

TRAVAIL DE MATURITE

Les Mathématiques de l'Origami



Gaëlle AMBEAU, 3M2

Travail supervisé par M. Jacques Ferrez
Gymnase de Chamblandes

2018-2019

référence de l'image de la page de couverture [1]

Table des matières

1	Introduction	3
1.1	Signification	3
1.2	Origine	3
1.3	Naissance de l'origami	4
1.4	La Tamatebako	4
1.5	L'histoire de Sadako Sasaki	5
1.6	D'autres arts nés du papier	5
1.7	L'arrivée en Europe	6
1.8	L'origami dans la pédagogie	7
1.9	L'origami, une étude toujours plus riche	7
1.9.1	La construction des nombres	7
1.9.2	Les canevas	8
1.9.3	L'aspect géométrique	8
1.9.4	L'épaisseur du papier	8
2	Les nombres constructibles	9
2.1	Les axiomes de Justin-Huzita-Hatori	10
2.2	Les nombres pythagoriciens	12
2.2.1	Construction d'une addition ou d'une soustraction	12
2.2.2	Construction d'une multiplication ou d'une division	14
2.2.3	Construction à l'aide du théorème de Pythagore	15
2.3	Les nombres euclidiens	15
2.3.1	Construction de la racine d'un nombre quelconque	15
2.4	Les nombres d'équation polynomiale	16
3	Les problèmes antiques	18
3.1	Le Théorème de Haga	18
3.1.1	Le premier Théorème de Haga	19
3.1.2	Le deuxième théorème de Haga	20
3.1.3	Le troisième théorème de Haga	22
3.2	La duplication du cube	23
3.3	La trisection de l'angle	24

4	Canevas de l'origami	25
4.1	Les canevas	25
4.2	Le théorème de Meakawa	27
4.2.1	Utilisation du théorème de Meakawa	27
4.2.2	Preuve du théorème de Meakawa	28
4.3	Le théorème de Kawasaki	30
4.3.1	Utilisation du théorème de Kawasaki	30
4.3.2	Preuve du théorème de Kawasaki	31
4.4	Le théorème des deux couleurs	32
4.5	Le théorème de la découpe unique	33
4.5.1	La méthode du squelette droit	34
4.5.2	La méthode de l'emballage sur disque	37
5	L'aspect géométrique	39
5.1	La géométrie plane	39
5.1.1	D'un rectangle à un carré	39
5.1.2	D'un rectangle à un triangle équilatéral	41
5.1.3	Construire un octogone	42
5.1.4	La boîte à secrets	47
5.1.5	D'une bande rectangulaire à un pentagone	49
5.1.6	Construction d'un pentagone à partir d'une feuille A4	50
5.1.7	Le pentagone à partir d'un quart de feuille A4	52
5.1.8	Du carré au pentagone	55
5.1.9	Le flexagone	56
5.2	La géométrie tridimensionnelle	58
5.2.1	Les polyèdres réguliers	58
5.2.2	Preuve du nombre cinq des polyèdres réguliers	59
5.2.3	Construire un tétraèdre	60
5.2.4	Construire une pyramide à base carrée	62
5.2.5	Construire un cube	64
5.2.6	Construire un hexaèdre	66
5.2.7	Construire un rhomboèdre à faces cassées	67
5.2.8	Construire un dodécaèdre	67
5.2.9	Construire un octaèdre	69
5.2.10	Construire un icosaèdre	71
5.2.11	Octo-flexagone	72
6	Les limites de l'origami	73
7	Conclusion	76
7.1	Inspirations	76
7.2	Autocritique	77

Chapitre 1

Introduction

Ce chapitre traite de l'histoire de l'origami : sa signification, ses origines, les histoires de l'origami, les arts dérivés, mais également de son aspect éducatif. La suite de ce travail portera sur l'étude de l'origami et nous présenterons certains thèmes importants.

1.1 Signification

Le mot *origami* signifie l'art du pliage du papier [2]. D'origine japonaise, il est composé de *oru* « plier » et de *rami* « papier » [3].

L'origami est une suite de pliage qui donne lieu à une forme soit géométrique soit imagée. Généralement, le pliage débute avec une feuille carrée, mais par extension n'importe quelle forme peut être utilisée. Le plus important est que seul le pliage est autorisé (le découpage et le collage du papier sont normalement interdits). Cette définition est tirée du site internet « *Qu'est-ce que l'origami ?* » [4].

1.2 Origine

Le jiǎnzhǐ, ou *papier découpé* [6], est l'ancêtre de l'origami. Pourtant il n'est pas japonais, mais chinois tout comme le papier. Il apparaît aux environs de -200 ans avant J.-C. à l'an 0.

Un jour, un érudit écrit sur un papier le caractère *fu*, qui signifie « bonheur » en chinois. Il le donna à sa femme qui le découpa en forme du caractère. C'est ainsi qu'est né un des premiers arts du papier.

Bien que le papier était principalement découpé, le pliage y était déjà pratiqué. Le but est surtout d'obtenir de parfaites symétries. Ce sont les moines bouddhistes qui, vers le VII^e siècle, ont importé l'art du jiǎnzhǐ au Japon en traversant la Corée. Un exemple de jiǎnzhǐ est représenté ci-contre à la figure 1.1.



FIGURE 1.1 – Jiǎnzhǐ [5]

La vidéo [7] qui présente une introduction du *papercutting* et le site internet [3] à propos de la *petite histoire de l'origami* sont les sources de cette section. Pour plus d'informations, consulter la vidéo [8] sur le jiǎnzhǐ et comment en réaliser.

1.3 Naissance de l'origami

Au Japon, le jiǎnzhǐ s'est développé et a pris une autre forme. En effet, l'idée du pliage du papier est davantage restée que celle du découpage. C'est ainsi qu'est né l'origami. Comme le papier était très cher, il avait un côté sacré et précieux. C'est pour cela que l'origami était employé surtout comme décoration de table pour les cérémonies de saké. Offrir un origami en forme de fleurs était un symbole d'amitié pour les samouraïs japonais. Malheureusement, certains origamis se sont perdus avec le temps, car la transmission de cet art se faisait le plus souvent par oral. Voir [3], [9] et [10].

1.4 La Tamatebako

La Tamatebako est un origami qui prend la forme d'une boîte cubique. Cette boîte peut s'ouvrir de tous les côtés : on dit qu'elle est modulaire (voir figure 1.2). La Tamatebako est en fait issue d'un ancien conte japonais et elle peut être comparée à la Boîte de Pandore pour les Européens [11]. Les sources de ce conte sont les sites internet [12] et [13].

Un pêcheur, nommé Urashima Tarō, vit un jour une tortue se faire maltraiter par trois enfants. Il leur proposa un échange : sa pêche contre la tortue. Une fois ce marché conclut, l'homme remit la tortue dans l'eau. Il ne savait pas qu'il venait de sauver une princesse, la fille du Dieu de l'Océan.

Le lendemain, une gigantesque tortue se rendit chez Urashima et lui expliqua qui il avait sauvé. En guise de remerciement, il fut invité à séjourner dans le monde sous-marin où vivait cette princesse. Il y vécut très heureux, mais perdit rapidement la notion du temps. Sa famille commença à lui manquer et il songea à rentrer chez lui. La princesse de l'Océan lui offrit un cadeau d'adieu, la Tamatebako, avec comme seule consigne de ne pas l'ouvrir avant d'être rentré chez lui.

Sur le chemin du retour, le pauvre pêcheur ne reconnaissait plus rien, comme si son monde avait changé. Il comprit rapidement que le temps dans le monde sous-marin s'était écoulé plus lentement qu'à l'air libre. Il apprit par la suite que ses parents avaient trouvé la mort en croyant leur fils perdu en mer.

Une vague de tristesse l'envahit et malgré la consigne qu'il avait reçue, Urashima



FIGURE 1.2 – La boîte de Tamatebako [1]

Tarō ouvrit la boîte. Un épais nuage de fumée le submergea. Ses cheveux et sa barbe poussèrent et blanchirent, de profondes rides apparurent sur son visage et sa posture se courba. Il comprit que la boîte renfermait tout le temps qu'il avait passé au palais du monde aquatique.

Contrairement à la plupart des contes européens et bien que la fin puisse paraître quelque peu cruelle, ce conte n'a pas pour but de donner une leçon de morale : la curiosité du pêcheur n'est aucunement critiquée. La vieillesse de l'homme est plutôt vue comme naturelle, faisant partie de la vie, et qui va l'accompagner vers une mort méritée.

1.5 L'histoire de Sadako Sasaki

D'après la légende japonaise des mille grues, quiconque arrive à plier mille grues en papier pourra formuler un vœu qui sera exaucé. Ce conte est tirée du site internet [15].

Sadako Sasaki était une jeune fille japonaise qui fut fortement exposée aux rayonnements des bombardements atomiques d'Hiroshima. Elle n'est pas morte sur le coup, mais comme de nombreuses personnes irradiées, elle développa une leucémie.

Sadako connaissait cette légende et décida de confectionner mille grues dans le but de guérir. Elle réussit à en plier 644 avec tous les papiers qu'elle trouvait, comme par exemple les étiquettes de ses médicaments. Elle mourut à l'âge de douze ans, en 1955, un an après avoir commencé ses origamis.

Émus par son histoire tragique et son travail acharné, sa classe et ses proches ont décidé de plier les 356 grues restantes. Une guirlande de mille grues a été déposée sur sa tombe. Sadako et l'origami de la grue sont, depuis, devenus des emblèmes de paix. La grue est également vue comme un symbole de longévité.



FIGURE 1.3 – Statue de Sadako Sasaki avec les mille grues en papier [14]

1.6 D'autres arts nés du papier

L'origami n'est pas le seul art né du papier. En voici quelques exemples. Pour plus d'exemples d'art dérivé du pliage, consulter le site [16]. Le *chiyogami* fait référence au « washi » [17], un papier japonais qui a la spécificité d'avoir des motifs différents selon le côté de la feuille. Ce papier est reconnu pour sa très grande variété de motifs. Un exemple

est présenté à la figure 1.4. Ce papier est fabriqué à partir de longues fibres du mûrier. Il est facile à utiliser pour le pliage, car il est à la fois résistant et souple. Auparavant, les motifs de la feuille étaient des imprimés qui se faisaient à la main grâce à des tampons de bois et des figures pré-découpées. De nos jours, ces motifs sont imprimés par sérigraphie, c'est-à-dire à l'aide de morceaux de tissus.

Le kirigami signifie en japonais « l'art du coupage de papier » [18]. Un exemple de kirigami est illustré à la figure 1.5. On parle également de kirie, « dessin découpé », en l'absence de pliage. Au début, le kirigami était très utilisé dans les cérémonies religieuses japonaises, sous la forme d'éclair carré (figure 1.6). Le kirigami a évolué en prenant des formes plus complexes, comme des structures tri-dimensionnelles et se retrouve par exemple dans des cartes de vœux. Des exemples sont proposés sur les sites [19] et [20] de Yasushi Shibata.



FIGURE 1.4 – Papier Washi [21]

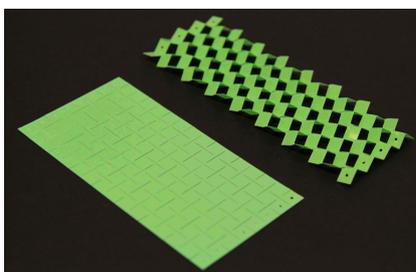


FIGURE 1.5 – Kirigami [22]



FIGURE 1.6 – L'éclair carré [23]

1.7 L'arrivée en Europe

Au VII^e siècle, la Chine était en conflit avec l'empire maure, qui s'étendait sur le Maghreb. Des prisonniers chinois ont été forcés à dévoiler le secret de la fabrication du papier. Au XIII^e siècle, les Maures ont conquis le sud de l'Espagne. C'est ainsi que l'Europe découvre le papier.

