_2 \varphi(u), n(u) \rangle \\ &\quad + f(\varphi(u)) \langle \partial_1 \varphi(u) \wedge (l_{21} \partial_1 \varphi(u) + l_{22} \partial_2 \varphi(u)), n(u) \rangle \\ &= f(\varphi(u)) (l_{11} + l_{22}) \langle \partial_1 \varphi(u) \wedge \partial_2 \varphi(u), n(u) \rangle \\ &= f(\varphi(u)) (l_{11} + l_{22}) \|n(u)\|^2 \\ &= f(\varphi(u)) \mathrm{Spur}(\mathrm{d}\nu)_{\varphi(u)} g(u) \\ &= 2f(\varphi(u)) H(\varphi(u)) g(u), \end{aligned}$$

wobei $\begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix}$ die Matrix des Differentials der Gaussabbildung bzgl. der Basis $\{\partial_1\varphi(u), \partial_2\varphi(u)\}$ ist. Deshalb gilt für ein kleines Flächenstück $\varphi_\varepsilon(U)$

$$\begin{aligned} \partial_\varepsilon A(\varphi_\varepsilon(U))|_{\varepsilon=0} &= \partial_\varepsilon \left(\int_U \sqrt{g_\varepsilon(u)} \, du \right) \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_U \partial_\varepsilon \sqrt{g_\varepsilon(u)} \Big|_{\varepsilon=0} \, du \\ &= \int_U \frac{\partial_\varepsilon g_\varepsilon(u)|_{\varepsilon=0}}{2\sqrt{g(u)}} \, du \\ &= \int_U \frac{\partial_\varepsilon \|n_\varepsilon(u), n_\varepsilon(u)\| |_{\varepsilon=0}}{2\sqrt{g(u)}} \, du \\ &= \int_U \frac{2\langle \partial_\varepsilon n_\varepsilon(u)|_{\varepsilon=0}, n(u) \rangle}{2\sqrt{g(u)}} \, du \\ &= \int_U 2f(\varphi(u))H(\varphi(u))\sqrt{g(u)} \, du \\ &= 2 \int_{\varphi(U)} f(p)H(p) \, dA. \end{aligned}$$

Dies überträgt sich vom lokalen auf den globalen Fall und wir erhalten:

$$\partial_\varepsilon A(S_\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = 2 \int_S f(p)H(p) \, dA$$

Es gilt $\partial_\varepsilon A(S_\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = 0$, falls die Fläche von S kleiner ist als die Fläche aller S_ε . Dabei hatten wir neben $\lim_{p \rightarrow \partial S} f(p) = 0$ keine weiteren Anforderungen an die Funktion. Wir können f also als $f(p) = \bar{f}(p)H(p)$ wählen, wobei $\bar{f} : S \rightarrow \mathbb{R}$ so gewählt ist³, dass f differenzierbar ist, $\bar{f}(p) > 0$ für alle $p \in S$ gilt und f die Bedingung $\lim_{p \rightarrow \partial S} f(p) = 0$ erfüllt. Mit dieser Wahl für f erhalten wir

$$0 = \partial_\varepsilon A_\varepsilon|_{\varepsilon=0} = 2 \int_S f(p)H(p) \, dA = 2 \int_S \underbrace{\bar{f}(p)}_{>0} \underbrace{H(p)}_{\geq 0} \, dA \geq 0.$$

Gleichheit kann aber nur eintreten, wenn die mittlere Krümmung konstant verschwindet. Dies sollte reichen, um die Definition einer Minimalfläche mit Leben zu füllen.

Definition 3.1. *Eine glatte, orientierte Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ heisst Minimalfläche, falls die mittlere Krümmung überall verschwindet, d.h. falls*

$$H(p) = 0$$

für alle $p \in S$ gilt.

Obwohl die mittlere Krümmung einer Fläche im Allgemeinen von der Orientierung abhängt, ist die Definition unabhängig von der gewählten Orientierung. Dies liegt daran, dass ein Wechsel der Orientierung lediglich das Vorzeichen der mittleren Krümmung ändert. Da wir aber verlangen, dass diese verschwindet, ist die gewählte Orientierung irrelevant.

Die Definition stellt keine Bedingungen an die Gausskrümmung der Fläche. Trotzdem haben alle Minimalflächen eine gemeinsame Eigenschaft in dieser Hinsicht.

Korollar 3.2. *Eine Minimalfläche besitzt keine elliptischen Punkte.*

Beweis. Sei $p \in S$ und κ_1, κ_2 die Hauptkrümmungen in p . Es gilt

$$H^2(p) - K(p) = \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \right)^2 - \kappa_1\kappa_2 = \left(\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{2} \right)^2 \geq 0,$$

wobei $K(p)$ die Gausskrümmung in p ist. Die Behauptung folgt aus dieser Ungleichung und der Definition einer Minimalfläche. \square

³Ob und wie man eine solche Funktion konstruieren kann ist hier nicht wichtig, da es sich lediglich um eine Motivierung und nicht einen Beweis handelt.

Auch wenn in der Problemstellung der Rand der Fläche von grosser Bedeutung war, haben wir in der Definition einer Minimalfläche gar nicht verlangt, dass eine Minimalfläche einen Rand besitzt. Eigentlich ist es noch schlimmer, da wir nicht einmal nach der Beschränktheit fragen. Dies ist jedoch kein Problem, denn ist eine unbeschränkte Minimalfläche gegeben, ist jede offene, beschränkte Teilmenge eine beschränkte Minimalfläche. Sobald wir aber Beschränktheit anfordern, ist es irrelevant, ebenfalls nach der Existenz eines Rands zu fragen, wie das nächste Korollar zeigt.

Korollar 3.3. *Jede beschränkte Minimalfläche besitzt einen Rand.*

Beweis. Angenommen es gibt eine beschränkte Minimalfläche ohne Rand, d.h. sie ist abgeschlossen. Es ist bekannt, dass jede orientierte, abgeschlossene, beschränkte, glatte Fläche mindestens einen elliptischen Punkt besitzt. Dies ist jedoch ein Widerspruch zum vorangegangenen Korollar. Die Annahme ist folglich zu verwerfen und die Aussage damit bewiesen. \square

4 Rotationsminimalflächen

In diesem Kapitel untersuchen wir Rotationsminimalflächen. Dies sind glatte Flächen, die Rotations- und Minimalfläche zugleich sind. Nachdem wir alle Rotationsminimalflächen charakterisiert haben, beschäftigen wir uns mit der Frage, wieviele dieser Flächen bei vorgegebenem Rand existieren.

4.1 Rotationsflächen

Zu Beginn müssen wir definieren, was wir unter einer Rotationsfläche verstehen.

Definition 4.1. *Eine glatte Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ heisst Rotationsfläche, falls ein offenes Intervall I und eine differenzierbare Kurve*

$$\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (r(t), h(t)),$$

mit $r(t) > 0$ für alle $t \in I$, existieren, sodass $\varphi(I \times \mathbb{R}) = S$ gilt, wobei φ als

$$\varphi : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, (t, \vartheta) \longmapsto (r(t) \cos \vartheta, r(t) \sin \vartheta, h(t))$$

definiert ist. γ heisst die erzeugende Kurve der Rotationsfläche.

Wir könnten eine Rotationsfläche allgemeiner definieren als eine glatte Fläche, die durch eine euklidische Bewegung aus einer Rotationsfläche im Sinn von Definition 4.1 hervorgeht. Um zu viel Notation zu vermeiden halten wir uns an die einfachere Form der Definition.

Bevor wir nun alle Rotationsminimalflächen bestimmen können, möchten wir untersuchen, wie die Krümmung der erzeugenden Kurve die Gausskrümmung der Rotationsfläche beeinflusst. Dies wird es uns erlauben, γ in einer simpleren Form zu schreiben, was spätere Berechnungen vereinfachen wird.

4.2 Einfluss der Krümmung der erzeugenden Kurve auf die Gausskrümmung der Rotationsfläche

Die Einschränkung $\varphi|_{I \times J}$, wobei J ein offenes Intervall mit einer Länge kleiner 2π ist, ist eine lokale Parametrisierung von S . Dies wollen wir jedoch nicht immer erwähnen und schreiben deshalb lediglich φ . Weiterhin können wir annehmen, dass γ nach Bogenlänge parametrisiert ist.

Um Aussagen über die Gausskrümmung von S machen zu können, benötigen wir Informationen über die erste und zweite Fundamentalform. Dafür berechnen wir die partiellen Ableitungen ersten und zweiten Grades von φ . Diese sind

$$\begin{aligned} \partial_t \varphi(t, \vartheta) &= (r'(t) \cos \vartheta, r'(t) \sin \vartheta, h'(t)) \\ \partial_{\vartheta} \varphi(t, \vartheta) &= (-r(t) \sin \vartheta, r(t) \cos \vartheta, 0) \\ \partial_{tt}^2 \varphi(t, \vartheta) &= (r''(t) \cos \vartheta, r''(t) \sin \vartheta, h''(t)) \\ \partial_{\vartheta t}^2 \varphi(t, \vartheta) &= (-r'(t) \sin \vartheta, r'(t) \cos \vartheta, 0) \\ \partial_{\vartheta \vartheta}^2 \varphi(t, \vartheta) &= (-r''(t) \cos \vartheta, -r''(t) \sin \vartheta, 0). \end{aligned}$$

Also hat die erste Fundamentalform bzgl. φ die Form

$$\begin{aligned}(g_{ij}) &= \begin{pmatrix} \langle \partial_t \varphi(t, \vartheta), \partial_t \varphi(t, \vartheta) \rangle & \langle \partial_t \varphi(t, \vartheta), \partial_\vartheta \varphi(t, \vartheta) \rangle \\ \langle \partial_\vartheta \varphi(t, \vartheta), \partial_t \varphi(t, \vartheta) \rangle & \langle \partial_\vartheta \varphi(t, \vartheta), \partial_\vartheta \varphi(t, \vartheta) \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r(t)^2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Nachrechnen zeigt, dass wir die Gaussabbildung als

$$\nu(\varphi(t, \vartheta)) = (-h'(t) \cos \vartheta, -h'(t) \sin \vartheta, r'(t))$$

wählen können. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}(h_{ij}) &= \begin{pmatrix} \langle \nu(t, \vartheta), \partial_{tt}^2 f(t, \vartheta) \rangle & \langle \nu(t, \vartheta), \partial_{t\vartheta}^2 f(t, \vartheta) \rangle \\ \langle \nu(t, \vartheta), \partial_{\vartheta t}^2 f(t, \vartheta) \rangle & \langle \nu(t, \vartheta), \partial_{\vartheta\vartheta}^2 f(t, \vartheta) \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r'(t)h''(t) - r''(t)h'(t) & 0 \\ 0 & r(t)h'(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \langle \gamma''(t), \nu_\gamma(t) \rangle & 0 \\ 0 & r(t)h'(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \kappa(t) & 0 \\ 0 & r(t)h'(t) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

für die zweite Fundamentalform bzgl. der lokalen Parametrisierung φ . Die Matrix des Differentials der Gaussabbildung im Punkt $p = \varphi(t_0, \vartheta_0)$ bzgl. der Basis $\{\partial_t \varphi(t_0, \vartheta_0), \partial_\vartheta \varphi(t_0, \vartheta_0)\}$ ist

$$\begin{aligned}(d\nu)_p &= -(g^{ij})(h_{ij}) \\ &= - \begin{pmatrix} \kappa(t_0) & 0 \\ 0 & \frac{h'(t_0)}{r(t_0)} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Also gilt

$$K(\varphi(t, \vartheta)) = \frac{\kappa(t)h'(t)}{r(t)}$$

und da $r(t) > 0$ für alle $t \in I$, folgt weiterhin

$$\operatorname{sgn}(K(\varphi(t, \vartheta))) = \operatorname{sgn}(\kappa(t)) \operatorname{sgn}(h'(t)).$$

Dies werden wir nun nutzen, um zu zeigen, dass falls S eine Rotationsminimalfläche ist, wir γ (bis auf Umparametrisierung) als $\gamma(t) = (r(t), t)$ schreiben können.