Deux théories pourraient expliquer les origines de l'origami en Europe. Les techniques de pliage ont pu suivre la route de la soie ou, au contraire, le pliage du tissu existait déjà et il aurait évolué avec l'apparition du papier. Les Européens auraient constaté que plier le papier est plus facile que le tissu. En effet, les plis restent et les constructions sont plus solides. Le pliage du tissu n'a pas pour autant disparu, mais la popularité de l'origami est nettement plus grande.

Les explications de l'arrivée du papier et de l'origami en Europe ont été tirées du site internet de l'Université de Genève [24] et d'un travail de Faculté [25].

1.8 L'origami dans la pédagogie

Le pédagogue allemand Friedrich Fröbel intruit, dès 1800, l'origami dans les jardins d'enfants. Selon lui [23], cela apporte de nombreux bénéfices dans le développement de l'enfant : augmentation de la créativité, de l'intérêt artistique, de la précision des gestes et stimulation de la mémoire visuelle en améliorant l'écoute et l'attention. Finalement, l'origami serait un excellent moyen d'acquérir une base mathématique, par exemple en découvrant de nouvelles formes géométriques.

Des recherches actuelles [26] montrent que des bénéfices existent aussi chez les adultes : en les focalisant sur des gestes manuels, l'origami stimule la concentration et la mémoire et les aiderait à se détendre.

1.9 L'origami, une étude toujours plus riche

L'étude de l'origami a débuté vers 1907, mais c'est surtout vers la fin des années 1940 qu'elle s'est intensifiée en prouvant la richesse de son étude.

Dans le but d'échanger des nouvelles découvertes autour de l'origami, des conférences sont organisées tous les quatre ans depuis 1989 : *The International Meetings of Origami Science and Technology* ou *OSME*. Leur but est d'étendre les nouvelles découvertes dans d'autres domaines. Cela concerne autant les mathématiques que l'enseignement, les sciences, le design, l'histoire, le développement des technologies spatiales... Par exemple, l'origami permet de comprendre le fonctionnement du repliement des protéines. La septième conférence s'est tenue au début du mois de septembre 2018 à Oxford. Elle a attiré près de 250 participants en provenance de dix-huit pays différents, essentiellement des États-Unis, du Royaume-Uni, du Japon, de la Chine et de l'Allemagne. Les informations de ces conférences sur l'origami sont tirées du site [27]. Pour tous compléments concernant la dernière conférence, consulter le site internet de la septième conférence [28].

Dans ce travail, nous allons aborder différents thèmes, comme les nombres constructibles, les théorèmes nés des canevas, de la géométrie et les limites de l'origami.

1.9.1 La construction des nombres

Depuis la Grèce Antique, la construction des nombres à la règle et au compas est beaucoup étudiée dans les pays occidentaux. A partir d'une longueur quelconque, prise pour unité, le but est de construire le plus de grandeurs possibles, mais positives, comme ce sont des longueurs qui sont représentées. Les Grecs ont découvert que leurs techniques ne permettaient pas de construire tous les nombres. Trois problèmes leur ont résisté : la quadrature du cercle, la duplication du cube et la trisection de l'angle. Cela correspond à construire les nombres π et $\sqrt[3]{2}$ et à partager un angle en trois angles égaux.

Vers la fin du XX^e siècle, les mathématiciens découvrent les axiomes de Justin-Huzita-Hatori. C'est la liste exhaustive de tous les plis possibles de l'origami. Ces axiomes sont présentés lors de la première conférence de l'origami en 1989. C'est ainsi que fut découvert le fait que l'origami permet de construire davantage de nombres que la règle et le compas.

En effet, l'origami permet, en outre, de résoudre la duplication du cube et la trisection de l'angle.

1.9.2 Les canevas

Le canevas d'un origami représente, sur la feuille utilisée pour le pliage, tous les plis qui ont servi à donner la forme finale de l'origami. Deux types de plis doivent être distingués : les plis montagnes (qui forment une bosse au pliage) et les plis vallées (représentant un creux).

Il existe différents théorèmes qui permettent de déterminer si un pli est réalisable à plat. Le théorème de Meakawa énonce que sur un canevas il doit y avoir une différence de deux plis entre les plis montagnes et les plis vallées. Par le théorème des deux couleurs, un canevas peut être colorié à l'aide de deux couleurs sans que deux zones adjacentes soient de la même couleur. Le théorème de Kawasaki affirme que la somme alternée des angles vaut π .

Le théorème de la découpe unique utilise le pliage pour permettre la découpe d'un seul coup de ciseaux des contours d'un dessin construit avec uniquement des traits rectilignes. Pour réaliser ce théorème, deux techniques sont proposées : le squelette droit et l'empaquetage sur disque.

1.9.3 L'aspect géométrique

Les pliages permettent également de découvrir un aspect très géométrique et donc mathématique. En général, la base que nous utilisons est le carré, mais il est possible de débiter un origami avec une autre forme de papier.

A partir d'une forme de départ, le pliage permet d'obtenir d'autres figures, par exemple, un carré à partir d'un rectangle. Nous débiterons avec des formes planes : différents polygones réguliers, mais également d'autres figures plus mystérieuses telles que la boîte à secret, qui est une figure en forme d'étoile, et le flexagone, un hexagone qui possède étonnement trois faces.

Nous passerons ensuite aux solides. Nous aborderons les solides de Platon, cinq polyèdres réguliers, et ceux de Kepler-Poinsot, quatre polyèdres étoilés. Nous construirons principalement des solides réguliers. Nous nous intéresserons également à réaliser un flexagone en volume, c'est-à-dire un solide qui se tourne à l'infini.

1.9.4 L'épaisseur du papier

Certains théorèmes, comme celui de la découpe unique, autorisent une infinité de pliages, alors qu'en réalité le pliage est limité par l'épaisseur du papier. Il est vrai qu'il n'est, par exemple, pas possible de plier une feuille en deux une infinité de fois. A une époque, il était souvent dit que plier plus de huit fois une feuille en deux était impossible. Beaucoup de chercheurs ont essayé de dépasser ce nombre, qui peut sembler arbitraire. Nous verrons comment Britney Gallivan réussit à dépasser le nombre huit de pliage d'une feuille en deux.

Chapitre 2

Les nombres constructibles

La construction des nombres à partir d'une longueur donnée, considérée comme unité, a beaucoup été étudiée.

En Grèce Antique, la construction à la règle et au compas est très répandue pour représenter les nombres. Deux points A et B sont dessinés. Le premier axiome permet de relier A et B d'une droite par l'utilisation de la règle. Le second axiome est obtenu grâce au compas. Il permet de construire un cercle de centre A et dont le tracé passe par le point B . Ces deux axiomes sont les principes de la géométrie d'Euclide. Ils correspondent aux deux seules possibilités de construction à partir de deux points. L'ensemble des nombres constructibles par cette méthode sera noté RC . L'utilisation unique du compas pour rapporter des distances est appelée la construction à la règle et au compas à pointe sèche.

Certains problèmes ne peuvent être résolus par la règle et le compas. Les Grecs se sont intéressés à trois d'entre eux. On les appelle les problèmes antiques. Il s'agit de la quadrature du cercle, de la duplication du cube et de la trisection d'un angle. La quadrature du cercle consiste à construire un carré de même aire qu'un cercle donné, ce qui revient à construire le nombre π . La duplication du cube consiste à construire l'arête d'un cube dont le volume est le double de celui d'un cube donné. Cela revient à construire $\sqrt[3]{2}$. La trisection d'un angle est, comme son nom l'indique, le partage d'un angle en trois parties égales.

Ce n'est que bien plus tard que la construction à l'origami est née. Dans le pliage, les axiomes sont différents. Sur une feuille de papier, deux points et deux droites sont dessinés. Ces axiomes listent toutes les combinaisons possibles avec ces points et ces droites. On note OR l'ensemble des nombres constructibles par l'origami.

Les sources de cette introduction sont l'article de Jean-Paul Delahaye [29] et les sites [30], de l'Université de Montréal [31] et d'Yvan Monka [32], professeur des mathématiques à l'Académie de Strasbourg.

Le but de ce chapitre est de présenter en premier lieu les plis autorisés en origami. L'étape suivante sera la comparaison des ensembles RC et OR .

2.1 Les axiomes de Justin-Huzita-Hatori

Un axiome est une proposition considérée vraie. Aucune démonstration ne prouve sa véracité, car il est supposé comme suffisamment évident. Les axiomes de Justin-Huzita-Hatori décrivent de manière exhaustive toutes les façons dont une feuille de papier peut être pliée (voir [25] et [33]).

En 1989, Jacques Justin a découvert la résolution des équations du troisième degré grâce à l'origami. En même temps, il trouve une énumération des pliages possibles, qui sont au nombre de sept. Par la suite, Humiaki Huzita et Benedetto Scimemi présentent six axiomes durant la première conférence de l'origami. On les appelle alors les six axiomes de Huzita.

Plus tard, Koshiro Hatori affirme qu'il existe un septième axiome, comme Justin l'avait prédit. Le septième axiome est un peu superficiel, car il ne permet pas de construire plus de nombres que les six premiers. Il permet tout de même de compléter l'ensemble des axiomes. C'est pour cette raison que certaines sources énumèrent seulement les six premiers axiomes. Les sept axiomes sont souvent appelés, axiomes de Huzita-Hatori ou encore les axiomes de Justin-Huzita-Hatori.

Nous allons présenter les sept axiomes. Leur illustration se trouve ci-dessous, à la figure 2.1. La description des axiomes est tirée de l'article de Jean-Paul Delahaye [29], tout comme l'illustration, alors que leur explication vient des sites [31] et [30].

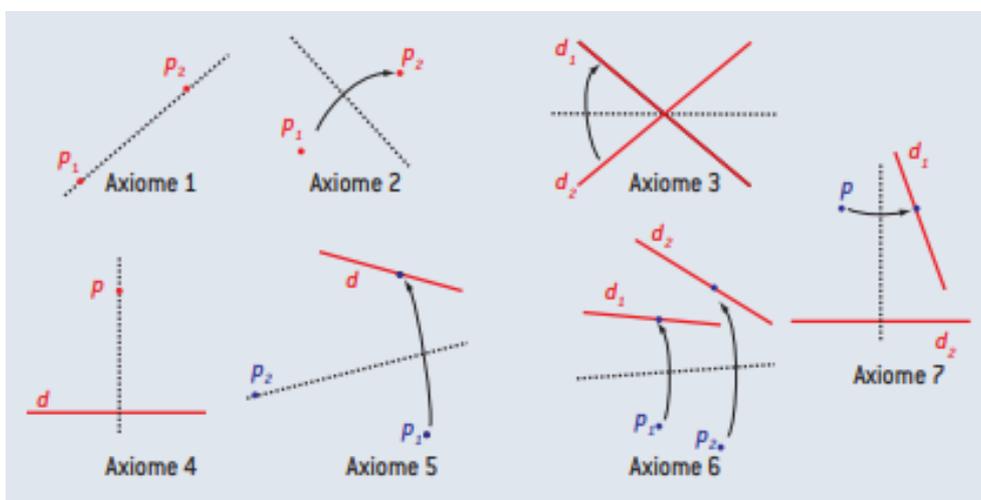


FIGURE 2.1 – Les sept axiomes [29]

Axiome 1

Il existe toujours un pli reliant deux points distincts.

Axiome 2

Un pli unique amène un premier point sur un second.

Ce pli représente une droite équidistante aux deux points. Il correspond donc à la médiatrice du segment reliant ces points.

Axiome 3

Il existe toujours un pli qui superpose deux droites.