Nehme dazu an, dass dies nicht geht, d.h. es existieren ungleiche $a, b \in I$, die jedoch $h(a) = h(b)$ erfüllen. Da h differenzierbar ist, existiert nach dem Satz von Rolle ein $t_0 \in (a, b)$ mit $h'(t_0) = 0$. Entweder ist t_0 eine isolierte Nullstelle oder t_0 ist in einem Intervall (c, d) enthalten auf dem h' überall verschwindet. Nehme nun an, dass der zweite Fall eintritt. Nehme weiterhin an, dass das Intervall (c, d) maximal gewählt ist. S bleibt auch nach dem «Ausschneiden» von $(c, d) \setminus \{t_0\}$ eine Minimalfläche. Es reicht also lediglich

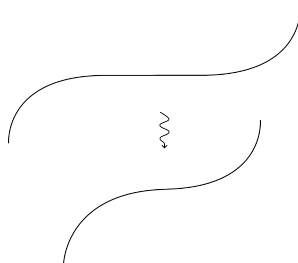
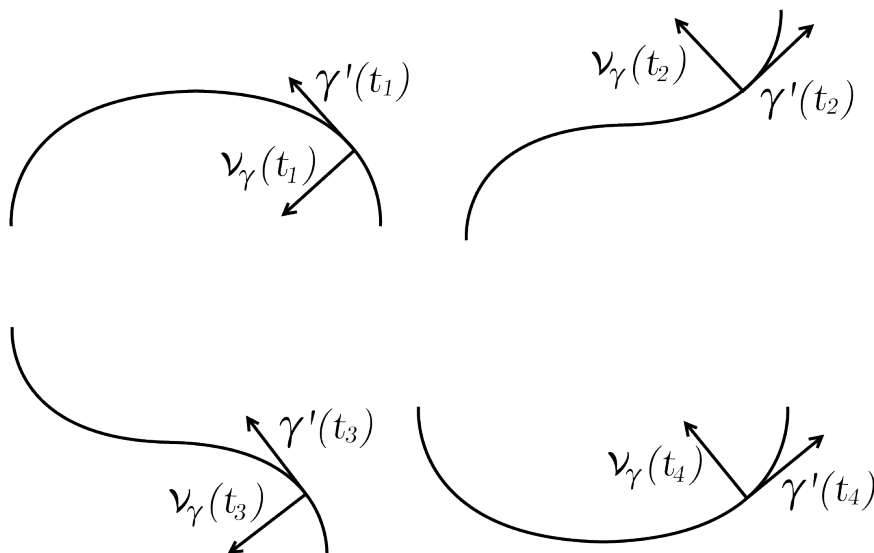


Abbildung 5: Ausschneiden von $(c, d) \setminus \{t_0\}$

den ersten Fall zu behandeln. Es gibt nun vier Möglichkeiten wie γ in der Nähe von $\gamma(t_0)$ aussieht. Betrachte dazu Abbildung 6. In jedem der Fälle existiert ein t_i mit $\kappa(t_i) > 0$ und $h'(t_i) > 0$. Daraus folgt $\operatorname{sgn}(K(\varphi(t_i, \vartheta))) = \operatorname{sgn}(\kappa(t_i)) \operatorname{sgn}(h'(t_i)) = 1$. Also besitzt S elliptische Punkte. Dies ist jedoch ein

Abbildung 6: Vier Fälle für die Form von γ in der Nähe von t_0

Widerspruch zu Korollar 3.2. Bei den Bildern haben wir angenommen, dass man γ in einer Umgebung von t_0 als Graph über der x - Achse darstellen kann. Dies beweisen wir nun noch.

Betrachte die Funktion

$$\pi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x$$

und die Komposition $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \pi_1(\gamma(t)) = r(t)$.

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{R}^2 \\ & \searrow \sigma & \downarrow \pi_1 \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} I' & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{R}^2 \\ & \searrow \sigma & \downarrow \pi_1 \\ & \swarrow \rho & \sigma(I') \end{array}$$

Da σ' stetig und $\sigma'(t_0) = r'(t_0) = \pm\sqrt{1 - h'(t_0)^2} = \pm 1 \neq 0$ ist, existieren nach dem Umkehrsatz eine Deltaumgebung $I' = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ von t_0 und eine differenzierbare lokale Umkehrfunktion $\rho : \sigma(I') \rightarrow I'$ von σ . $\gamma \circ \rho$ ist als Komposition differenzierbarer Funktionen selbst differenzierbar, weshalb eine differenzierbare Funktion $f : \sigma(I') \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, sodass

$$\gamma(\rho(\tilde{t})) = (\tilde{t}, f(\tilde{t}))$$

für alle $\tilde{t} \in \sigma(I')$ erfüllt ist. Dies ist genau was wir zeigen wollen. Wir haben also folgendes Resultat bewiesen.

Lemma 4.2. *Sei $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^3$ eine Rotationsminimalfläche und γ die erzeugende Kurve. Dann ist das Bild von γ der Graph einer Funktion über der zweiten Koordinate.*

4.3 Bestimmung aller Rotationsminimalflächen

Nach Lemma 4.2 können wir ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit annehmen, dass die erzeugende Kurve einer Rotationsminimalfläche von der Form

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (r(t), t)$$

ist. Als lokale Parametrisierung wählen wir

$$\varphi : I \times J \rightarrow \mathbb{R}^3, (t, \vartheta) \mapsto (r(t) \cos \vartheta, r(t) \sin \vartheta, t).$$

Um die erste und zweite Fundamentalform bzgl. dieser Parametrisierung zu bestimmen, bedienen wir uns den schon allgemeineren hergeleiteten Formeln und setzen lediglich $h(t) = t$, beachten jedoch, dass γ dadurch nicht mehr nach Bogenlänge parametrisiert ist. Es gilt

$$\begin{aligned} (g_{ij}) &= \begin{pmatrix} \langle \partial_t \varphi(t, \vartheta), \partial_t \varphi(t, \vartheta) \rangle & \langle \partial_t \varphi(t, \vartheta), \partial_\vartheta \varphi(t, \vartheta) \rangle \\ \langle \partial_\vartheta \varphi(t, \vartheta), \partial_t \varphi(t, \vartheta) \rangle & \langle \partial_\vartheta \varphi(t, \vartheta), \partial_\vartheta \varphi(t, \vartheta) \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dot{r}(t)^2 + 1 & 0 \\ 0 & r(t)^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (h_{ij}) &= \begin{pmatrix} \langle \nu(t, \vartheta), \partial_{tt}^2 f(t, \vartheta) \rangle & \langle \nu(t, \vartheta), \partial_{t\vartheta}^2 f(t, \vartheta) \rangle \\ \langle \nu(t, \vartheta), \partial_{\vartheta t}^2 f(t, \vartheta) \rangle & \langle \nu(t, \vartheta), \partial_{\vartheta\vartheta}^2 f(t, \vartheta) \rangle \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\dot{r}(t)^2 + 1}} \begin{pmatrix} -\ddot{r}(t) & 0 \\ 0 & r(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Folglich ist die Matrix des Differentials der Gaussabbildung im Punkt $p = \varphi(t_0, \vartheta_0)$ bzgl. der Basis $\{\partial_t \varphi(t_0, \vartheta_0), \partial_\vartheta \varphi(t_0, \vartheta_0)\}$

$$\begin{aligned} (d\nu)_p &= -(g^{ij})(h_{ij}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\dot{r}(t_0)^2 + 1}} \begin{pmatrix} \frac{\ddot{r}(t_0)}{\dot{r}(t_0)^2 + 1} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{r(t_0)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Also ist die mittlere Krümmung durch

$$H(\varphi(t, \vartheta)) = \frac{1}{\sqrt{\dot{r}(t)^2 + 1}} \left(\frac{\ddot{r}(t)}{\dot{r}(t)^2 + 1} - \frac{1}{r(t)} \right)$$

gegeben. S ist also genau dann eine Rotationsminimalfläche wenn $r : I \rightarrow \mathbb{R}$ die Differentialgleichung

$$\ddot{r}(t)r(t) = \dot{r}(t)^2 + 1 \tag{4.1}$$

erfüllt. Beidseitiges Ableiten liefert

$$\dot{r}(t)\ddot{r}(t) + r(t)r^{(3)}(t) = 2\dot{r}(t)\ddot{r}(t).$$

Da $r(t)$ und $\dot{r}(t)^2 + 1$ streng positiv sind, gilt dies wegen (4.1) auch für $\ddot{r}(t)$. Es folgt

$$\frac{d}{dt} \log(\ddot{r}(t)) = \frac{r^{(3)}(t)}{\ddot{r}(t)} = \frac{\dot{r}(t)}{r(t)} = \frac{d}{dt} \log(r(t)).$$

Also existiert ein $C \in \mathbb{R}$, sodass

$$\log(\ddot{r}(t)) = \log(r(t)) + C$$

für alle $t \in I$ erfüllt ist. Da die Exponentialfunktion bijektiv ist, ist dies äquivalent zu

$$\ddot{r}(t) = e^C r(t),$$

was nichts anderes als die Differentialgleichung

$$\dot{\alpha}(t) = A\alpha(t) \tag{4.2}$$

mit $\alpha(t) = \begin{pmatrix} r(t) \\ \dot{r}(t) \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ e^C & 0 \end{pmatrix}$ ist. Da wir $r : I \rightarrow \mathbb{R}$ nur bis auf Translation bestimmen müssen, können wir ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit $0 \in I$ annehmen. Die allgemeine Lösung von (4.2) ist deshalb:

$$\alpha(t) = e^{tA}\alpha(0) \tag{4.3}$$

Induktiv sieht man leicht, dass

$$A^{2n} = \begin{pmatrix} e^{nC} & 0 \\ 0 & e^{nC} \end{pmatrix}$$

und

$$A^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & e^{nC} \\ e^{(n+1)C} & 0 \end{pmatrix}$$

für alle nichtnegativen ganzen Zahlen n gilt. Also ist

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^{2l}}{(2l)!} A^{2l} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{2j+1}}{(2j+1)!} A^{2j+1} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^{2l}}{(2l)!} \begin{pmatrix} e^{lC} & 0 \\ 0 & e^{lC} \end{pmatrix} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{2j+1}}{(2j+1)!} \begin{pmatrix} 0 & e^{jC} \\ e^{(j+1)C} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{e^C}t)^{2l}}{(2l)!} & \sqrt{e^{-C}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{e^C}t)^{2j+1}}{(2j+1)!} \\ \sqrt{e^C} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{e^C}t)^{2j+1}}{(2j+1)!} & \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{e^C}t)^{2l}}{(2l)!} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{e^C}t) & \sqrt{e^{-C}} \sinh(\sqrt{e^C}t) \\ \sqrt{e^C} \sinh(\sqrt{e^C}t) & \cosh(\sqrt{e^C}t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

woraus man mit (4.3)

$$r(t) = r(0) \cosh(\sqrt{e^C}t) + \dot{r}(0) \sqrt{e^{-C}} \sinh(\sqrt{e^C}t)$$

erhält. Wir führen nun neue Parameter α, β, γ durch

$$\begin{aligned} \alpha &= r(0) \\ \beta &= \dot{r}(0) \sqrt{e^{-C}} \\ \gamma &= \sqrt{e^C} \end{aligned}$$

ein. Diese Parameter haben nichts mit den vorher definierten Kurven zu tun. Dadurch wird r zu

$$r(t) = \alpha \cosh(\gamma t) + \beta \sinh(\gamma t). \quad (4.4)$$

Durch das Ableiten von (4.1) können nun Lösungen enthalten sein, welche gar keine sind. Um diese zu eliminieren, wollen wir Bedingungen an α, β und γ finden, die erfüllt sein müssen, damit r eine Lösung von (4.1) ist. Berechne dazu

$$\dot{r}(t) = \alpha \gamma \sinh(\gamma t) + \beta \gamma \cosh(\gamma t)$$

und

$$\ddot{r}(t) = \alpha \gamma^2 \cosh(\gamma t) + \beta \gamma^2 \sinh(\gamma t).$$