Si ces droites sont sécantes, comme à la figure 2.2, alors deux plis sont possibles. Ils sont bissecteurs soit de l'angle aigu soit de l'angle obtus.

Dans le second cas, les droites sont parallèles, comme à la figure 2.3. Il existe alors un seul pli qui les superpose. Il est parallèle et à équidistant des deux droites.

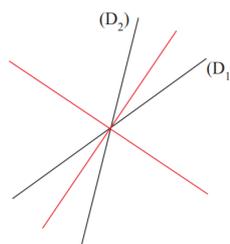


FIGURE 2.2 – Les deux droites D_1 et D_2 sont sécantes [30].



FIGURE 2.3 – Les deux droites D_1 et D_2 sont parallèles [30].

Axiome 4

Partant d'un point et d'une droite, il est possible de construire un pli qui passe par le point et qui coupe la droite perpendiculairement.

Axiome 5

Soient une droite et deux points distincts. Lorsque c'est possible, il existe un pliage qui passe par le premier point et qui amène le second point sur la droite.

Appelons Q le point qui appartient au pli et P celui qui est amené sur la droite d par le pli p . Le pli de l'axiome 5 est possible, lorsqu'il existe un cercle de rayon PQ qui coupe la droite d . Si le cercle ne coupe pas la droite, le pli n'est pas réalisable (figure 2.4). Deux configurations sont possibles. La première est que la droite soit tangente au cercle et un seul pli est donc possible (figure 2.5). La seconde possibilité est que la droite coupe les cercles en deux points. Il y a alors deux plis possibles, comme le montre la figure 2.6.

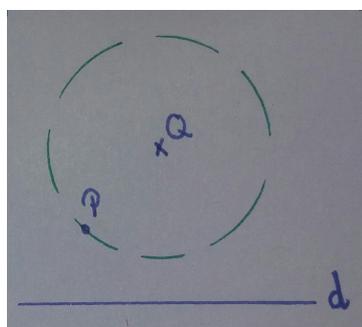


FIGURE 2.4 – Le cercle ne coupe pas la droite.

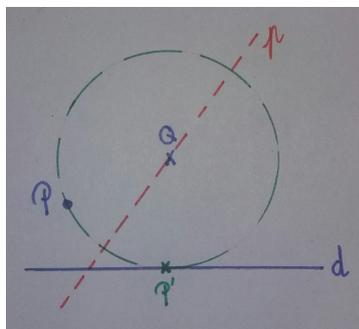


FIGURE 2.5 – La droite est tangente au cercle.

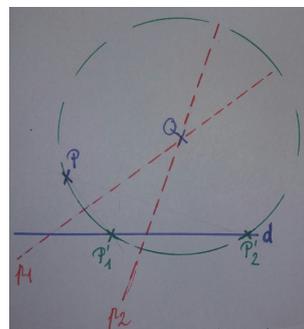


FIGURE 2.6 – Le cercle coupe la droite en deux points distincts.

Axiome 6

Soient deux droites et deux points. Lorsque c'est possible, un pli peut superposer le premier point sur la première droite et le second point sur la seconde droite.

Axiome 7

Soient deux droites et un point. Lorsque c'est possible, il existe un pli orthogonal à la première droite et qui amène le point la seconde droite.

2.2 Les nombres pythagoriciens

On appelle nombres pythagoriciens les nombres qui peuvent être construits à la règle et au compas à pointe sèche, mais également à l'aide des quatre premiers axiomes. Nous parlons alors d'*origami pythagoricien* [34]. Algébriquement, cela correspond aux nombres qui se construisent à partir d'additions, de différences, de multiplications et de divisions de nombres entiers. De plus, pour construire ces nombres, il est également possible d'extraire la racine de la somme des carrés de deux entiers (soit le théorème de Pythagore). Par exemple, la racine carrée de 2 est un nombre pythagoricien, car $\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1^2}$.

L'ensemble des nombres constructibles par l'origami pythagoricien est plus petit que RC , l'ensemble des nombres constructibles par la règle et le compas. En effet, la règle et le compas permettent par exemple de construire $\sqrt{3}$, contrairement à l'origami pythagoricien. La racine carrée de 3 se construit à partir des nombre 1 et $\sqrt{2}$, car $3 = 1^2 + \sqrt{2}^2$. Or, $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre naturel. La racine de 3 fait donc partie des nombres euclidiens.

2.2.1 Construction d'une addition ou d'une soustraction

Nous désirons additionner ou soustraire à un nombre quelconque positif un nombre positif. Dans les deux cas, ces nombres peuvent être différents ou égaux. S'ils sont égaux, leur différence est nulle et leur addition vaut le double d'un des deux nombres. Notons bien que ces nombres sont obligatoirement positifs, car ils représentent des longueurs. De plus, leur différence est toujours positive. Elle correspond donc à la valeur absolue de leur différence arithmétique.

Nous allons construire une addition et une soustraction selon deux méthodes : d'abord avec la règle et le compas puis uniquement avec l'origami.

A la règle et au compas

Considérons deux nombres a et un nombre b quelconques, tous deux strictement positifs.

A l'aide de la règle, nous construisons une droite qui prolonge le segment a . A une des extrémités de a , nous reportons la longueur b grâce au compas. Nous obtenons soit une addition soit une soustraction, suivant de quel côté nous avons reporté la longueur b . Ces opérations sont illustrées à la figure 2.7.

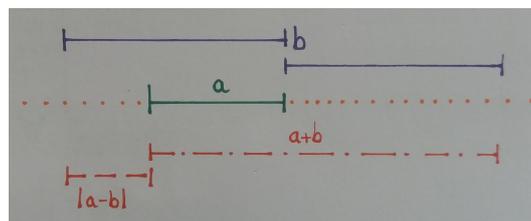


FIGURE 2.7 – L'addition et la soustraction de deux nombres quelconques à la règle et au compas

A l'aide de l'origami

Nous souhaitons réaliser ces mêmes opérations avec l'origami. Considérons les longueurs OA et OB , toutes deux strictement positives.

Par l'axiome 1, nous plions le long des points O et A afin d'obtenir la droite a . De même, nous construisons la droite b en reliant les points O et B . Par l'axiome 3, les droites d_1 et d_2 , en pointillé, sont réalisées en superposant les droites a et b . La droite d_1 est la bissectrice de l'angle aigu entre les droites a et b et la droite d_2 celle de l'angle obtus. Les points D_1 et D_2 sont respectivement les projections orthogonales de B sur d_1 et de A sur d_2 . Par l'axiome 4, nous construisons une première droite p_1 perpendiculaire à d_1 passant par le point B et une seconde droite p_2 orthogonale à d_2 passant par le point A . L'intersection entre les droites p_1 et a forme le point B' et l'intersection entre p_2 et b crée le point A' . Le segment $A'B$ est l'addition des longueurs OA et de OB , tandis que le segment AB' est la différence des longueurs OA et OB . La figure 2.8 illustre les constructions et les opérations.

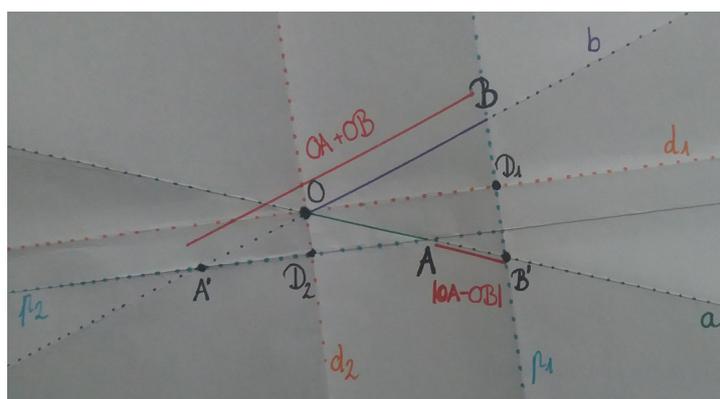


FIGURE 2.8 – L'addition et la soustraction de deux nombres quelconques avec l'origami

Prouvons que $A'B$ est bien l'addition des longueurs de OA et de OB . Pour cela, vérifions que les triangles $OA'D_2$ et OD_2A sont isométriques. Nous considérons l'intersection D_2 des droites d_2 et p_2 . Sachant que D_2 appartient à la bissectrice d_2 des droites a et b , les angles $\widehat{AOD_2}$ et $\widehat{D_2OA'}$ sont égaux. La droite p_2 est orthogonale à d_2 . Les triangles sont donc rectangles. Ainsi, les triangles $OA'D_2$ et OD_2A sont semblables, car ils ont deux

angles égaux (un angle droit et un autre angle isométrique) et le segment OD_2 est un côté commun aux deux triangles. Les triangles sont donc forcément isométriques. Nous en concluons que OA' est égal à OA . Ainsi, le segment $A'B$ vaut $OA + OB$.

La longueur AB' est égale à la valeur absolue de la différence des longueurs OA et de OB . La preuve est similaire est celle de l'addition. Nous allons démontrer que \widehat{OB} a la même longueur que OB' . Notons D_1 l'intersection des droites d_1 et p_1 . Les angles $\widehat{B'OD_1}$ et $\widehat{D_1OB}$ sont isométriques. Sachant que d_1 et p_1 sont perpendiculaires, les triangles $OB'D_1$ et OD_1B sont rectangles et donc semblables. Le côté OD_1 est commun aux deux triangles. Ainsi, ces triangles sont isométriques. Finalement, les segments OB et OB' sont égaux et donc que AB' est égal à la valeur absolue de $OA - OB$.

2.2.2 Construction d'une multiplication ou d'une division

Nous désirons à présent effectuer la multiplication ou la division de deux nombres quelconques entiers positifs a et b . Ces nombres sont obligatoirement positifs, car ce sont des longueurs. Nous allons utiliser le principe des triangles semblables pour construire ces deux opérations. Remarquons que si a est égal à b , leur rapport vaut 1.

Soient deux triangles semblables OAC et OBD . Avec O , A et B alignés et O , C et D également alignés, les deux triangles ont un sommet en commun, O . Si OA est plus petit que OB , alors le triangle OAC sera à l'intérieur du triangle OBD . Dans le cas contraire, ce sera le triangle OBD qui sera à l'intérieur du triangle OAC . Nous savons que les rapports de leurs côtés sont égaux :

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} \Rightarrow OD = \frac{OB \cdot OC}{OA}. \quad (2.1)$$

Afin de construire la multiplication, nous posons $OA = 1$. Les longueurs OB et OC seront les facteurs de notre multiplication, dans notre cas a et b . Nous lisons la multiplication de a et b sur OD , comme illustré à la figure 2.9.

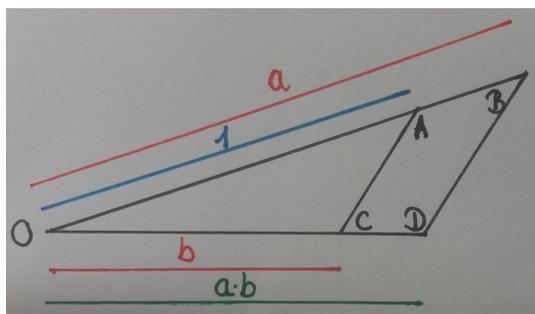


FIGURE 2.9 – Construction d'une multiplication

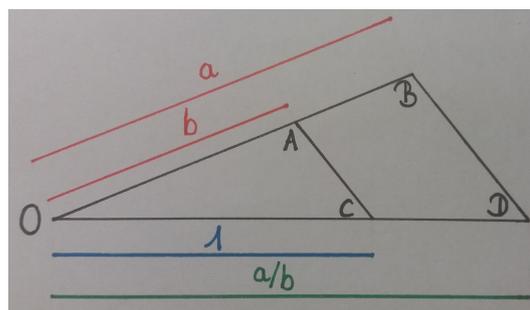


FIGURE 2.10 – Construction d'une division

Voyons à présent le cas de la division de a par b . Nous posons $OC = 1$, OB le numérateur a et OA le dénominateur b . Nous obtenons ainsi la division de a par b sur la longueur OD , comme illustré par la figure 2.10.

2.2.3 Construction à l'aide du théorème de Pythagore

Le théorème de Pythagore s'applique aux triangles rectangles : le carré de l'hypothénuse est égal à la somme des carrés des deux cathètes. C'est ainsi que la racine carrée de 2 peut être construite.

Soit le carré d'un nombre n quelconque positif et non-nul égal à la somme des carrés de deux nombres également positifs et non-nuls, a et b . Rappelons que ces nombres sont des longueurs, ils doivent donc être positifs. Si a et b sont nuls, n l'est également. Dans le cas où seul a est nul, n est égal à b et inversement si seul b est nul, n est égal à a .

Comme illustré à la figure 2.11, nous obtenons le nombre n sur l'hypothénuse du triangle rectangle de cathètes de longueurs a et b , car $n^2 = a^2 + b^2$.

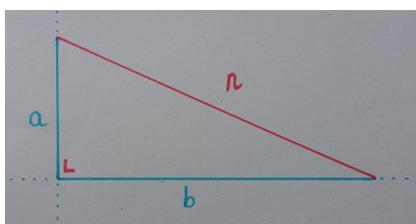


FIGURE 2.11 – La longueur n se lit sur l'hypothénuse du triangle rectangle.

2.3 Les nombres euclidiens

Les nombres euclidiens sont construits à partir des nombres entiers. Ils sont obtenus de la même façon que les nombres pythagoriciens (par l'addition, la soustraction, la multiplication, la division et le théorème de Pythagore), mais les extractions de racines carrées sont autorisées. Ainsi, le nombre $\sqrt{3}$ est constructible. A la différence des nombres pythagoriciens qui comprennent seulement les racines carrées des nombres entiers, les nombres euclidiens permettent de représenter toutes les racines carrées.

La règle et le compas permettent la construction de tous les nombres euclidiens, mais il est impossible, avec ces outils de construire un nombre non-euclidien. C'est pour cela que les problèmes antiques sont hors de leur portée. Par l'origami, les nombres euclidiens peuvent être représentés à l'aide des cinq premiers axiomes.

2.3.1 Construction de la racine d'un nombre quelconque

Nous avons vu que $\sqrt{2}$ peut être construit à l'aide du théorème de Pythagore. Il existe une méthode plus générale pour construire des racines, qui utilise le compas pour tracer des cercles et l'ajout du cinquième axiome pour l'origami. Nous allons voir à présent comment construire la racine carrée d'un nombre quelconque c .

Soit ABC un triangle rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A . Un triangle semblable est créé à l'intérieur du premier : ABH . Ainsi les rapports de leurs côtés sont égaux

$$\frac{BH}{AB} = \frac{AB}{BC} \Leftrightarrow AB^2 = BH \cdot BC. \quad (2.2)$$

Dès lors, la racine de c se lira sur AB . Si $c > 1$, alors il suffit de poser $BH = 1$ et $BC = c$. Si, au contraire $c < 1$, alors il suffira de poser $BH = c$ et $BC = 1$.

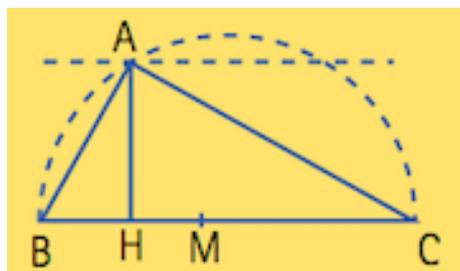


FIGURE 2.12 – Construire \sqrt{c} [31]

Avec l'origami, cette construction est également possible. En effet, par l'axiome 2 qui superpose deux points, nous créons M , point médiant de BC . Par le quatrième axiome, nous réalisons la perpendiculaire m passant par ce point M et la perpendiculaire h passant par H . Finalement, par le cinquième axiome, nous superposons le point B sur la droite m et notre pli doit passer par C . L'intersection entre ce pli et la droite h nous donne le point A , illustré à la figure 2.14.

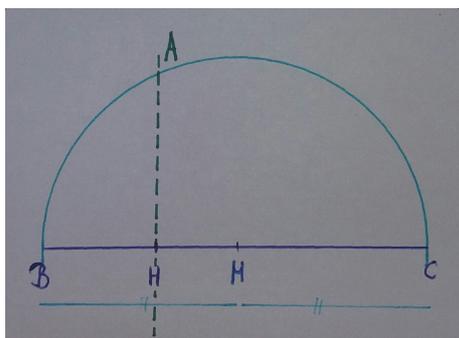


FIGURE 2.13 – La racine de c construite avec la règle et le compas

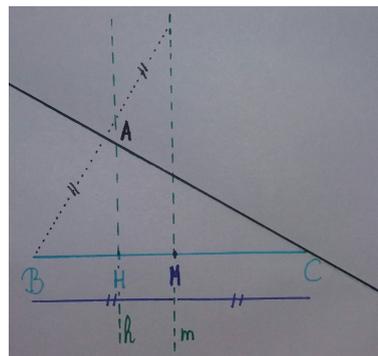


FIGURE 2.14 – La racine de c construite avec le pliage

2.4 Les nombres d'équation polynomiale

Nous avons vu précédemment que les cinq premiers axiomes permettent de construire les mêmes nombres que la règle et le compas. Il en est de même pour la construction de certaines courbes. En effet, les paraboles, les ellipses et les hyperboles sont réalisables à la règle et au compas, mais peuvent également l'être à l'aide du pliage. Pour plus d'informations à ce sujet et sur leur construction, lire le document de l'Université de Montréal [30].

L'ajout du sixième et du septième axiomes permettent de construire des nombres plus complexes. Effectivement, l'ajout du sixième axiome permet déjà de construire toutes les

solutions des équations polynomiales de degré 1, 2, 3 et 4. C'est pour cela, que la trisection de l'angle ainsi que la construction de la racine cubique de 2 sont possibles à l'aide de l'origami

Pourtant, l'ajout du septième axiome ne permet pas de construire un ensemble plus grand que les six premiers axiomes. Il est donc facultatif, mais permet de compléter la liste des axiomes. Il fait tout de même partie de la définition des axiomes : des plis possibles lorsqu'un seul pli est autorisé sur une feuille.

Les axiomes de Justin-Huzita-Hatori sont limités à la résolution des équations polynomiales de degré 4 au maximum. Or, l'utilisation des plis simultanés permettent de résoudre toutes les équations polynomiales. La quintasection d'un angle (couper un angle en cinq parties égales) est par exemple possible. Pour plus d'informations à ce sujet, consulter le document de Robert J. Liang et de Roger C. Alperin [35].

Chapitre 3

Les problèmes antiques

Depuis la Grèce Antique, les mathématiciens n'ont jamais réussi à résoudre, à l'aide d'une règle et d'un compas, ce qu'ils ont appelés les problèmes antiques. Il s'agit de la quadrature du cercle, la duplication du cube et la trisection de l'angle. La quadrature du cercle signifie dessiner un carré de même aire qu'un cercle. Par exemple, un cercle de rayon 1 a une aire de π . Ainsi, nous devons réaliser un carré de côté $\sqrt{\pi}$, ce qui revient à savoir construire le nombre π (car nous savons construire des racines). La duplication du cube est la construction du nombre $\sqrt[3]{2}$. Le but est de réaliser un cube dont le volume est le double de celui d'un cube donné. Par exemple, il faudrait construire un cube de volume 2 à partir d'un cube de volume 1. Donc, cela revient à savoir dessiner $\sqrt[3]{2}$, l'arête d'un cube de volume 2. Le dernier problème antique est la trisection d'un angle, c'est-à-dire partager un angle en trois parties égales. Bien que l'origami ne permet pas de dessiner le nombre π , il offre la possibilité de résoudre les deux autres problèmes que nous allons découvrir dans ce chapitre. Cette introduction aux problèmes antiques est tirée du site internet [32] d'Yves Monka *Les trois problèmes de l'antiquité*.

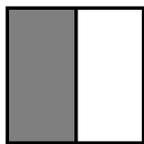
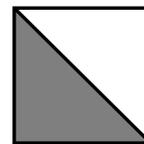
Dans un premier temps, nous allons construire des nombres rationnels d'une différente manière que dans le chapitre précédent, à l'aide du théorème de Haga. Le théorème de Haga nous aidera ensuite à résoudre la duplication du cube. Nous terminerons ce chapitre avec la résolution de la trisection d'un angle quelconque.

3.1 Le Théorème de Haga

Le Théorème de Haga débute avec une feuille carrée. Nous avons donc à disposition les quatre sommets ainsi que les quatre côtés du carré. A partir des axiomes de Justin-Huzita-Hatori, il existe deux façons de plier cette feuille en deux parties égales. La première est de joindre deux côtés opposés, ce qui nous donne la médiatrice des deux autres côtés par l'axiome 3. Ce pli s'appelle le *ligne-à-ligne* et est illustré à la figure 3.1. La seconde manière est de plier la diagonale du carré en joignant deux sommets opposés (axiome 2). Nous construisons ainsi un *point-à-point*, comme illustré à la figure 3.2.

Le mathématicien Kazuo Haga s'est intéressé aux plis possibles lorsqu'un point est ajouté en plus des sommets d'un carré. L'utilité du théorème de Haga est la rapide

construction de nombres rationnels. Toute cette section sur les différents théorèmes de Haga est tirée du site internet [36] et de l'article de Jean-Paul Delahaye [29].

FIGURE 3.1 – *Ligne-à-Ligne* [36]FIGURE 3.2 – *Point-à-Point* [36]

3.1.1 Le premier Théorème de Haga

On considère une feuille carrée, de côté 1, dont on appelle les sommets A , B , C et D (voir la figure 3.3). Le coin D est ramené sur le côté AB , ce qui définit trois nouveaux points : P sur le segment AB , Q sur le segment BC et R sur le segment AD . Le théorème de Haga part de l'hypothèse que les longueurs AP et BQ appartiennent à l'intervalle ouvert $]0; 1[$. En effet, P et Q sont des points appartenant respectivement aux segments $[AB]$ et $[BC]$ de longueur 1. Or, ils sont différents de A , B et C . Le théorème permet de déterminer les longueurs des segments BQ , AR et PQ en fonction de $x = AP$.

Vérifions tout d'abord que les triangles PBQ et RAP sont semblables. En effet, ils possèdent les mêmes angles. En posant $\alpha = \widehat{APR}$ et $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, le triangle ARP a pour angles : un droit, un autre α et le dernier β . Grâce à l'angle plat formé par \widehat{BPA} , on en déduit

$$\widehat{BPQ} = \pi - \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha = \beta.$$

Comme la somme des angles d'un triangle vaut π , l'angle \widehat{PQB} vaut α . On en conclut que les triangles ARP et BPQ sont bien semblables.