Einsetzen in (4.1) liefert

$$\begin{aligned} 1 &= \ddot{r}(t)r(t) - \dot{r}(t)^2 \\ &= \gamma^2 ((\alpha \cosh(\gamma t) + \beta \sinh(\gamma t))^2 - (\alpha \sinh(\gamma t) + \beta \cosh(\gamma t))^2) \\ &= \gamma^2 (\alpha^2 (\cosh^2(\gamma t) - \sinh^2(\gamma t)) + \beta^2 (\sinh^2(\gamma t) - \cosh^2(\gamma t))) \\ &= \gamma^2 (\alpha^2 - \beta^2). \end{aligned}$$

Also ist $\alpha > |\beta|$. Da weiterhin $\cosh(x) > |\sinh(x)|$ für alle reellen Zahlen x gilt, ist $r(t) > 0$ für alle reellen t erfüllt.

Die Bedingung $1 = \gamma^2 (\alpha^2 - \beta^2)$ scheint sehr unhandlich zu sein. Trotzdem reicht sie aus, um (4.4) zu vereinfachen.

Proposition 4.3. *Eine Rotationsfläche ist genau dann eine Minimalfläche, wenn die erzeugende Kurve (bis auf Translation und Umparametrisierung) der Graph einer Funktion*

$$r : I \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}, t \longmapsto \alpha \cosh\left(\frac{t}{\alpha}\right)$$

über der zweiten Koordinate ist. Dabei ist I ein offenes Intervall und α eine positive reelle Zahl.

Beweis. Das einzige, was wir zeigen müssen, ist, dass eine Funktion $r(t) = \alpha \cosh(\gamma t) + \beta \sinh(\gamma t)$, wobei $\alpha, \gamma > 0$ und $1 = \gamma^2(\alpha^2 - \beta^2)$, durch Translation aus einer Funktion der Form $f(t) = a \cosh(\frac{t}{a})$ hervorgeht. Als erstes möchten wir das Bild von r untersuchen. Wegen $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} r(t) = +\infty$ besitzt r ein globales Minimum, welches an der Nullstelle von r' angenommen wird (diese ist wegen $r''(t) = \gamma^2 r(t) > 0$ eindeutig). Sei t_{min} diese Nullstelle. Aus

$$\begin{aligned} 0 &= r'(t_{min}) \\ &= \gamma(\alpha \sinh(\gamma t_{min}) + \beta \cosh(\gamma t_{min})) \\ &= \gamma(\beta(\cosh(\gamma t_{min}) + \sinh(\gamma t_{min})) + (\alpha - \beta) \sinh(\gamma t_{min})) \\ &= \gamma \left(\beta e^{\gamma t_{min}} + (\alpha - \beta) \frac{e^{\gamma t_{min}} - e^{-\gamma t_{min}}}{2} \right) \end{aligned}$$

folgt

$$e^{-\gamma t_{min}} = \sqrt{e^{-2\gamma t_{min}}} = \sqrt{\frac{e^{-\gamma t_{min}} - e^{\gamma t_{min}}}{e^{\gamma t_{min}}} + 1} = \sqrt{\frac{2\beta}{\alpha - \beta} + 1} = \sqrt{\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} \min_{t \in \mathbb{R}} r(t) &= r(t_{min}) \\ &= \alpha \cosh(\gamma t_{min}) + \beta \sinh(\gamma t_{min}) \\ &= \frac{\alpha}{2}(e^{\gamma t_{min}} + e^{-\gamma t_{min}}) + \frac{\beta}{2}(e^{\gamma t_{min}} - e^{-\gamma t_{min}}) \\ &= \frac{\alpha}{2} \left(\sqrt{\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}} + \sqrt{\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}} \right) + \frac{\beta}{2} \left(\sqrt{\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}} - \sqrt{\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}} \right) \\ &= \frac{\alpha}{2} \frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} + \frac{\beta}{2} \frac{-2\beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \\ &= \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \\ &= \frac{1}{\gamma}. \end{aligned}$$

Definiere einen neuen Parameter durch $\delta := \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$. Dadurch wird r zu $r(t) = \sqrt{\delta^2 + \beta^2} \cosh\left(\frac{t}{\delta}\right) + \beta \sinh\left(\frac{t}{\delta}\right)$ und $\min_{t \in \mathbb{R}} r(t) = \delta$. Indem wir nur noch δ als Parameter betrachten und β als Variable, erhalten wir eine Funktion

$$R: \mathbb{R}^2 \longrightarrow [\delta, \infty), (\beta, t) \longmapsto \sqrt{\delta^2 + \beta^2} \cosh\left(\frac{t}{\delta}\right) + \beta \sinh\left(\frac{t}{\delta}\right).$$

Sei $y_0 \in (\delta, \infty)$ beliebig. Dann existiert ein $(\beta_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $R(\beta_0, t_0) = y_0$ und $\partial_t R(\beta_0, t_0) \neq 0$. Nach dem Satz über implizite Funktionen existieren $\varepsilon, \tilde{\varepsilon} > 0$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g: (\beta_0 - \varepsilon, \beta_0 + \varepsilon) \times (y_0 - \tilde{\varepsilon}, y_0 + \tilde{\varepsilon}) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $R(\beta, g(\beta, y)) = y$ für alle $(\beta, y) \in (\beta_0 - \varepsilon, \beta_0 + \varepsilon) \times (y_0 - \tilde{\varepsilon}, y_0 + \tilde{\varepsilon})$. Nach der Kettenregel gilt für alle $(\beta, y) \in (\beta_0 - \varepsilon, \beta_0 + \varepsilon) \times (y_0 - \tilde{\varepsilon}, y_0 + \tilde{\varepsilon})$

$$0 = \frac{\partial y}{\partial \beta} = \frac{\partial R(\beta, g(\beta, y))}{\partial \beta} = \frac{\partial R}{\partial \beta}(\beta, g(\beta, y)) + \frac{\partial R}{\partial t}(\beta, g(\beta, y)) \frac{\partial g}{\partial \beta}(\beta, y)$$

und deshalb

$$\frac{\partial g}{\partial \beta}(\beta, y) = -\frac{\frac{\partial R}{\partial \beta}(\beta, g(\beta, y))}{\frac{\partial R}{\partial t}(\beta, g(\beta, y))} = -\frac{\frac{\beta}{\sqrt{\delta^2 + \beta^2}} \cosh\left(\frac{g(\beta, y)}{\delta}\right) + \sinh\left(\frac{g(\beta, y)}{\delta}\right)}{\frac{\sqrt{\delta^2 + \beta^2}}{\delta} \sinh\left(\frac{g(\beta, y)}{\delta}\right) + \frac{\beta}{\delta} \cosh\left(\frac{g(\beta, y)}{\delta}\right)} = -\frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + \beta^2}}.$$

Seien $y_1, y_2 \in (y_0 - \tilde{\varepsilon}, y_0 + \tilde{\varepsilon})$ beliebig. Betrachte die Funktion

$$h: (\beta_0 - \varepsilon, \beta_0 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}, \beta \mapsto g(\beta, y_1) - g(\beta, y_2).$$

Für alle $\beta \in (\beta_0 - \varepsilon, \beta_0 + \varepsilon)$ gilt $h'(\beta) = \frac{\partial g}{\partial \beta}(\beta, y_1) - \frac{\partial g}{\partial \beta}(\beta, y_2) = 0$, d.h. für zwei beliebige Elemente in $(y_0 - \tilde{\varepsilon}, y_0 + \tilde{\varepsilon})$ gilt, dass die Differenz der zweiten Koordinaten ihrer (lokalen) Urbilder nicht von β abhängt. Da y_0 beliebig war, ist dies global der Fall. Dies impliziert jedoch, dass für jedes β der Graph der Funktion $t \mapsto R(\beta, t)$ durch Translation aus dem Graph der Funktion $t \mapsto R(0, t) = \delta \cosh\left(\frac{t}{\delta}\right)$ hervorgeht. \square

4.4 Die Anzahl Rotationsminimalflächen bei vorgegebenem Rand

Um die Formulierung im nächsten Satz einfach zu halten, führen wir eine neue Notation ein. Für zwei reelle Zahlen h, r , wobei r positiv ist, bezeichne

$$K_h(r) := \{(x, y, h) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$$

den Kreis mit Radius r und Mittelpunkt $(0, 0, h)$, welcher in einer Ebene parallel zur xy -Ebene liegt. Ist zum Beispiel $r : I \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ eine reellwertige Funktion und \mathcal{R} die Rotationsfläche, welche durch die Kurve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2, t \rightarrow (r(t), t)$ erzeugt wird, dann gilt für alle $c, d \in I$

$$\mathcal{R} \cap E_{xy,c} \cap E_{xy,d} = K_c(r(c)) \cup K_d(r(d)),$$

wobei $E_{xy,z_0} := \{(x, y, z_0) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ die Menge aller Punkte mit z -Koordinate z_0 ist. Wir wollen die folgende Frage beantworten.

Frage: Seien h_0, d_0, r_0, R_0 feste reelle Zahlen, wobei d_0, r_0 und R_0 positiv sind. Wann gibt es eine Rotationsminimalfläche \mathcal{R} mit $\partial\mathcal{R} = K_{h_0}(r_0) \cup K_{h_0+d_0}(R_0)$ und unter welchen Bedingungen ist diese eindeutig bestimmt?

Da die mittlere Krümmung einer Fläche sich unter euklidischen Bewegungen nicht ändert, ist klar, dass h_0 keinen Einfluss auf die Existenz und Anzahl solcher Rotationsminimalflächen hat.