Posons $y = BQ$. Les équations suivantes découlent du fait que les triangles sont semblables, donc les rapports de leurs côtés sont égaux

$$\frac{RP}{AP} = \frac{PQ}{BQ} \Rightarrow \frac{RD}{x} = \frac{PQ}{y} \Rightarrow \frac{1 - AR}{x} = \frac{PQ}{y}; \quad (3.1)$$

$$\frac{AR}{AP} = \frac{PB}{BQ} \Rightarrow \frac{AR}{x} = \frac{PB}{y} \Rightarrow \frac{AR}{x} = \frac{1 - x}{y} \Rightarrow AR = \frac{x - x^2}{y}. \quad (3.2)$$

Le triangle BPQ étant rectangle en B , le théorème de Phytagore nous donne :

$$PQ^2 = PB^2 + BQ^2 \Rightarrow PQ = \sqrt{PB^2 + BQ^2} \Rightarrow PQ = \sqrt{(1 - x)^2 + y^2}. \quad (3.3)$$

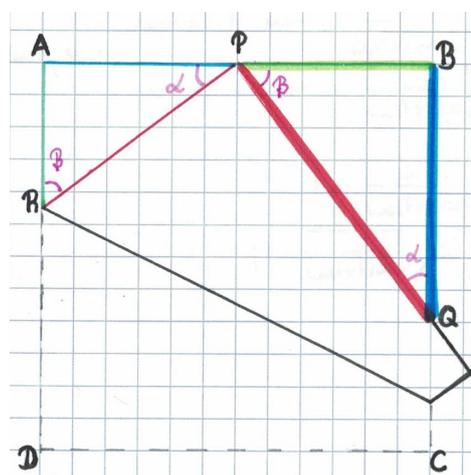


FIGURE 3.3 – Premier Théorème de Haga [37]

À présent, trouvons y en fonction de x . Pour cela, nous utilisons les équations (3.2) et (3.3) pour substituer AR et PQ dans l'équation (3.1)

$$\begin{aligned}
\frac{1 - AR}{x} &= \frac{PQ}{y} \\
\Rightarrow \frac{1 - \frac{x-x^2}{y}}{x} &= \frac{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}}{y} \\
\Rightarrow \frac{y - x + x^2}{xy} &= \frac{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}}{y} \\
\Rightarrow \frac{x^2 - x + y}{x} &= \sqrt{(1-x)^2 + y^2} \\
\Rightarrow \frac{(x^2 - x + y)^2}{x^2} &= (1-x)^2 + y^2 \\
\Rightarrow x^4 + x^2 + y^2 - 2x^3 + 2x^2y - 2xy &= x^2[(1-x)^2 + y^2] \\
\Rightarrow y^2 + 2x^2y - 2xy - x^2y^2 &= x^2(1-x)^2 - x^4 - x^2 + 2x^3 \\
\Rightarrow y(y - x^2y + 2x^2 - 2x) &= x^2 - 2x^3 + x^4 - x^4 - x^2 + 2x^3 \\
\Rightarrow y[y(1-x^2) + 2x(x-1)] &= 0 \\
\Rightarrow y(1-x^2) &= 2x(1-x), \text{ car } y \neq 0 \\
\Rightarrow y(1-x)(1+x) &= 2x(1-x) \\
\Rightarrow y &= \frac{2x}{1+x}
\end{aligned}$$

Nous obtenons finalement $BQ = \frac{2x}{1+x}$, $AR = \frac{1-x^2}{2}$ et $PQ = \frac{x^2+1}{x+1}$.

3.1.2 Le deuxième théorème de Haga

Le deuxième théorème de Haga permet la trisection d'un côté. En posant $x = \frac{1}{2}$ dans le premier théorème de Haga, nous obtenons $y = \frac{2}{3}$. Nous avons ainsi une découpe du côté en trois. La trisection d'un côté est donc possible. Le deuxième théorème de Haga établit la longueur de $1 - y$, que nous noterons a .

À la figure 3.4, le pli DQ permet la superposition de C sur le segment PQ . Ce point de superposition est appelé G . Ainsi, les triangles CDQ et DQG sont isométriques et rectangles. Le pli DP superpose A sur le segment PQ . Le point A se retrouve également superposé sur le point G , comme le montre la figure 3.5. Ainsi, les triangles ADP et PDG sont isométriques et rectangles.

Déterminons la valeur de a . Appelons R l'aire du triangle bleu, S celui du vert et T du rouge. Nous avons

$$R = \frac{(1-x)(1-a)}{2}, \tag{3.4}$$

$$S = \frac{a}{2}, \tag{3.5}$$

$$T = \frac{x}{2}. \tag{3.6}$$

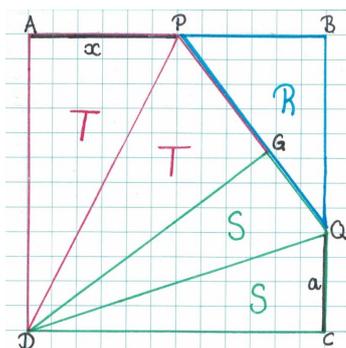


FIGURE 3.4 – Trisection d'un Côté [38]

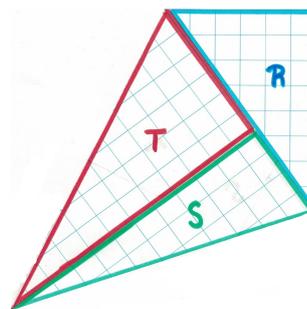


FIGURE 3.5 – Superposition des Triangles [38]

Comme les côtés de ce carré sont de longueur 1 et donc que l'aire du carré vaut aussi 1, nous obtenons

$$Aire_{ABCD} = R + 2S + 2T = 1 \tag{3.7}$$

Nous remplaçons ensuite R , S et T par les formules obtenues aux équations (3.4), (3.5) et (3.6),

$$\begin{aligned} \frac{(1-x)(1-a)}{2} + 2 \cdot \frac{a}{2} + 2 \cdot \frac{x}{2} &= 1 \\ \Rightarrow \frac{(1-x)(1-a)}{2} + a + x &= 1 \\ \Rightarrow 1 - x - a + ax &= 2 - 2x - 2a \\ \Rightarrow a + ax &= 1 - x \\ \Rightarrow a &= \frac{1-x}{1+x}. \end{aligned}$$

Comme $x = \frac{1}{2}$, nous obtenons $a = \frac{1}{3}$.

Remarquons que le point G est un point particulier, car il permet de construire les différentes fractions sur 5 : verticalement $\frac{2}{5}$ et $\frac{3}{5}$ et horizontalement $\frac{1}{5}$ et $\frac{4}{5}$. Les points I et H sont les projections orthogonales du point G sur les segments DC et BC .

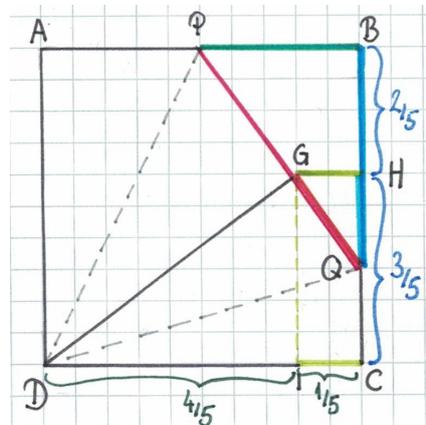


FIGURE 3.6 – Le point particulier G [38]

Calculons d'abord les longueurs horizontales DI et IC . Nous savons que les triangles PQB et GQH sont semblables, car ils ont des angles égaux. Tous deux ont un angle droit (\widehat{QBP} et \widehat{QHG}). De plus, les points P , G et Q sont alignés de même que B , H et Q . Ainsi, les angles \widehat{PQB} et \widehat{GQH} sont égaux. Les rapports des côtés des triangles PQB et GQH sont donc égaux

$$\begin{aligned} \frac{PB}{GH} = \frac{PQ}{GQ} &\Rightarrow \frac{PB}{GH} = \frac{PG + GQ}{GQ} \\ &\Rightarrow \frac{1-x}{GH} = \frac{x+a}{a} \Rightarrow GH = \frac{(1-x)a}{x+a}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Comme $x = \frac{1}{2}$ et $a = \frac{1}{3}$, nous obtenons $GH = IC = \frac{1}{5}$ et $DI = 1 - IC = \frac{4}{5}$ à l'horizontale.

Déterminons à présent les longueurs de BH et HC . Dans un triangle rectangle, nous savons que la somme des carrés des cathètes est égale au carré de l'hypoténuse

$$GQ^2 = GH^2 + HQ^2 \Rightarrow HQ = \sqrt{GQ^2 - GH^2}. \quad (3.9)$$

Or,

$$HQ = BQ - BH \Rightarrow BH = BQ - HQ.$$

Ainsi

$$BH = BQ - \sqrt{GQ^2 - GH^2} = 1 - a - \sqrt{a^2 - GH^2}.$$

Comme $a = \frac{1}{3}$ et $GH = \frac{1}{5}$, les longueurs de BH et de HC valent respectivement $\frac{2}{5}$ et $\frac{3}{5}$.

3.1.3 Le troisième théorème de Haga

Le troisième théorème de Haga a été découvert quelques années après le deuxième. Il aborde également de la trisection d'un côté, mais d'une manière plus simple.

Ce théorème débute avec un pliage, permettant, d'une part, au sommet D de se superposer sur le côté AB . De plus, le côté CD coupe le côté BC en deux parties égales. Ce pliage crée deux points, M et N . Le point M est le point médian de BC , mais également l'intersection des segments BC et CD . Le point N est l'intersection du sommet D sur le côté AB . Il est aussi le point de trisection.

Par le premier théorème de Haga, prouvons que N est un point de trisection. Posons $y = BM$ et $x = AN$. En effet, $y = \frac{2x}{1+x}$. Nous isolons x et nous trouvons l'équation suivante

$$x = \frac{y}{2-y}.$$

Nous savons que $y = \frac{1}{2}$. Nous en concluons que $x = \frac{1}{3}$.

Le troisième théorème de Haga permet de trouver en x la trisection d'un côté en fonction de y , le point médian d'un côté. Contrairement à celui-ci, le deuxième théorème de Haga trouve le point de trisection en y en fonction de x le point médian d'un côté.

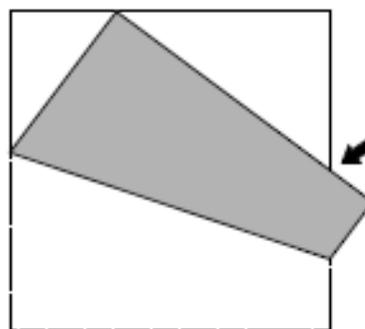


FIGURE 3.7 – La flèche indique le point médian M [39].

3.2 La duplication du cube

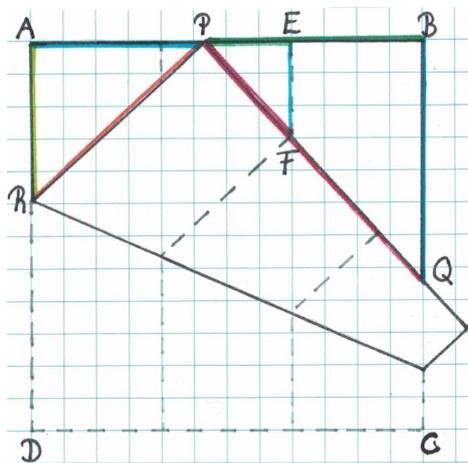


FIGURE 3.8 – Duplication du Cube [38]

théorème de Haga, nous avons

Dans cette section, tirée de la série d'exercice [40] de la HEP, nous présentons la construction du nombre $\sqrt[3]{2}$. Le rapport des longueurs PB et AP , pour un point P bien choisi, a pour valeur $\sqrt[3]{2}$.