Ausserdem werden wir sehen, dass die Lösung fast nie eindeutig ist. Es ist sogar so schlimm, dass bei der zufälligen Wahl drei positiver reeller Zahlen d_0, r_0, R_0 und eines h_0 die Wahrscheinlichkeit, dass eine eindeutig bestimmte Rotationsminimalfläche \mathcal{R} mit $\partial\mathcal{R} = K_{h_0}(r_0) \cup K_{h_0+d_0}(R_0)$ existiert, gleich Null ist. Der nächste Satz beantwortet die soeben gestellte Frage und erklärt auch, warum die Chance auf eine eindeutige Lösung des Problems so klein ist.

Satz 4.4. Seien R_0, r_0, d_0 drei positive reelle Zahlen und h_0 eine reelle Zahl. Für $r := \min\{r_0, R_0\}$ gilt:

- i) Es existieren genau zwei Rotationsminimalflächen \mathcal{R}_1 und \mathcal{R}_2 mit $\partial\mathcal{R}_1 = \partial\mathcal{R}_2 = K_{h_0}(r_0) \cup K_{h_0+d_0}(R_0)$, falls $d_0 < \max_{\alpha \in (0, r)} \alpha \left(\operatorname{arcosh} \left(\frac{R_0}{\alpha} \right) + \operatorname{arcosh} \left(\frac{r_0}{\alpha} \right) \right)$.
- ii) Es existiert genau eine Rotationsminimalfläche \mathcal{R}_0 mit $\partial\mathcal{R}_0 = K_{h_0}(r_0) \cup K_{h_0+d_0}(R_0)$, falls $d_0 = \max_{\alpha \in (0, r)} \alpha \left(\operatorname{arcosh} \left(\frac{R_0}{\alpha} \right) + \operatorname{arcosh} \left(\frac{r_0}{\alpha} \right) \right)$.
- iii) Es gilt $\partial\mathcal{R} \neq K_{h_0}(r_0) \cup K_{h_0+d_0}(R_0)$ für jede Rotationsminimalfläche \mathcal{R} , falls $d_0 > \max_{\alpha \in (0, r)} \alpha \left(\operatorname{arcosh} \left(\frac{R_0}{\alpha} \right) + \operatorname{arcosh} \left(\frac{r_0}{\alpha} \right) \right)$.

Beweis. Sei \mathcal{R} eine Rotationsminimalfläche. Nach Proposition 4.3 kann man die erzeugende Kurve schreiben als $\gamma(t) = (r(t), t)$, wobei r bis auf Translation durch $\alpha \cosh \left(\frac{t}{\alpha} \right)$ gegeben ist und α eine positive reelle Zahl ist. Es reicht folglich, alle α zu finden, sodass ein $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $r_0 = \alpha \cosh \left(\frac{t_0}{\alpha} \right)$ und $R_0 = \alpha \cosh \left(\frac{t_0+d_0}{\alpha} \right)$ existiert. Durch geeignete Translation von $\alpha \cosh \left(\frac{t}{\alpha} \right)$ erhält man eine Funktion, deren Graph über der zweiten Koordinate eine Rotationsminimalfläche mit den gewünschten Eigenschaften erzeugt. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. Fall: $R_0 = r_0$

Nehme an, es gibt eine Rotationsminimalfläche mit den gewünschten Eigenschaften. Nach obiger Vorbemerkung gibt es ein $t_0 \in \mathbb{R}$, sodass das Gleichungssystem

$$\begin{cases} r_0 = \alpha \cosh \left(\frac{t_0}{\alpha} \right) \\ r_0 = \alpha \cosh \left(\frac{t_0+d_0}{\alpha} \right) \end{cases}$$

eine Lösung besitzt (α ist hier die Unbekannte). Da $\cosh(x) \geq 1$ für alle reellen Zahlen gilt, muss $\alpha < r_0$ sein, damit das Gleichungssystem eine Lösung besitzt. Ist dies erfüllt, ist das Gleichungssystem äquivalent zu

$$\begin{cases} t_0 = \pm \alpha \operatorname{arcosh} \left(\frac{r_0}{\alpha} \right) \\ t_0 = \pm \alpha \operatorname{arcosh} \left(\frac{r_0}{\alpha} \right) - d_0 \end{cases},$$

woraus

$$d_0 = \pm \alpha \operatorname{arcosh} \left(\frac{r_0}{\alpha} \right) \mp \alpha \operatorname{arcosh} \left(\frac{r_0}{\alpha} \right) \quad (4.5)$$

folgt. Ist umgekehrt (4.5) erfüllt, sind es auch die beiden Gleichungssysteme. Es reicht also eine Lösung für (4.5) zu finden. Da α, d_0 beide positiv sind, führen die Fälle $(+, -)$, $(-, +)$, $(-, -)$ zu Widersprüchen. Der einzige noch zu untersuchende Fall ist deshalb $d_0 = 2\alpha \operatorname{arcosh} \left(\frac{r_0}{\alpha} \right)$. Betrachte die Funktion

$$\mathcal{F}_1 : (0, r_0] \longrightarrow \mathbb{R}, \alpha \longmapsto 2\alpha \operatorname{arcosh} \left(\frac{r_0}{\alpha} \right),$$

um die Anzahl Lösungen zu untersuchen. \mathcal{F}_1 ist auf $(0, r_0)$ differenzierbar und für alle $\alpha \in (0, r_0)$ gilt

$$\mathcal{F}_1'(\alpha) = 2 \left(\operatorname{arcosh} \left(\frac{r_0}{\alpha} \right) + \alpha \frac{\frac{-r_0}{\alpha^2}}{\sqrt{\left(\frac{r_0}{\alpha}\right)^2 - 1}} \right) = 2 \left(\operatorname{arcosh} \left(\frac{r_0}{\alpha} \right) - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{r_0}\right)^2}} \right).$$

Da \mathcal{F}_1' stetig ist, hat \mathcal{F}_1' nach dem Zwischenwertsatz wegen $\lim_{\alpha \searrow 0} \mathcal{F}_1'(\alpha) = +\infty$ und $\lim_{\alpha \searrow r_0} \mathcal{F}_1'(\alpha) = -\infty$ mindestens eine Nullstelle. Aufgrund von

$$\mathcal{F}_1''(\alpha) = 2 \left(\frac{-r_0}{\alpha^2} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r_0}{\alpha}\right)^2 - 1}} - \frac{-1 - 2\alpha}{2} \frac{1}{r_0^2 \left(\sqrt{\left(\frac{\alpha}{r_0}\right)^2 - 1}\right)^3} \right) < 0$$

ist diese Nullstelle sogar eindeutig und die Funktion \mathcal{F}_1 nimmt an dieser Stelle ihr globales Maximum an. Da der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{r_0}{\sqrt{(r_0 x)^2 - 1}} = 0$ existiert, gilt nach den Regeln von de L'Hôpital

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathcal{F}_1(\alpha) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} 2\alpha \operatorname{arcosh} \left(\frac{r_0}{\alpha} \right) \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arcosh}(r_0 x)}{x} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx} \operatorname{arcosh}(r_0 x)}{\frac{d}{dx} x} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{r_0}{\sqrt{(r_0 x)^2 - 1}}}{1} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{r_0}{\sqrt{(r_0 x)^2 - 1}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Da weiterhin $\mathcal{F}_1(r_0) = 0$ gilt, hat (4.5) zwei Lösungen, falls $d_0 < \max_{\alpha \in (0, r_0)} \mathcal{F}_1(\alpha)$, eine Lösung, falls $d_0 = \max_{\alpha \in (0, r_0)} \mathcal{F}_1(\alpha)$ und keine, falls $d_0 > \max_{\alpha \in (0, r_0)} \mathcal{F}_1(\alpha)$. Nun schränkt man r auf das Intervall $I := (t_0, t_0 + d_0)$ ein und durch eine geeignete Translation hat man alle geeigneten Funktionen gefunden. Damit ist der erste Fall bewiesen.

2. Fall: $R_0 \neq r_0$

Nehme, wie im ersten Fall, an, es gibt eine Rotationsminimalfläche mit den gewünschten Eigenschaften. Nach obiger Vorbemerkung gibt es ein $t_0 \in \mathbb{R}$, sodass

$$\begin{cases} r_0 = \alpha \cosh \left(\frac{t_0}{\alpha} \right) \\ R_0 = \alpha \cosh \left(\frac{t_0 + d_0}{\alpha} \right) \end{cases}$$

oder

$$\begin{cases} R_0 = r(t_0) = \alpha \cosh \left(\frac{t_0}{\alpha} \right) \\ r_0 = r(t_0 + d_0) = \alpha \cosh \left(\frac{t_0 + d_0}{\alpha} \right) \end{cases}$$

eine Lösung besitzt. Wir können ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit $R_0 > r_0$ annehmen und es reicht, das erste Gleichungssystem zu untersuchen. Auch hier muss $\alpha \in (0, r_0]$ sein, damit dies erfüllt sein kann. Das zu untersuchende Gleichungssystem ist äquivalent zu

$$\begin{cases} t_0 = \pm \alpha \operatorname{arcosh} \left(\frac{r_0}{\alpha} \right) \\ t_0 = \pm \alpha \operatorname{arcosh} \left(\frac{R_0}{\alpha} \right) - d_0 \end{cases},$$

was gleichbedeutend zu

$$d_0 = \alpha \left(\pm \operatorname{arcosh} \left(\frac{R_0}{\alpha} \right) \mp \operatorname{arcosh} \left(\frac{r_0}{\alpha} \right) \right) \quad (4.6)$$

ist. Da arcosh positiv und streng monoton steigend ist, führen die Fälle $(-, -)$, $(-, +)$ zu Widersprüchen. Betrachte nun die Funktionen

$$\mathcal{F}_2 : (0, r_0] \longrightarrow \mathbb{R}, \alpha \longmapsto \alpha \left(\operatorname{arcosh} \left(\frac{R_0}{\alpha} \right) + \operatorname{arcosh} \left(\frac{r_0}{\alpha} \right) \right)$$

und

$$\mathcal{G}_2 : (0, r_0] \longrightarrow \mathbb{R}, \alpha \longmapsto \alpha \left(\operatorname{arcosh} \left(\frac{R_0}{\alpha} \right) - \operatorname{arcosh} \left(\frac{r_0}{\alpha} \right) \right)$$

um die verbleibenden zwei Fälle zu untersuchen. Beide Funktionen sind auf $(0, r_0)$ differenzierbar. Zuerst zu \mathcal{F}_2 : Äquivalent zum ersten Fall gilt für alle $\alpha \in (0, r_0)$

$$\mathcal{F}_2'(\alpha) = \operatorname{arcosh} \left(\frac{R_0}{\alpha} \right) + \operatorname{arcosh} \left(\frac{r_0}{\alpha} \right) - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{R_0}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{r_0}\right)^2}}.$$

Wie auch im ersten Fall hat \mathcal{F}_2' wegen seiner Stetigkeit und $\lim_{\alpha \searrow 0} \mathcal{F}_2'(\alpha) = +\infty$, $\lim_{\alpha \nearrow r_0} \mathcal{F}_2'(\alpha) = -\infty$ eine Nullstelle, die aufgrund von

$$\mathcal{F}_2''(\alpha) = -\frac{R_0}{\alpha^2 \sqrt{\left(\frac{R_0}{\alpha}\right)^2 - 1}} - \frac{\alpha}{R_0^2 \left(\sqrt{\left(\frac{\alpha}{R_0}\right)^2 - 1}\right)^3} - \frac{r_0}{\alpha^2 \sqrt{\left(\frac{r_0}{\alpha}\right)^2 - 1}} - \frac{\alpha}{r_0^2 \left(\sqrt{\left(\frac{\alpha}{r_0}\right)^2 - 1}\right)^3} < 0$$

eindeutig ist. Ausserdem nimmt die Funktion \mathcal{F}_2 an dieser Stelle ihr globales Maximum an. Also existieren für jedes Element in $[\mathcal{F}_2(r_0), \max_{\alpha \in (0, r_0)} \mathcal{F}_2(\alpha)]$ zwei reelle Zahlen in $(0, r_0]$, die unter \mathcal{F}_2 auf dieses Element abgebildet werden und für jedes Element in $(\mathcal{F}_2(0), \mathcal{F}_2(r_0))$ existiert genau eine Zahl in $(0, r_0]$, die unter \mathcal{F}_2 auf dieses Element abgebildet wird.