Par le deuxième ou troisième théorème de Haga, nous savons partager un côté en trois. Déplaçons le point P le long de AB jusqu'à ce que F touche la verticale issue du point E . Par le premier théorème de Haga, nous savons que les triangles APR et PBQ sont semblables. Remarquons également que les triangles PEF et PBQ sont semblables, donc PEF est également semblable à APR . Le rapport des longueurs de leurs côtés sont donc égaux

$$\frac{PF}{PE} = \frac{PR}{AR} \Rightarrow \frac{PF}{AB - AP - EB} = \frac{AD - AR}{AR}. \quad (3.10)$$

Posons ensuite $x = AP$ et $z = AR$. Par le premier

$$AR = z = \frac{1 - x^2}{2}.$$

L'équation (3.10) devient

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{3}}{1 - x - \frac{1}{3}} &= \frac{1 - z}{z} \\ \Rightarrow \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3} - x} &= \frac{1 - \frac{1-x^2}{2}}{\frac{1-x^2}{2}} \\ \Rightarrow \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2-3x}{3}} &= \frac{\frac{1+x^2}{2}}{\frac{1-x^2}{2}} \\ \Rightarrow \frac{1}{2-3x} &= \frac{1+x^2}{1-x^2} \\ \Rightarrow 1 - x^2 &= (1+x^2)(2-3x) \\ \Rightarrow 1 - x^2 &= 2 - 3x + 2x^2 - 3x^3 \\ \Rightarrow -3x^3 + 3x^2 - 3x + 1 &= 0 \\ \Rightarrow 2x^3 &= 1 - 3x + 3x^2 - x^3 \\ \Rightarrow 2x^3 &= (1-x)^3 \\ \Rightarrow \sqrt[3]{2} &= \frac{1-x}{x} = \frac{PB}{PA} \end{aligned}$$

Nous trouvons bien que le rapport entre PB et PA vaut $\sqrt[3]{2}$, comme annoncé en début de section.

3.3 La trisection de l'angle

Dans cette section, nous présentons la division d'un angle en trois parties égales.

Sur une feuille de papier rectangulaire, définissons un angle formé avec le bord inférieur et une droite que nous nommons d . Cet angle peut être choisi arbitrairement. Il se nommera θ (voir figure 3.9).

Marquons ensuite deux plis horizontaux, illustrés aux figures 3.9 et 3.10. Le premier pli d_2 est arbitraire, tandis que le second, d_1 , est une *ligne-à-ligne* avec le premier pli et le bord inférieur de la feuille.

Nommons le coin inférieur gauche A , l'intersection entre d_1 et le bord vertical gauche P et finalement l'intersection entre la droite d_2 et le bord vertical B .

Par l'axiome 6, il existe un pli d_3 qui mène A sur d_1 et B sur d . Les points A' , B' et P' sont les symétriques des points A , B et P par rapport à d_3 .

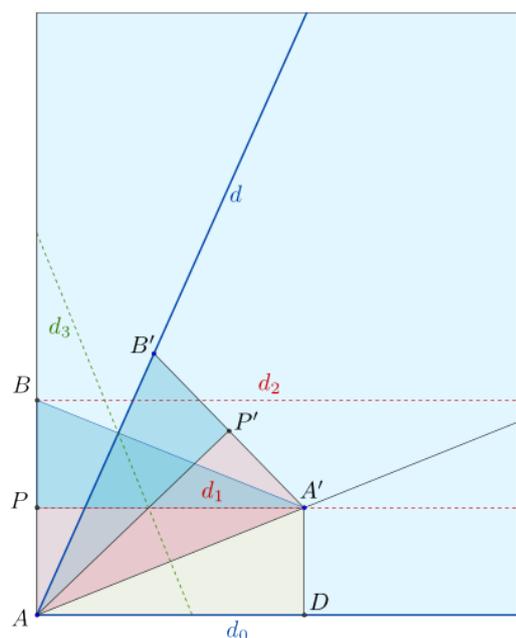


FIGURE 3.10 – Position des points et des droites [42]

Les droites AA' et AP' sont des trisectrices de l'angle θ . Pour plus d'images décrivant les étapes de constructions, nous pouvons nous référer au site internet [41] de Rachel Thomas et Marianne Frieberger.

Prouvons ce résultat grâce aux triangles isométriques jaune, roses et bleus. Cette démonstration est tirée du site internet [42] du laboratoire de mathématiques « Les Sorcier de Salem ».

Notons que P le point médian de AB et D la projection orthogonale de A' sur d_0 , le bord inférieur de la feuille. Par symétrie d'axe d_3 , les deux triangles bleus sont isométriques, ainsi que les deux triangles roses. Les droites d_0 et d_2 sont les symétriques l'une de l'autre par rapport à d_1 . Comme P et A' appartiennent à d_1 , B à d_2 et A à d_0 , les triangles bleu BPA' et rose $AA'P$ sont donc isométriques ($BP = AP$ et $AA' = BA'$). Comme le point D est la projection orthogonale de A' sur d_0 , l'angle $\widehat{ADA'}$ est droit. De plus, l'angle $\widehat{A'PA}$ est également droit, car d_1 et le bord gauche de la feuille se coupent perpendiculairement. Les triangles rose et jaune sont donc également isométriques, car ils ont un angle droit, $PA' = AD$ et $PA = A'D$. Ainsi, nous trouvons bien que les deux triangles bleus et roses et le triangle jaune sont isométriques. Pour conclure, les angles $\widehat{B'AP'}$, $\widehat{A'AP'}$ et $\widehat{DAA'}$ sont égaux et donc que la trisection de l'angle θ est réalisée.

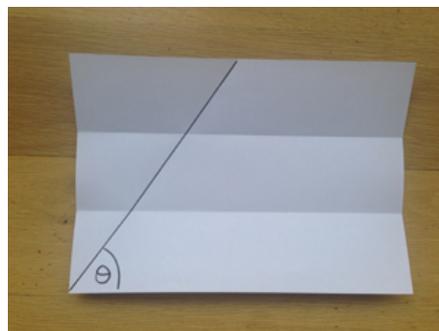


FIGURE 3.9 – L'angle θ et deux plis horizontaux [41]

Chapitre 4

Canevas de l'origami

Un certain nombre de pliages est nécessaire pour obtenir un origami. L'ensemble de tous ces plis s'appelle le canevas ou en anglais *crease pattern*. Cette définition est tirée de l'article de Jean-Paul Delahaye [34].

Dans ce chapitre, nous allons d'abord présenter comment dessiner un canevas. Nous découvrirons ensuite les différents théorèmes qui permettent de réaliser un pli à plat. Le théorème de Meakawa s'intéresse à la différence entre deux types de pli à chaque intersection de plis. Le théorème de Kawasaki concerne les angles autour d'un croisement de plis. Finalement, le théorème des deux couleurs permet de colorier un canevas à l'aide de deux couleurs, sans que celles-ci se touchent. Nous poursuivrons ce chapitre avec le théorème de la découpe unique, qui constitue à donner un coup de ciseaux pour qu'une forme définie soit entièrement découpée. Il existe deux méthodes pour réaliser ce théorème : le squelette droit et l'empaquetage sur disque.

4.1 Les canevas

Dans un canevas, il existe trois types de plis : les plis de constructions, les plis « montagnes » et les plis « vallées ». En général, les plis de constructions ne sont pas représentés dans les canevas. S'ils s'avèrent y être, ils sont dessinés en gris. Les plis montagnes et vallées sont des plis qui définissent la structure de l'origami. Les plis montagnes vont former sur un pli à plat une bosse (figure 4.1), contrairement aux plis vallées qui vont créer un creux (figure 4.2).

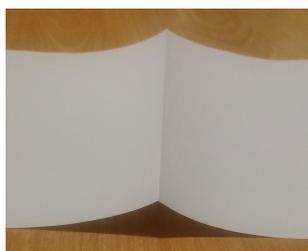


FIGURE 4.1 – Le pli montagne

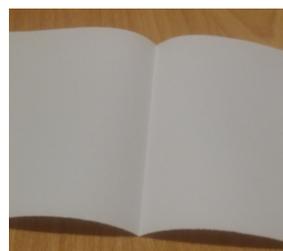


FIGURE 4.2 – Le pli vallée

Ce sont ces deux plis qui sont principalement utilisés dans les théorèmes. Il existe deux façons de représenter ces plis. Les plis vallées peuvent être dessinés soit en bleu soit en traitillé. Les plis montagnes sont symbolisés soit en rouge soit par alternance d'un point et d'un trait. Cette introduction aux canevas est tirée des articles écrits par Jean-Paul Delahaye [29] et [34].

Un des origamis les plus connus en France et en Europe est la cocotte, car il est facilement réalisable. Nous pouvons nous référer à la vidéo [43] « *Une cocotte en papier, comment faire origami* » pour en construire un. Il est l'emblème de l'origami européen comparable à la grue au Japon.

La cocotte viendrait de l'Afrique du Nord. Les mathématiciens de cette région utilisaient le pliage du tissu pour expliquer la géométrie. L'église catholique aurait amené cet art en Espagne. Ce serait, à ce moment, que serait né le pájara, un petit oiseau qui fait référence à la cocotte en papier de nos jours. L'origine de cette cocotte est décrite sur le site [2] dans le chapitre 2 intitulé « *Un art international et multiforme* ». L'origami de cocotte est illustré à la figure 4.3, ainsi que son canevas à la figure 4.4.

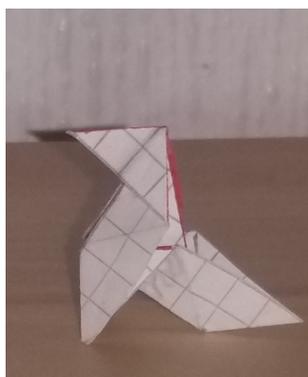


FIGURE 4.3 – Origami de la Cocotte

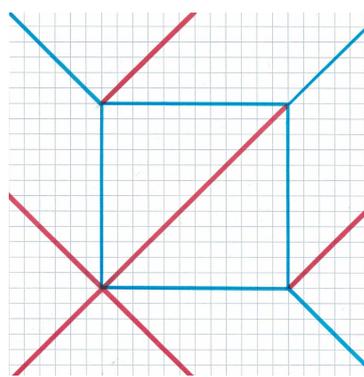


FIGURE 4.4 – Canevas de la Cocotte [29]

La grue en tant qu'origami est très répandue au Japon. Nous avons vu dans le chapitre 1 (section 1.5, l'histoire de Sadako Sasaki) comment la grue s'est popularisée à travers le monde en devenant un symbole de paix. Pourtant, c'est un origami qui est assez compliqué à réaliser. Malgré cela, son étude reste très pratiquée. Une grue est représentée à la figure 4.5 ainsi que son canevas à la figure 4.6.



FIGURE 4.5 – Origami de la Grue

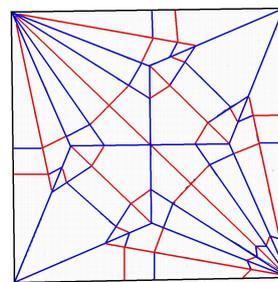


FIGURE 4.6 – Canevas de la Grue [44]

4.2 Le théorème de Meakawa

Il a fallu du temps aux mathématiciens pour identifier ce théorème, malgré son apparente simplicité. Cette découverte est le fruit du travail d'un mathématicien japonais, Meakawa, qui s'intéressait au pliage à plat d'un origami. Il n'était pourtant pas le seul à travailler sur le pliage à plat : Jacques Justin avait prédit le résultat de ce théorème. Le théorème n'a pourtant pas porté son nom, mais celui de Meakawa qui l'a popularisé. L'histoire de ce théorème est tirée de l'article de Jean-Paul Delahaye [29].

Le théorème de Meakawa permet d'éviter d'éventuelles erreurs dans un dessin de canevas. Si un pli est réalisable à plat, à chaque intersection de plis ou sommet du graphe, il y a une différence de deux entre le nombre de plis montagnes (M) et vallées (V). Le théorème peut donc s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} M = V + 2 \\ M = V - 2. \end{cases} \quad (4.1)$$

Nous pouvons généraliser ces deux équations en écrivant que la valeur absolue de la différence que les plis montagnes et vallées est de deux

$$|M - V| = 2. \quad (4.2)$$

Comprenons tout d'abord comment le théorème de Meakawa fonctionne. Nous poursuivrons ensuite avec sa preuve.