Nun zu \mathcal{G}_2 : Für alle $\alpha \in (0, r_0)$ gilt wegen $R_0 > r_0$ und der Monotonie von arcosh

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_2'(\alpha) &= \operatorname{arcosh} \left(\frac{R_0}{\alpha} \right) - \operatorname{arcosh} \left(\frac{r_0}{\alpha} \right) - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{R_0}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{r_0}\right)^2}} \\ &> \operatorname{arcosh} \left(\frac{r_0}{\alpha} \right) - \operatorname{arcosh} \left(\frac{r_0}{\alpha} \right) - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{R_0}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{R_0}\right)^2}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Also existiert für jedes Element in $(\mathcal{G}_2(0), \mathcal{G}_2(r_0)]$ genau eine Zahl in $(0, r_0]$, die unter \mathcal{G}_2 auf dieses Element abgebildet wird. Genau wie im ersten Fall zeigt man

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathcal{F}_2(\alpha) = 0 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathcal{G}_2(\alpha).$$

Wegen $\mathcal{F}_2(r_0) = r_0 \operatorname{arcosh} \left(\frac{R_0}{r_0} \right) = \mathcal{G}_2(r_0)$ hat (4.6) zwei Lösungen falls $d_0 < \max_{\alpha \in (0, r_0)} \mathcal{F}_2(\alpha)$ und genau eine falls $d_0 = \max_{\alpha \in (0, r_0)} \mathcal{F}_2(\alpha)$. Wie im ersten Fall muss man $r(t) = \alpha \cosh \left(\frac{t}{\alpha} \right)$ nur noch auf das Intervall $(t_0, t_0 + d_0)$ einschränken und geeignet translieren. Damit ist auch der zweite Fall vollständig untersucht und das Lemma somit bewiesen. \square

5 Tunnelflächen

In diesem Kapitel wollen wir eine neue Klasse von Flächen einführen, die den Rotationsflächen zwar ähnlich sind, aber trotzdem viel mehr Flächen enthalten. Diese neue Familie von Flächen soll ebenfalls zeigen, dass die Theorie der Minimalflächen eng verbunden ist mit der Theorie der Differentialgleichungen.

5.1 Die partielle Differentialgleichung der Tunnelminimalflächen

Im letzten Kapitel hatten wir Rotationsflächen definiert. Die Idee dabei war, dass man eine Kurve in der xz -Ebene um die z -Achse rotieren lässt und die dadurch entstehende Fläche betrachtet. Wenn die Kurve sich bei der Rotation um die z -Achse ebenfalls verändert, erhält man eine weitaus grössere Klasse von Flächen.

Definition 5.1. Eine glatte Fläche $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$ heisst Tunnelfläche, falls ein Intervall I und eine im zweiten Argument 2π -periodische Funktion

$$\gamma : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, (t, \vartheta) \longmapsto (r(t, \vartheta), h(t, \vartheta)),$$

mit $r(t, \vartheta) > 0$ für alle $(t, \vartheta) \in I \times \mathbb{R}$ existiert, sodass $\mathcal{T} = \varphi(I \times \mathbb{R})$ gilt, wobei $\varphi : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch

$$\varphi(t, \vartheta) = (r(t, \vartheta) \cos \vartheta, (t, \vartheta) \sin \vartheta, h(t, \vartheta)) \quad (5.1)$$

gegeben ist. Man nennt γ die Familie der erzeugenden Kurven.

Aus notationstechnischen Gründen schreiben wir ab nun $r = r_\vartheta$ und lassen (t, ϑ) weg. Weiterhin definieren wir $\dot{r}_\vartheta := \partial_1 r_\vartheta$, $r_{\dot{\vartheta}} := \partial_2 r_\vartheta$ und analoges für $\ddot{r}_\vartheta, \dot{r}_{\dot{\vartheta}}, r_{\dot{\vartheta}\dot{\vartheta}}$.

Unser Ziel ist es wieder, alle Tunnelflächen zu finden, welche zugleich Minimalflächen sind (diese nennen wir naheliegenderweise *Tunnelminimalflächen*). Sei \mathcal{T} deshalb eine Tunnelminimalfläche. Nach Definition können wir \mathcal{T} global durch eine Abbildung der Form wie in (5.1) parametrisieren. Blosses Rechnen liefert:

$$\begin{aligned} \partial_t \varphi &= (\dot{r}_\vartheta \cos \vartheta, \dot{r}_\vartheta \sin \vartheta, \dot{h}_\vartheta) \\ \partial_\vartheta \varphi &= (r_{\dot{\vartheta}} \cos \vartheta - r_\vartheta \sin \vartheta, r_{\dot{\vartheta}} \sin \vartheta + r_\vartheta \cos \vartheta, h_{\dot{\vartheta}}) \\ \partial_{tt}^2 \varphi &= (\ddot{r}_\vartheta \cos \vartheta, \ddot{r}_\vartheta \sin \vartheta, \ddot{h}_\vartheta) \\ \partial_{t\vartheta}^2 \varphi &= (\dot{r}_{\dot{\vartheta}} \cos \vartheta - \dot{r}_\vartheta \sin \vartheta, \dot{r}_{\dot{\vartheta}} \sin \vartheta + \dot{r}_\vartheta \cos \vartheta, \dot{h}_{\dot{\vartheta}}) \\ \partial_{\vartheta\vartheta}^2 \varphi &= ((r_{\dot{\vartheta}\dot{\vartheta}} - r_\vartheta) \cos \vartheta - 2r_{\dot{\vartheta}} \sin \vartheta, (r_{\dot{\vartheta}\dot{\vartheta}} - r_\vartheta) \sin \vartheta + 2r_{\dot{\vartheta}} \cos \vartheta, h_{\dot{\vartheta}\dot{\vartheta}}) \end{aligned}$$

Als Gaussabbildung wählen wir

$$\nu(t, \vartheta) = \frac{\partial_t \varphi \wedge \partial_\vartheta \varphi}{\|\partial_t \varphi \wedge \partial_\vartheta \varphi\|},$$

wobei

$$\begin{aligned} \partial_t \varphi \wedge \partial_\vartheta \varphi &= (\dot{r}_\vartheta \cos \vartheta, \dot{r}_\vartheta \sin \vartheta, \dot{h}_\vartheta) \wedge (r_{\dot{\vartheta}} \cos \vartheta - r_\vartheta \sin \vartheta, r_{\dot{\vartheta}} \sin \vartheta + r_\vartheta \cos \vartheta, h_{\dot{\vartheta}}) \\ &= (\dot{r}_\vartheta h_{\dot{\vartheta}} \sin \vartheta - r_\vartheta \dot{h}_\vartheta \cos \vartheta - r_{\dot{\vartheta}} \dot{h}_\vartheta \sin \vartheta, r_{\dot{\vartheta}} \dot{h}_\vartheta \cos \vartheta - r_\vartheta \dot{h}_\vartheta \sin \vartheta - \dot{r}_\vartheta h_{\dot{\vartheta}} \cos \vartheta, r_\vartheta \dot{r}_\vartheta) \\ &= (\det(D\gamma_\vartheta) \sin \vartheta - r_\vartheta \dot{h}_\vartheta \cos \vartheta, -\det(D\gamma_\vartheta) \cos \vartheta - r_\vartheta \dot{h}_\vartheta \sin \vartheta, r_\vartheta \dot{r}_\vartheta). \end{aligned}$$

Mit $g_{ij} = \langle \partial_i \varphi, \partial_j \varphi \rangle$ und $h_{ij} = \langle \partial_{ij}^2 \varphi, \nu \circ \varphi \rangle$ folgt

$$\begin{aligned} g_{11} &= \dot{r}_\vartheta^2 + \dot{h}_\vartheta^2 \\ g_{12} &= \dot{r}_\vartheta r_{\dot{\vartheta}} + \dot{h}_\vartheta h_{\dot{\vartheta}} \\ g_{22} &= r_\vartheta^2 + r_{\dot{\vartheta}}^2 + h_{\dot{\vartheta}}^2 \end{aligned}$$

für die erste und

$$\begin{aligned} h_{11} &= r_\vartheta \frac{\dot{r}_\vartheta \ddot{h}_\vartheta - \ddot{r}_\vartheta \dot{h}_\vartheta}{\|\partial_t \varphi \wedge \partial_\vartheta \varphi\|} \\ h_{12} &= \frac{r_\vartheta (\dot{r}_\vartheta \dot{h}_{\dot{\vartheta}} - \dot{r}_{\dot{\vartheta}} \dot{h}_\vartheta) - \dot{r}_\vartheta \det(D\gamma_\vartheta)}{\|\partial_t \varphi \wedge \partial_\vartheta \varphi\|} \\ h_{22} &= \frac{r_\vartheta (r_\vartheta - r_{\dot{\vartheta}}) \dot{h}_\vartheta + r_\vartheta \dot{r}_\vartheta h_{\dot{\vartheta}} - 2r_{\dot{\vartheta}} \det(D\gamma_\vartheta)}{\|\partial_t \varphi \wedge \partial_\vartheta \varphi\|} \end{aligned}$$

für die zweite Fundamentalfarm. Also gilt

$$\begin{aligned} (d\nu)_{\varphi(\cdot)} &= -(g^{ij})(h_{ij}) \\ &= \frac{1}{\det(g_{ij})} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} g_{22}h_{11} - g_{12}h_{12} & \star \\ \star & g_{11}h_{22} - g_{12}h_{12} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für das Differential der Gaussabbildung im Punkt $\varphi(\cdot)$ bzgl. der Basis $\{\partial_t \varphi(\cdot), \partial_\vartheta \varphi(\cdot)\}$. Die Tunnelfläche \mathcal{T} ist genau dann eine Minimalfläche, wenn $0 = H(p) = \frac{1}{2} \text{Spur}(d\nu)_p$ für alle $p \in \mathcal{T}$ erfüllt ist. Dies ist äquivalent zu

$$g_{11}h_{22}\|\partial_t \varphi \wedge \partial_\vartheta \varphi\| + g_{22}h_{11}\|\partial_t \varphi \wedge \partial_\vartheta \varphi\| = 2g_{12}h_{12}\|\partial_t \varphi \wedge \partial_\vartheta \varphi\|.$$

Setzen wir die berechneten Werte der ersten und zweiten Fundamentalform ein, so folgt

$$\begin{aligned} & \left(\dot{r}_\vartheta^2 + \dot{h}_\vartheta^2 \right) \left(r_\vartheta (r_\vartheta - r_{\ddot{\vartheta}}) \dot{h}_\vartheta + r_\vartheta \dot{r}_\vartheta \dot{h}_{\ddot{\vartheta}} - 2r_{\ddot{\vartheta}} \det(D\gamma_\vartheta) \right) + r_\vartheta (r_\vartheta^2 + r_{\ddot{\vartheta}}^2 + h_{\ddot{\vartheta}}^2) \left(\dot{r}_\vartheta \ddot{h}_\vartheta - \ddot{r}_\vartheta \dot{h}_\vartheta \right) \\ &= 2 \left(\dot{r}_\vartheta r_{\ddot{\vartheta}} + \dot{h}_\vartheta h_{\ddot{\vartheta}} \right) \left(r_\vartheta \left(\dot{r}_\vartheta \dot{h}_{\ddot{\vartheta}} - \dot{r}_{\ddot{\vartheta}} \dot{h}_\vartheta \right) - \dot{r}_\vartheta \det(D\gamma_\vartheta) \right). \end{aligned}$$

Termumformung liefert die folgende Proposition.

Proposition 5.2. *Eine Tunnelfläche \mathcal{T} ist genau dann eine Tunnelminimalfläche, wenn die Gleichung*

$$\begin{aligned} & r_\vartheta \left(\left(\dot{r}_\vartheta^2 + \dot{h}_\vartheta^2 \right) \left((r_\vartheta - r_{\ddot{\vartheta}}) \dot{h}_\vartheta + \dot{r}_\vartheta \dot{h}_{\ddot{\vartheta}} \right) + (r_\vartheta^2 + r_{\ddot{\vartheta}}^2 + h_{\ddot{\vartheta}}^2) \left(\dot{r}_\vartheta \ddot{h}_\vartheta - \ddot{r}_\vartheta \dot{h}_\vartheta \right) \right) \\ &= 2r_\vartheta \left(\dot{r}_\vartheta r_{\ddot{\vartheta}} + \dot{h}_\vartheta h_{\ddot{\vartheta}} \right) \left(\dot{r}_\vartheta \dot{h}_{\ddot{\vartheta}} - \dot{r}_{\ddot{\vartheta}} \dot{h}_\vartheta \right) - 2\dot{r}_\vartheta \dot{h}_\vartheta h_{\ddot{\vartheta}} \det(D\gamma_\vartheta), \end{aligned}$$

auf ganz $I \times \mathbb{R}$ erfüllt ist. Dabei bezeichnet $\gamma_\vartheta : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, (t, \vartheta) \mapsto (r_\vartheta(t, \vartheta), h_\vartheta(t, \vartheta))$ die Familie der erzeugenden Kurven von \mathcal{T} .

Dass diese partielle Differentialgleichung äusserst kompliziert zu lösen ist, liegt auf der Hand. Aufgrund der extremen Nichtlinearität der Gleichung würde es uns sehr wahrscheinlich auch mit fortgeschrittenen Techniken nicht gelingen, eine allgemeine Lösung zu bestimmen. Wir wählen deshalb einen naheliegenden Ansatz.

5.2 Erraten von Lösungen

Wir haben im Abschnitt 4.3 gesehen, dass die erzeugende Kurve einer Minimalfläche (bis auf Umparametrisierung und Translaton) durch den Graphen über der zweiten Koordinate einer Funktion $r(t) = \alpha \cosh\left(\frac{t}{\alpha}\right)$, wobei α positiv ist, gegeben ist. Wir wählen also den Ansatz

$$(r_\vartheta(t, \vartheta), h_\vartheta(t, \vartheta)) = \left(\alpha(\vartheta) \cosh\left(\frac{\tau(t, \vartheta)}{\alpha(\vartheta)}\right), t \right),$$

wobei $\alpha(\vartheta) > 0$ für alle reellen ϑ gilt und $\tau(t, \vartheta) = t + f(\vartheta)$ für ein festes ϑ eine Translation ist. Wir nehmen nun weiterhin an, dass man γ_ϑ auf ganz \mathbb{R}^2 definieren kann und dass $\mathcal{T} = \varphi(\mathbb{R}^2)$ gilt. Aus notationstechnischen Gründen schreiben wir für $r_\vartheta(t, \vartheta) = \alpha(\vartheta) \cosh\left(\frac{\tau(t, \vartheta)}{\alpha(\vartheta)}\right)$ lediglich noch $r_\vartheta = \alpha \cosh\left(\frac{\tau}{\alpha}\right)$. Durch blosses Rechnen erhalten wir:

$$\begin{aligned} \dot{r}_\vartheta &= \sinh\left(\frac{\tau}{\alpha}\right) \\ r_{\ddot{\vartheta}} &= \dot{\alpha} \cosh\left(\frac{\tau}{\alpha}\right) + \alpha \sinh\left(\frac{\tau}{\alpha}\right) \frac{\dot{f}\alpha - \tau\dot{\alpha}}{\alpha^2} \\ &= \dot{\alpha} \cosh\left(\frac{\tau}{\alpha}\right) + \frac{\dot{f}\alpha - \tau\dot{\alpha}}{\alpha} \sinh\left(\frac{\tau}{\alpha}\right) \\ \ddot{r}_\vartheta &= \frac{1}{\alpha} \cosh\left(\frac{\tau}{\alpha}\right) \\ \dot{r}_{\ddot{\vartheta}} &= \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \sinh\left(\frac{\tau}{\alpha}\right) + \frac{\dot{f}\alpha - \tau\dot{\alpha}}{\alpha} \frac{1}{\alpha} \cosh\left(\frac{\tau}{\alpha}\right) + \frac{-\dot{\alpha}}{\alpha} \sinh\left(\frac{\tau}{\alpha}\right) \\ &= \frac{\dot{f}\alpha - \tau\dot{\alpha}}{\alpha^2} \cosh\left(\frac{\tau}{\alpha}\right) \\ r_{\ddot{\vartheta}} &= \ddot{\alpha} \cosh\left(\frac{\tau}{\alpha}\right) + \frac{\dot{\alpha}(\dot{f}\alpha - \tau\dot{\alpha})}{\alpha^2} \sinh\left(\frac{\tau}{\alpha}\right) \\ &\quad + \frac{(\ddot{f}\alpha + \dot{f}\dot{\alpha} - \dot{f}\dot{\alpha} - \tau\ddot{\alpha})\alpha - (\dot{f}\alpha - \tau\dot{\alpha})\dot{\alpha}}{\alpha^2} \sinh\left(\frac{\tau}{\alpha}\right) + \frac{(\dot{f}\alpha - \tau\dot{\alpha})^2}{\alpha^3} \cosh\left(\frac{\tau}{\alpha}\right) \\ &= \left(\ddot{\alpha} + \frac{(\dot{f}\alpha - \tau\dot{\alpha})^2}{\alpha^3} \right) \cosh\left(\frac{\tau}{\alpha}\right) + \frac{\ddot{f}\alpha - \tau\dot{\alpha}}{\alpha} \sinh\left(\frac{\tau}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

Durch Einsetzen von $(r_\vartheta(t, \vartheta), h_\vartheta(t, \vartheta)) = (r_\vartheta(t, \vartheta), t)$ in die in Proposition 5.1 gegebene Gleichung folgt, dass \mathcal{T} genau dann eine Tunnelminimalfläche ist, wenn

$$(\dot{r}_\vartheta^2 + 1)(r_\vartheta - r_{\ddot{\vartheta}}) - (r_\vartheta^2 + r_{\ddot{\vartheta}}^2)\ddot{r}_\vartheta = -2\dot{r}_\vartheta r_{\ddot{\vartheta}} \dot{r}_{\ddot{\vartheta}} \quad (5.2)$$

auf ganz \mathbb{R}^2 erfüllt ist. Einsetzen von $(-f(s), s)$ für ein beliebiges s liefert

$$\alpha(s) - \ddot{\alpha}(s) - \frac{\dot{f}^2(s)}{\alpha(s)} - \frac{\alpha(s)^2 + \dot{\alpha}^2(s)}{\alpha(s)} = 0.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\ddot{\alpha}(s) = -\frac{\dot{\alpha}^2(s) + f^2(s)}{\alpha(s)} \leq 0,$$

woraus, da s beliebig war, folgt, dass die Funktion α konkav ist. Weiterhin ist α nach Voraussetzung 2π -periodisch. Dies kann jedoch nur eintreten, wenn α konstant ist. Setzen wir dies in (5.2) ein folgt, dass f ebenfalls konstant ist. Damit haben wir folgendes Korollar bewiesen.

Korollar 5.3. *Sei \mathcal{T} eine Tunnelfläche, die durch eine Familie von Kurven der Form*

$$\gamma : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (t, \vartheta) \longmapsto \left(\alpha(\vartheta) \cosh \left(\frac{t + f(\vartheta)}{\alpha(\vartheta)} \right), t \right)$$

erzeugt wird, wobei $\alpha, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodische, differenzierbare Funktionen sind und α nur positive Werte annimmt. Falls \mathcal{T} eine Minimalfläche ist, ist \mathcal{T} sogar eine Rotationsminimalfläche.

Auch mit einem vernünftig scheinenden Ansatz erhalten wir also nur bereits bekannte Lösungen. Sogar wenn wir einen nicht so spezifischen Ansatz wählen und für ein festes ϑ die Kurve γ_ϑ als Graph wählen ist die noch zu lösende partielle Differentialgleichung (5.2) äusserst unhandlich. Deshalb beenden wir an diesem Punkt unsere Untersuchung der Tunnelminimalflächen.

Anhang

A Mathematische Grundlagen

Für den Leser, der beim Lesen der Arbeit über unbekannte Terminologie stolpert, sind hier die grundlegenden Begriffe und Resultate der mehrdimensionalen Differentialrechnung und der Differentialgeometrie von Kurven und Flächen aufgeführt. Da diese so grundlegend sind, sind sie in jedem Einführungswerk zu finden. Wer Genaueres nachlesen möchte, konsultiere [Tretter, 2012] für analytische und [do Carmo, 1998] für differentialgeometrische Auskunft.

A.1 Differentialrechnung

Definition A.1. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^n und $p \in U$. Eine Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ heisst differenzierbar im Punkt p , falls dort eine Dreigliedertwicklung

$$f(p+h) = f(p) + (Df)_p(h) + R(p,h) \quad (\text{A.1})$$

existiert. Dabei ist die Abbildung $(Df)_p$ linear in h und R relativ klein in h , d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass für alle $h \in \mathbb{R}^n$ mit $\|h\| \leq \delta$ gilt: $\|R(p,h)\| \leq \varepsilon\|h\|$. $(Df)_p$ heisst das Differential von f in p und R heisst der Rest.

Eine Abbildung heisst differenzierbar, falls sie in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs differenzierbar ist.