4.2.1 Utilisation du théorème de Meakawa

Mettons en pratique ce théorème avec le canevas de la cocotte. Par la figure 4.7, aux points 1, 2 et 3, il y a un seul pli montagne (rouge) et trois plis vallées (bleus). Donc ces points-là obéissent à la règle : $M = V - 2$. Le point 4, quant à lui, a quatre plis montagnes et deux plis vallées. Donc il obéit à la seconde règle, c'est-à-dire $M = V + 2$.

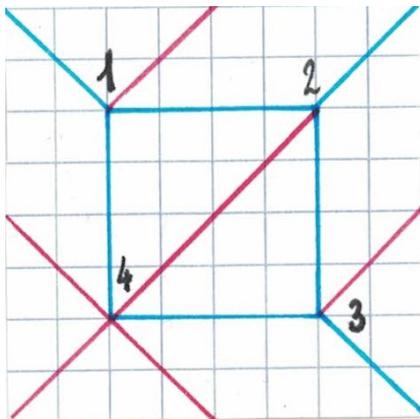


FIGURE 4.7 – Canevas de la cocotte [29]

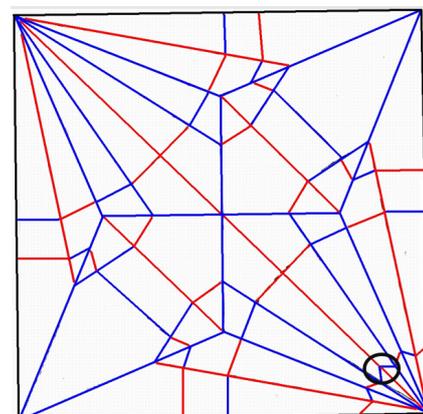


FIGURE 4.8 – Canevas de la grue [44]

Prenons à présent le cas du canevas de la grue. A la figure 4.8, le théorème de Meakawa est vérifié en chacune des intersections de plis. La seule exception est le point entouré de la figure, qui est composé de deux plis montagnes (M) et deux plis vallées (V). Cette intersection permet de construire le bec. Nous pouvons observer à la figure 4.5 qu'il n'est pas possible de construire ce pli à plat. Si cette observation ne nous convainc pas, nous pouvons réaliser nous-même l'origami en nous référant par exemple à la vidéo [45].

Le théorème de Meakawa fonctionne dans la plupart des cas, mais pas tout le temps, comme à la figure 4.8. En effet, Meakawa cherchait à plier à plat un origami et c'est ce que permet son théorème.

Certains origamis comme celui de la boîte (illustrée à la figure 4.9 et son canevas 4.10) ne respectent pas le théorème de Meakawa. Les points entourés de la figure 4.10 confirment cette affirmation. Cela s'explique parce que cet origami se construit en volume et ne tient que ainsi. Nous remarquons que le volume prend forme seulement aux points qui ne vérifient pas ce théorème ($M = 1$ et $V = 4$).



FIGURE 4.9 – Origami de la Boîte [46]

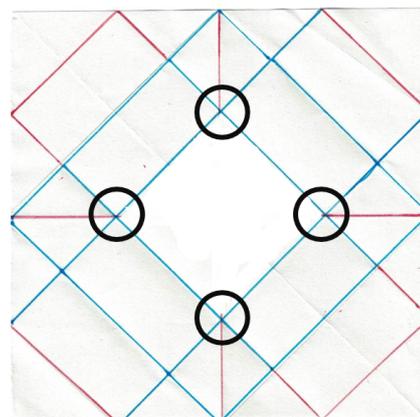


FIGURE 4.10 – Canevas de la Boîte [47]

4.2.2 Preuve du théorème de Meakawa

La preuve du théorème de Meakawa est tiré du document [48] qui s'intitule « *The geometry of origami* ». Ce théorème affirme que la différence entre les plis montagnes et vallées doit valoir 2. Plus mathématiquement, nous pouvons écrire ce théorème comme

$$|M - V| = 2. \quad (4.3)$$

La preuve va se construire en deux étapes. Nous commencerons avec le cas où il y a deux plis montagnes de plus que de vallée, puis nous généraliserons notre résultat à une différence de deux entre les plis montagnes et vallées.

A partir d'un cercle, nous effectuons plusieurs plis quelconques, par exemple quatre comme à la figure 4.11. Tous doivent être constructibles à plat. Nous obtenons ainsi un secteur dont nous découpons son sommet. Si nous déplaçons notre figure, nous obtenons un cercle avec un polygone à l'intérieur. Nous allons nous intéresser à ce polygone obtenu.

La preuve du théorème de Meakawa débute avec la forme découpée mais pas encore dépliée (comme au schéma de droite à la figure 4.11. Avec un doigt, nous allons longer les bords de notre polygone. Notre point de départ et d'arrivée est le point noir de la figure 4.12.

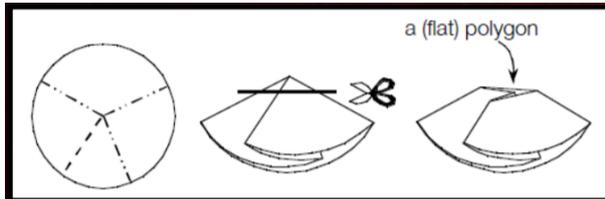


FIGURE 4.11 – Plions à plat un cercle.

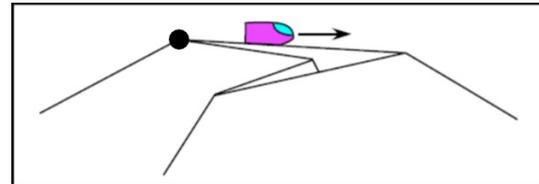


FIGURE 4.12 – Longeons le polygone et intéressons nous aux angles de rotations.

A notre première intersection, nous allons tourner de π dans le sens des aiguilles d'une montre. Nous faisons donc une rotation de $+\pi$. A notre deuxième angle, nous avons de nouveau une rotation de $+\pi$, car nous tournons également dans le sens des aiguilles d'une montre. Quant à la troisième intersection, nous tournons dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Nous avons donc une rotation de $-\pi$. Pour arriver à notre point d'arrivée, nous faisons une rotation de $+\pi$. Nous constatons qu'à chaque pli montagne nous avons une rotation de $+\pi$ et à chaque pli vallée nous avons eu une rotation de $-\pi$. La somme des rotations des plis montagnes M et des rotations des plis vallées V doit nous donner 2π , pour un tour complet autour du point noir :

$$M\pi - V\pi = 2\pi. \quad (4.4)$$

Nous simplifions cette équation et obtenons une partie du théorème de Meakawa :

$$M - V = 2. \quad (4.5)$$

Mais comment généraliser le théorème à la formule suivante : $|M - V| = 2$? Un pli montagne peut être un pli vallée si nous changons de point de vue. En effet, si nous prenons la figure 4.12 et nous le retournons pour obtenir la figure 4.13, nous avons trois plis vallées et un montagne. Le théorème de Meakawa est ainsi vérifié.

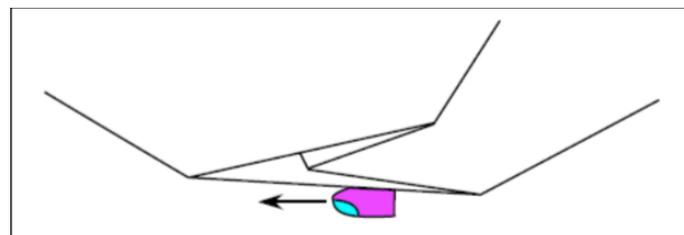


FIGURE 4.13 – Un pli montagne ou vallée dépend d'un point de vue.

4.3 Le théorème de Kawasaki

Le théorème de Kawasaki permet également de vérifier si un origami peut se plier à plat. En effet, si un pli est réalisable à plat, alors la somme d'un angle sur deux vaut π .

Ce théorème s'intéresse aux angles de n'importe quel croisement de plis. Nous nommons les angles impairs $a_1, a_3, \dots, a_{2n-1}$ et les angles pairs a_2, a_4, \dots, a_{2n} . Les angles autour d'une intersection se nomment donc $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n}$, avec n est la moitié du nombre total d'angles autour d'une intersection. Tous ces angles forment un cercle, leur somme vaut donc 2π . Le théorème de Kawasaki peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1} = \pi \\ a_2 + a_4 + \dots + a_{2n} = \pi. \end{cases} \quad (4.6)$$

Commençons par comprendre le fonctionnement du théorème de Kawasaki. Nous aborderons plus tard sa preuve.

4.3.1 Utilisation du théorème de Kawasaki

Voyons à présent le théorème de Kawasaki en pratique avec pour exemple, le canevas de la cocotte.

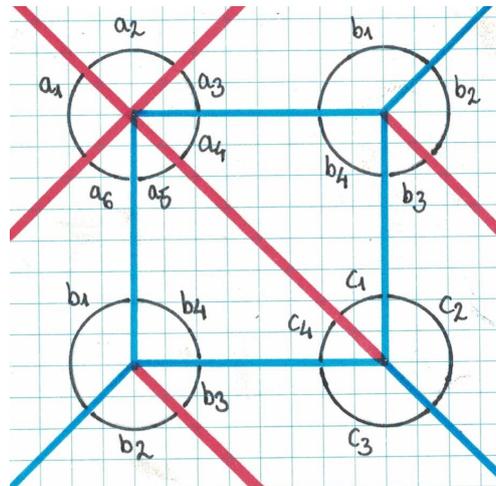


FIGURE 4.14 – Les angles du canevas de la cocotte

La figure 4.14 représente les angles a , b et c dont leur somme vaut bien 2π vu qu'ils forment un angle plein.

Vérifions à présent le théorème de Kawasaki qui dit que la différence d'un angle sur deux est nulle :

$$\begin{cases} a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0 \\ b_1 - b_2 + b_3 - b_4 = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = 0 \\ c_1 - c_2 + c_3 - c_4 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} = 0. \end{cases}$$

Ce théorème se vérifie dans le canevas de la grue, mais pas dans celui de la boîte. En effet, le canevas de la boîte a un nombre impair d'angles aux sommets entourés de la figure 4.10.

4.3.2 Preuve du théorème de Kawasaki

La source de la preuve du théorème de Kawasaki est le document [48]. Le théorème de Kawasaki, qui annonce que la somme d'un angle sur deux d'une intersection d'un pli vaut π . Nous pouvons écrire ce théorème sous la forme d'une équation :

$$a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1} = \pi. \quad (4.7)$$

Commençons avec un cercle que nous plions en quatre. Nous obtenons ainsi quatre angles que nous nommons dans le sens des aiguilles d'une montre, α_1 , α_2 , α_3 et α_4 . Nous avons une illustration à la figure 4.15.

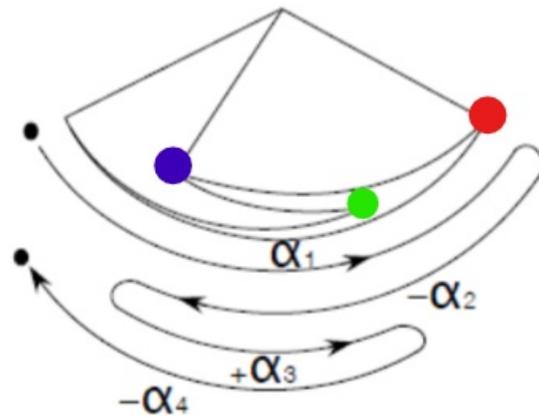
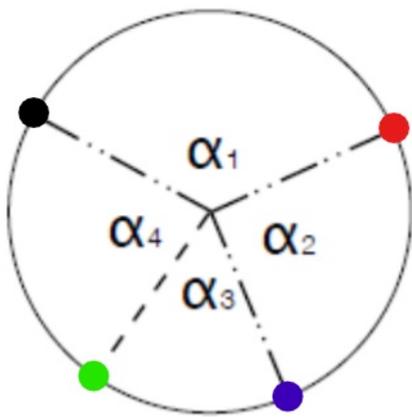


FIGURE 4.15 – Notre cercle de départ [48] FIGURE 4.16 – Faisons le tour du cercle [48].