Ist eine Abbildung $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar im Punkt p , so gilt für jedes $v \in \mathbb{R}^n$

$$(Df)_p(v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t}.$$

Speziell für $v = e_i$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) := \partial_i f(p) := (Df)_p(e_i) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p+te_i) - f(p)}{t}$$

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ nennt man die i -te partielle Ableitung von f in p . Falls f differenzierbar ist, kann man die partiellen Ableitung mit dem angegebenen Grenzwert berechnen. Aus der Existenz des Grenzwertes folgt jedoch nicht die Differenzierbarkeit. Betrachte dazu die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \\ \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{sonst} \end{cases}.$$

Für jedes $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv) - f(0)}{t} = f(v_1, v_2).$$

Also ist f nicht differenzierbar im Nullpunkt, denn sonst wäre f eine lineare Abbildung, was offensichtlich nicht der Fall ist. Es gibt aber dennoch ein Resultat, welches ein einfaches Kriterium liefert, um zu überprüfen, ob eine Abbildung differenzierbar ist.

Proposition A.2. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^n , $p \in U$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung, sodass für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ die Grenzwerte

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(q+te_i) - f(q)}{t}$$

existieren und stetig sind in p . Dann ist f differenzierbar in p und es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p+te_i) - f(p)}{t}.$$

Wir wollen nun kurz auf den sogenannten *Gradienten* eingehen:

Sei $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung. Dann existiert ein Vektor $a \in \mathbb{R}^n$, sodass für alle $v \in \mathbb{R}^n$

$$L(v) = \langle a, v \rangle$$

gilt, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt bezeichnet. Schreibe, um dies einzusehen, v als $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$, wobei $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ der Vektor mit einer 1 im i -ten Eintrag ist. Dann ist

$$L(v) = L\left(\sum_{i=1}^n v_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n v_i L(e_i) = \left\langle v, \sum_{i=1}^n L(e_i) e_i \right\rangle.$$

Betrachte nun Abbildungen $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, die in einem Punkt $p \in U$ differenzierbar sind. Da das Differential $(Df)_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ linear ist, existiert ein Vektor $\nabla f(p) \in \mathbb{R}^n$, sodass

$$(Df)_p(h) = \langle \nabla f(p), h \rangle$$

für alle $h \in \mathbb{R}^n$ gilt. Der Vektor $\nabla f(p)$ heisst der Gradient von f in p . Aus der soeben durchgeführten Rechnung ist ersichtlich, dass sich dieser schreiben lässt als

$$\nabla f(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) e_i.$$

Ist nun $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f(p) = \sum_{k=1}^m f_k(p) e_k$ eine im Punkt $p \in U$ differenzierbare Abbildung, dann gilt, wenn $J_f(p) = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ die Matrix des Differentials von f in p bzgl. der Standardbasis ist,

$$a_{ij} = \langle e_i, (Df)_p(e_j) \rangle = \langle e_i, \sum_{k=1}^m (Df_k)_p(e_j) e_k \rangle = (Df_i)_p(e_j) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p),$$

also

$$J_f(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}.$$

Auch wenn $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ eigentlich nur für reellwertige Abbildungen definiert ist, benutzt man für Abbildungen $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f(p) = \sum_{k=1}^m f_k(p) e_k$ ebenfalls die Notation $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \partial_i f(p)$ und meint damit $(Df)_p(e_i) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(p) e_k$.

Das nächste Lemma besagt, dass das Differential einer Komposition der Komposition der Differentiale entspricht.

Lemma A.3. *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Teilmengen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ mit $f(U) \subset V$. Ist f in p und g in $f(p)$ differenzierbar, dann ist $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ in p differenzierbar und es gilt*

$$(D(g \circ f))_p = (Dg)_{f(p)} \circ (Df)_p, \quad (\text{A.2})$$

d.h. für jedes $h \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$(D(g \circ f))_p(h) = (Dg)_{f(p)}((Df)_p(h)).$$

Eine direkte Anwendung ist folgendes Korollar.

Korollar A.4. *Ist $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$, $g(p) = \sum_{j=1}^m g_j(p) e_j$ in p und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ in $g(p)$ differenzierbar, dann ist $f \circ g$ differenzierbar in p und es gilt*

$$\frac{\partial (f \circ g)}{\partial x_i}(p) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(g(p)) \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(p). \quad (\text{A.3})$$

Die folgenden zwei Sätze gehören zu den tieferen Resultate, die ein Mathematikstudent in seinem ersten Jahr kennenlernt. Der zweite Satz ist dabei nur ein Spezialfall eines sehr tiefen Resultates. In beiden Sätzen sei k eine positive ganze Zahl.

Satz A.5. (Umkehrsatz)

Sei $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine k -mal stetig differenzierbare Abbildung und $p \in U$ mit $\det(Df)_p \neq 0$. Dann existieren Umgebungen U' von p und V von $f(p)$ und eine k -mal stetig differenzierbare Funktion $g : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$\begin{aligned} g \circ f|_{U'} &= Id_{U'} \\ f \circ g &= Id_V. \end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$(Dg)_q = (Df)_{g(q)}^{-1}.$$

Die Bedeutung des Umkehrsatzes ist, dass man eine stetig differenzierbare Abbildung in einem Punkt, indem das Differential ein Isomorphismus (eine bijektive lineare Abbildung) ist, lokal umkehren kann.

Satz A.6. (Spezielle Version des impliziten Funktionensatzes)

Sei $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine k -mal stetig differenzierbare Funktion und $p \in U$ mit $\frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \neq 0$. Dann existieren eine offene Umgebungen W von $f(p)$, eine offene Umgebung V von \tilde{p} , wobei \tilde{p} durch $p = (\tilde{p}, p_n) \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ gegeben ist, und eine k -mal stetig differenzierbare Abbildung $g : V \times W \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(\tilde{q}, g(\tilde{q}, w)) = w$$

für alle $(\tilde{q}, w) \in V \times W$.

Eine genaue Kenntnis von V und W benötigt man fast nie, da man sich meistens nur für den Punkt p selbst interessiert. Die Kernaussage dieses Satzes ist, dass wenn eine partielle Ableitung in einem Punkt nicht verschwindet, man das Urbild des Funktionswertes lokal als Graph darstellen kann.

Wir möchten nun noch einen Spezialfall eines allgemeineren Resultates für gewöhnliche Differentialgleichungen aufführen.

Proposition A.7. Sei $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung. Dann ist für jedes $p \in \mathbb{R}^n$ die eindeutige Lösung der Differentialgleichung

$$\gamma'(t) = A\gamma(t), \quad \gamma(0) = p$$

gegeben durch

$$\gamma(t) = e^{At}p,$$

wobei $e^{At} := Id + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$.

Bei den Resultaten, die wir nun kennengelernt haben, ist oft mehr als lediglich Differenzierbarkeit verlangt. Im Hauptteil der Arbeit ist dies irrelevant, da wir mit dem Wort *differenzierbar* stets unendlich oft differenzierbar im üblichen Sinne meinen.

A.2 Ebene Kurven

Wir gehen nun kurz auf die wichtigsten Begriffe der Differentialgeometrie von ebenen Kurven ein. Dies ist die Grundlage für das Kapitel *Die isoperimetrische Ungleichung in der Ebene*.

Definition A.8. Eine parametrisierte Kurve ist eine differenzierbare Abbildung $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall ist. Das Bild $\alpha(I)$ nennt man die Spur der Kurve und bezeichnet es mit $\text{Spur}(\alpha)$.

Wir werden das Wort *parametrisiert* ab nun weglassen und lediglich von Kurven sprechen. $\alpha'(t) = \sum_{i=1}^n \alpha'_i(t)e_i$, wobei $\alpha(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t)e_i$, nennt man den Tangentialvektor von α in t . Ist $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, so nennt man α eine ebene Kurve.

Wir führen nun zwei Sprechweisen ein.

Definition A.9. Eine Kurve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heisst regulär, falls der Tangentialvektor nirgends verschwindet, d.h. falls $\alpha'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ gilt.

Definition A.10. Eine Kurve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heisst nach Bogenlänge parametrisiert, falls die Länge des Tangentialvektors überall eins ist, d.h. falls $\|\alpha'(t)\| = 1$ für alle $t \in I$ gilt.

Ein Resultat, welches diese beiden Begriffe verbindet ist das folgende Lemma.

Lemma A.11. Jede reguläre Kurve kann nach Bogenlänge parametrisiert werden, d.h. ist $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ regulär, dann existiert ein Diffeomorphismus $\sigma : J \rightarrow I$, sodass $\alpha \circ \sigma : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ nach Bogenlänge parametrisiert ist.

Von nun an betrachten wir nur noch nach Bogenlänge parametrisierte Kurven in der Ebene. Sei also $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Der Vektor $(-y'(t), x'(t))$ entsteht, indem man $\alpha'(t)$ um $\frac{\pi}{2}$ im Gegenuhrzeigersinn dreht. Da dieser senkrecht auf $\alpha'(t)$ steht, nennt man ihn auch den Normalenvektor von α in t und bezeichnet ihn mit $\nu_\alpha(t)$.

Nach Voraussetzung ist α nach Bogenlänge parametrisiert, d.h. für jedes t gilt

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = 1.$$

Leitet man beide Seiten nach t ab, so folgt

$$2\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle = 2x'(t)x''(t) + 2y'(t)y''(t) = 0.$$

Da $\alpha''(t)$ und $\nu_\alpha(t)$ beide senkrecht auf $\alpha'(t)$ stehen, existiert für jedes t eine Zahl $\kappa_\alpha(t)$ mit

$$\alpha''(t) = \kappa_\alpha(t)\nu_\alpha(t),$$

oder was äquivalent dazu ist:

$$\kappa_\alpha(t) = \langle \alpha''(t), \nu_\alpha(t) \rangle$$

Die Zahl $\kappa_\alpha(t)$ nennt man die Krümmung der Kurve α bei t .

Wir wollen noch eine kleine Rechnung anfügen, bei der man einen Trick verwendet, den man ab und zu bei der Differentialgeometrie von Kurven und Flächen anwenden kann. Nach Definition von $\nu_\alpha(t)$ gilt für jedes t

$$0 = \langle \nu_\alpha(t), \alpha'(t) \rangle.$$

Leiten wir auf beiden Seiten nach t ab, so folgt:

$$0 = \langle \nu'_\alpha(t), \alpha'(t) \rangle + \langle \nu_\alpha(t), \alpha''(t) \rangle$$

Nach der Definition der Krümmung gilt folglich

$$\nu'_\alpha(t) = -\kappa_\alpha(t)\alpha'(t).$$

Es gibt ein sehr schönes Resultat, welches die ebene Krümmung von einfach geschlossene Kurven betrifft. Dieses verwenden wir um die Eindeutigkeit in Satz 1.1 zu zeigen.

Satz A.12. Sei $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine einfach geschlossene, nach Bogenlänge parametrisierte Kurve und κ_α dessen Krümmung. Dann gilt

$$\int_a^b \kappa_\alpha(t) dt = \pm 2\pi, \quad (\text{A.4})$$

wobei $+$ bzw. $-$ eintritt, wenn α seine Spur im Gegenuhrzeigersinn bzw. im Uhrzeigersinn durchläuft.

A.3 Glatte Flächen

Kommen wir direkt zur Definition einer glatten Fläche.

Definition A.13. Eine Menge $S \subset \mathbb{R}^3$ heisst glatte Fläche, falls für jeden Punkt $p \in S$ eine lokale Parametrisierung existiert, d.h. es existieren eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^2$, eine offene Umgebung V von p und eine differenzierbare Abbildung $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit folgenden Eigenschaften:

- i) $\varphi : U \rightarrow V \cap S$ ist bijektiv.
- ii) $\varphi : U \rightarrow V \cap S$ ist ein Diffeomorphismus, d.h. es existieren eine offene Menge $W \subset \mathbb{R}^3$ mit $V \cap S \subset W$ und eine differenzierbare Abbildung $F : W \rightarrow \mathbb{R}^2$, sodass φ^{-1} der Einschränkung von F auf $V \cap S$ entspricht.
- iii) φ ist eine Immersion, d.h. für jedes $q \in U$ ist das Differential $(d\varphi)_q$ injektiv.

Ein Paar (p, φ, U, V) heisst lokale Parametrisierung oder lokales Koordinatensystem in p .

Im Gegensatz zu Kurven definiert man eine glatte Fläche also als eine Teilmenge des \mathbb{R}^3 und nicht als eine Abbildung. Dafür gibt es verschieden Gründe, auf die wir hier nicht eingehen.

Um später Begriffe wie die Krümmung einer Fläche einführen zu können, müssen wir definieren, was wir unter einer differenzierbaren Funktion auf einer glatten Fläche verstehen.

Definition A.14. Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine glatte Fläche und $p \in S$. Eine Funktion $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ heisst differenzierbar in p , falls eine offene Umgebung $W \subset \mathbb{R}^3$ von p und eine differenzierbare Abbildung $F : W \rightarrow \mathbb{R}$ existieren, sodass f und F auf $W \cap S$ übereinstimmen. Die Funktion $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ heisst differenzierbar, wenn f in jedem Punkt von S differenzierbar ist.

Manchmal kann man diese Bedingung nicht gut überprüfen. Die folgende Proposition gibt jedoch Auskunft darüber, wie man dies in gewissen Fällen einfacher machen kann.

Proposition A.15. Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine glatte Fläche und $p \in S$. Eine Funktion $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann differenzierbar in p , wenn für eine (und damit jede) lokale Parametrisierung φ von p die Komposition $f \circ \varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar ist in $\varphi^{-1}(p)$.

Damit haben wir den Begriff einer differenzierbaren Abbildung auf einer glatten Fläche nur für reellwertige Funktionen definiert. Man kann dies aber ganz einfach auf einen Differenzierbarkeitsbegriff zwischen glatten Flächen ausweiten:

Sind $S, \tilde{S} \subset \mathbb{R}^3$ glatte Flächen, $p \in S$ und $f : S \rightarrow \tilde{S}, f(p) = (f_1(p), f_2(p), f_3(p))$ eine Abbildung zwischen diesen Flächen. Dann heisst f differenzierbar in p , falls f_1, f_2 und f_3 in p differenzierbar sind.

Natürlich möchte man auch vom Differential einer differenzierbaren Abbildung sprechen. Dafür benötigen wir die Definition der Tangentialebene.

Definition A.16. Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine glatte Fläche und $p \in S$. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ heisst *Tangentenvektor* an S in p , falls eine parametrisierte Kurve $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\alpha(0) = p$ und $\alpha'(0) = v$ existiert. Die Menge aller Tangentenvektoren an S in p wird mit $T_p S$ bezeichnet und heisst die *Tangentialebene* an S in p .

Auch wenn man sich die Tangentialebene $T_p S$ vorstellt als eine Ebene, welche S in p berührt, ist es wichtig sich bewusst zu sein, dass $T_p S$ durch den Ursprung geht. Zum Beispiel gilt $T_p S^2 = (\mathbb{R}p)^\perp$, wobei $S^2 = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \|p\| = 1\}$. Es ist nicht schwer einzusehen, dass wenn $\varphi : U \rightarrow V \cap S$ eine lokale Parametrisierung von p ist, dann $T_p S = (d\varphi)_{\varphi^{-1}(p)}(\mathbb{R}^2)$ gilt, d.h. $\{\partial_1 \varphi(u), \partial_2 \varphi(u)\}$ ist eine Basis von $T_{\varphi(u)} S$.

Sei nun $f : S \rightarrow \tilde{S}$ eine differenzierbare Abbildung, $p \in S$, $v \in T_p S$ und $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Kurve mit $\alpha(0) = p$ und $\alpha'(0) = v$. Man definiert das Differential von f in p als

$$(df)_p(v) := (f \circ \alpha)'(0) \in T_{f(p)} \tilde{S}.$$

Es zeigt sich, dass diese Definition nicht von der gewählten Kurve α abhängt. Mit dem Differential haben wir fast alles, um die Krümmung auf einer Fläche zu definieren. Davor aber erst noch die folgende Definition.

Definition A.17. Eine glatte Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ heisst *orientierbar*, falls ein differenzierbares Einheitsnormalenvektorfeld auf S existiert, d.h. falls eine differenzierbare Abbildung $\nu : S \rightarrow S^2$ existiert, sodass für alle $p \in S$ gilt:

- i) $\|\nu(p)\| = 1$
- ii) $\nu(p) \perp T_p S$

S heisst *orientiert*, falls S mit einem differenzierbaren Einheitsnormalenvektorfeld ausgestattet ist. Die Abbildung $\nu : S \rightarrow S^2$ wird *Gaussabbildung* genannt.

Es ist klar, dass falls eine glatte Fläche orientierbar ist, genau zwei differenzierbare Einheitsnormalenvektorfelder auf dieser glatten Fläche existieren und diese durch Spiegelung auseinander hervorgehen. Da $T_q S^2 = (\mathbb{R}q)^\perp$ für jedes $q \in S^2$ gilt, folgt

$$T_p S = (\mathbb{R}\nu(p))^\perp = T_{\nu(p)} S^2,$$

d.h. $(d\nu)_p : T_p S \rightarrow T_{\nu(p)} S^2 = T_p S$ ist eine lineare Abbildung von einem Vektorraum auf sich selbst. Deswegen macht es Sinn von der Determinante, der Spur, Eigenvektoren etc. zu sprechen. Dies ist alles was wir brauchen, um die Krümmung einer Fläche zu definieren.

Definition A.18. Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte, glatte Fläche, $p \in S$ und $\nu : S \rightarrow S^2$ die Gaussabbildung. Dann heisst

- i) $K(p) := \det(d\nu)_p$ die *Gausskrümmung* von S in p .
- ii) $H(p) := \frac{1}{2} \text{Spur}(d\nu)_p$ die *mittlere Krümmung* von S in p .

Es ist leicht einzusehen, dass die Definition der Gausskrümmung nicht von der Wahl des Einheitsnormalenvektorfeldes abhängt. Wechselt man jedoch die Wahl des Einheitsnormalenvektorfeldes, so wechselt die mittlere Krümmung ihr Vorzeichen.

Man nennt einen Punkt $p \in S$ *elliptisch* falls $K(p) > 0$, *hyperbolisch* falls $K(p) < 0$ und *parabolisch* falls $K(p) = 0$. Es ist eine wohlbekannte Tatsache, dass jede kompakte Fläche mindestens einen elliptischen Punkt besitzt.

Um auf glatten Flächen zu rechnen, sind die sogenannten Fundamentalformen von grosser Bedeutung.

Definition A.19. Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine glatte Fläche und $p \in S$. Die Abbildung

$$I_p : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}, (v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$$

heisst die *erste Fundamentalform* in p .

Für eine lokale Parametrisierung $\varphi : U \rightarrow V \cap S$ definiert man

$$g_{ij}(u) := \langle \partial_i \varphi(u), \partial_j \varphi(u) \rangle,$$

wobei $i, j \in \{1, 2\}$. Die Matrix der ersten Fundamentalform in $\varphi(u)$ bzgl. der Basis $\{\partial_1 \varphi(u), \partial_2 \varphi(u)\}$ ist dann $(g_{ij}(u))_{1 \leq i, j \leq 2}$.

Definition A.20. Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte, glatte Fläche, $p \in S$ und $\nu : S \rightarrow S^2$ die Gaussabbildung. Die Abbildung

$$II_p : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}, (v, w) \mapsto -\langle v, (d\nu)_p(w) \rangle$$

heißt die zweite Fundamentalform in p .

Genau wie bei der ersten Fundamentalform definiert man für eine lokale Parametrisierung $\varphi : U \rightarrow V \cap S$

$$h_{ij}(u) := -\langle \partial_i \varphi(u), (d\nu)_{\varphi(u)}(\partial_j \varphi(u)) \rangle = \langle \partial_{ij}^2 \varphi(u), \nu(\varphi(u)) \rangle,$$

wobei wir bei der zweiten Gleichheit den gleichen Trick verwendet haben, wie bei der Berechnung von $\nu'_\alpha(t)$. Die Matrix der ersten Fundamentalform in $\varphi(u)$ bzgl. der Basis $\{\partial_1 \varphi(u), \partial_2 \varphi(u)\}$ ist dann $(h_{ij}(u))_{1 \leq i, j \leq 2}$. Ist $(l_{ij}(u))_{1 \leq i, j \leq 2}$ die Matrix von $(d\nu)_p$ bzgl. der Basis $\{\partial_1 \varphi(u), \partial_2 \varphi(u)\}$, so gilt

$$(h_{ij})_{ij} = -(g_{ij})_{ij} (l_{ij})_{ij},$$

was äquivalent ist zu

$$(l_{ij})_{ij} = -(g_{ij})_{ij}^{-1} (h_{ij})_{ij}.$$

Also haben wir folgende Formel für die Berechnung der Gausskrümmung hergeleitet:

$$K(\varphi(u)) = \frac{h_{11}(u)h_{22}(u) - h_{12}(u)^2}{g_{11}(u)g_{22}(u) - g_{12}(u)^2}$$

Wir wollen nun noch eine letzte Tatsache anmerken. Es gibt ein Resultat in der *linearen Algebra*, einem Teilgebiet der Mathematik, das besagt, dass für jede symmetrische lineare Abbildung eine orthonormal-basis Basis aus Eigenvektoren besteht. Da das Differential der Gaussabbildung symmetrisch ist, existieren deshalb $w_1(p), w_2(p) \in T_p S$ mit

$$(d\nu)_p(w_i(p)) = \kappa_i(p)w_i(p).$$

$\kappa_1(p)$ und $\kappa_2(p)$ heißen *Hauptkrümmungsrichtungen* in p . Für diese gilt

$$K(p) = \kappa_1(p)\kappa_2(p)$$

und

$$H(p) = \frac{\kappa_1(p) + \kappa_2(p)}{2}.$$

Damit haben wir alle Begriffe und Resultate, die man kennen muss, um der vorliegenden Arbeit folgen zu können, besprochen.

Literatur

[do Carmo, 1998] do Carmo, M. P. (1998). *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen (3. Aufl.)*. Vieweg Studium Aufbaukurs Mathematik. Vieweg.

[Tretter, 2012] Tretter, C. (2012). *Analysis 2*. Birkhäuser.

[Forster, 2012] Forster, O. (2012). *Analysis 3. Mass- und Integrationstheorie, Integralsätze im \mathbb{R}^n und Anwendungen (7. Aufl.)*. Springer Spektrum

Selbstständigkeitserklärung

Ich erkläre hiermit, die vorliegende Arbeit eigenständig und nur unter Verwendung der angegebenen Hilfsmittel angefertigt zu haben.

Frieder Jäckel

Bern, 18. November 2016