Plions ensuite notre cercle. Notre point de départ et en même temps d'arrivée est le point en noir indiqué aux figures 4.15 et 4.16. Nous débutons à partir du point noir jusqu'au point rouge. Nous avons donc avancé d'un angle α_1 . Nous passons ensuite au point bleu. Nous reculons d'un angle α_2 et donc avançons d'un angle négatif, $-\alpha_2$. Nous avançons ensuite jusqu'au point vert ($+\alpha_3$) et retournons à notre point de départ le point noir ($-\alpha_4$). Nous additionnons et soustrayons donc bien un angle sur deux en alternance pour obtenir un angle nul :

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 = 0. \quad (4.8)$$

A l'aide de la figure 4.15, nous savons que la somme de tous les angles doit valoir 2π , car ils forment un cercle :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 2\pi. \quad (4.9)$$

Par l'équation 4.8, nous pouvons également écrire l'équation 4.9 sous la forme suivante :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4) = 2\pi. \quad (4.10)$$

Nous simplifions cette équation et obtenons $2\alpha_1 + 2\alpha_3 = 2\pi$. Nous en déduisons le système suivant à l'aide de l'équation 4.8 :

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = \pi \\ \alpha_2 + \alpha_4 = \pi. \end{cases} \quad (4.11)$$

Généralisons à présent notre résultat. Nous avons un cercle qui a un nombre pair d'angles formés par des plis. Nous nommons les angles $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n}$, avec n la moitié du nombre d'angles totaux. En additionnant tous les angles impairs ($\alpha_1, \alpha_3, \dots, \alpha_{2n-1}$) et en soustrayant tous les angles pairs ($\alpha_2, \alpha_4, \dots, \alpha_{2n}$), nous devons obtenir un angle nul :

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + \dots + \alpha_{2n-1} - \alpha_{2n} = 0. \quad (4.12)$$

Nous savons également que la somme de tous les angles doit valoir 2π , car ils forment un cercle :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{2n-1} + \alpha_{2n} = 2\pi. \quad (4.13)$$

Par l'équation 4.12, nous pouvons écrire l'équation 4.13 sous la forme suivante :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{2n-1} + \alpha_{2n} + (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + \dots + \alpha_{2n-1} - \alpha_{2n}) = 2\pi. \quad (4.14)$$

Après simplification, nous en déduisons le système suivant et retrouvons bien ce que le théorème de Kawasaki énonce :

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{2n-1} = \pi \\ \alpha_2 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{2n} = \pi. \end{cases} \quad (4.15)$$

4.4 Le théorème des deux couleurs

Le théorème des deux couleurs annonce que si un origami est pliable à plat, alors il est possible de colorier l'origami en deux couleurs par délimitation des plis sans que celles-ci se touchent. Ce théorème est donc réalisable si il existe un nombre pair de plis en chacun intersection et donc si il y a un nombre pair d'angles autour d'un croisement de plis.

Par le théorème de Meakawa, la différence entre les plis montagnes et vallées est de deux. Soit les plis montagnes et vallées sont tous deux impairs, soit ces deux types de plis sont pairs. Dans les deux cas, le nombre total de plis en un sommet est pair. D'une autre manière, nous pouvons dire qu'il existe un nombre pair d'angles à chaque intersection, ce qui revient à l'hypothèse du théorème de Kawasaki. Ainsi, il sera possible de colorier un origami aplati avec seulement deux couleurs en alternant toujours celles-ci à chaque sommet du graphe.

Par la figure 4.17, il est bien possible de colorier avec seulement deux couleurs un origami en alternant sur un croisement de pli les couleurs.

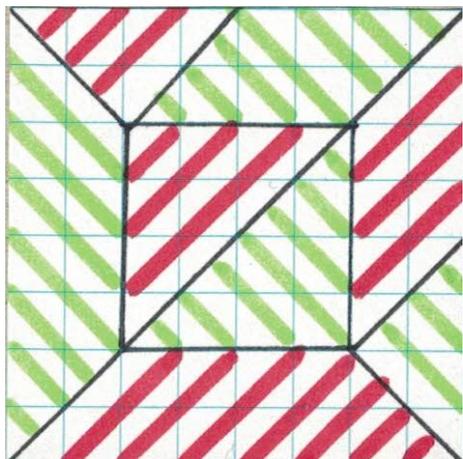


FIGURE 4.17 – Colorions le canevas d’une cocotte [29].

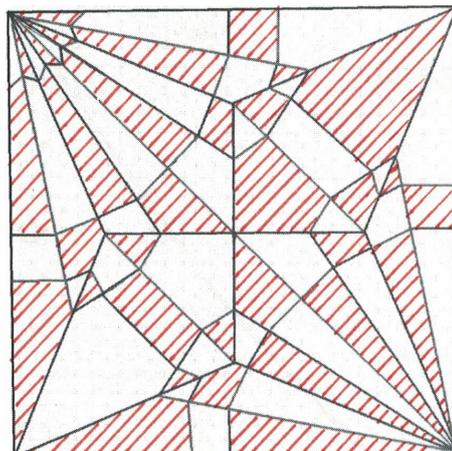


FIGURE 4.18 – Colorions le canevas de la grue [44].

Nous avons vu précédemment que le canevas de la grue ne vérifiait pas en un point le théorème de Meakawa. Pourtant le théorème des deux couleurs fonctionne sur celui-ci. En fait, chaque sommet contient un nombre pair de plis, ce qui explique pourquoi ce théorème se vérifie dans ce cas-là. Ainsi pour que le théorème des deux couleurs fonctionne, il suffit que à chaque sommet il existe un nombre pair de plis. Nous pouvons donc en conclure que la réciproque de ce théorème n’est pas toujours vraie.

Un exemple d’un cas où la réciproque ne fonctionne pas est le canevas de la boîte. Nous avons vu précédemment que la boîte ne vérifie pas le théorème de Meakawa, tout comme un point du canevas de la grue. Mais contrairement à la grue, la boîte ne peut pas être colorier en seulement deux couleurs sans que celles-ci se touchent. En effet, la boîte a quatre sommets ayant un nombre impair de plis. Il est donc seulement possible de colorier le canevas avec minimum trois couleurs.

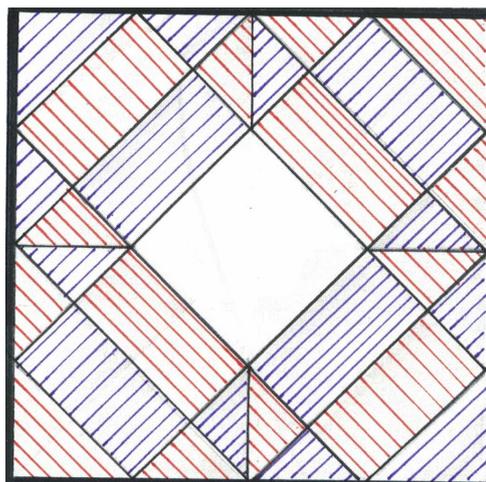


FIGURE 4.19 – Colorions le canevas de la boîte.

4.5 Le théorème de la découpe unique

Selon le théorème de la découpe unique, tout dessin formé uniquement de segments rectilignes peut être plié de sorte qu’un coup de ciseaux suffise à couper tous les traits du dessin.

Ce problème viendrait du Japon. Au XIV^e siècle, Kan Chu Sen, un mathématicien japonais, est un des premiers à s’intéresser à ce problème. Il désirait obtenir un sangaibisi,

c'est-à-dire trois losanges pliés. Cette forme est représentée à la figure 4.20. C'est le premier exemple connu de la découpe unique, comme le mentionne le site internet *History of the Fold and Cut Problem* [49].

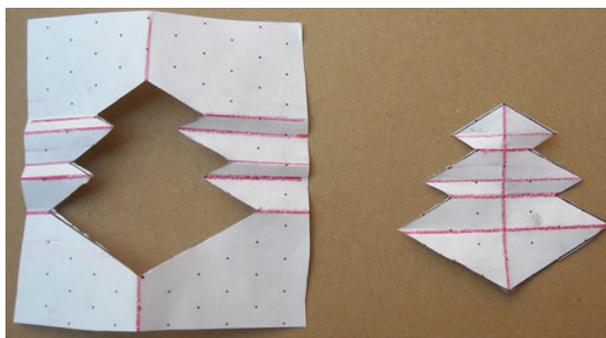


FIGURE 4.20 – Sangaibisi ou trois losanges pliés [49]

Le théorème de la découpe unique a été prouvé en 1999 par six mathématiciens. Il permet de construire des polygones simples, des polygones non-convexes, des polygones multiples disjoints (réunion de polygones posés côte à côte), des polygones imbriqués (des polygones dans des polygones), des polygones adjacents (polygones superposés), des segments et des points et des segments flottants.

Deux méthodes existent pour réaliser une découpe unique d'une figure : le squelette droit et l'empaquetage sur disque. La méthode du squelette droit a été étudiée par Anna Lubiw, Erik et Martin Demaine. L'empaquetage sur disque a été découvert par Marshall Bern, David Eppstein, Barry Hayes et Erik Demaine.

La source de cette introduction est le site internet d'Erik Demaine [50], un mathématicien qui a participé à la découverte des deux méthodes de la découpe unique.

Selon le site [51], la méthode du squelette droit est plus facile à mettre en pratique. Contrairement à elle, la technique de l'empaquetage sur disque fonctionne pour toutes les figures aux segments rectilignes, mais comporte plus de difficultés à être mise en pratique.

4.5.1 La méthode du squelette droit

L'explication de cette méthode du squelette droit est inspirée des vidéos du Professeur Katie Steckles [52] et [53] et d'un document [54] écrit par l'Université de Genève.

Cette méthode repose essentiellement sur deux types de pliages : l'axiome 3 (créer des bissectrices) et l'axiome 4 (construire des perpendiculaires). Nous allons survoler quelques exemples de formes que nous pouvons découper selon la technique du squelette afin de comprendre son fonctionnement. Nous commencerons avec un carré, puis un triangle quelconque et finalement un polygone convexe quelconque. Nous pouvons aussi nous amuser à découper une tortue. Pour plus de détails à ce propos, nous pouvons consulter le site d'Erik Demaine [50].

Prenons l'exemple du carré. Ses diagonales sont également ses bissectrices. Par l'axiome 3, nous construisons une bissectrice, qui permet de superposer les côtés du carré. Nous

obtenons un triangle isocèle (figure 4.21). De même, par l'axiome 3, nous construisons la bissectrice de l'angle droit du triangle que nous avons obtenue. Nous avons donc superposé tous les côtés du carré (figure 4.22).

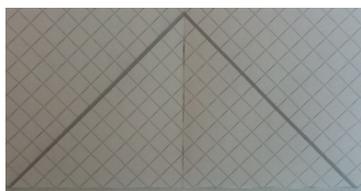


FIGURE 4.21 – Plions la première bissectrice.

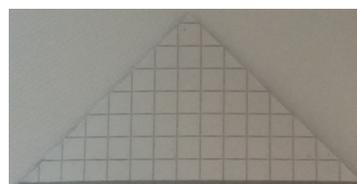


FIGURE 4.22 – Plions la deuxième bissectrice, puis découpons.

Il nous reste plus qu'à couper le long du trait et nous obtenons un carré (figure 4.23). L'axiome 3 peut suffire à superposer tous les côtés de notre figure si cette figure est régulière, comme par exemple un carré. Dans le cas où notre figure n'est pas régulière, il ne suffit plus. Nous avons donc besoin de l'axiome 4.

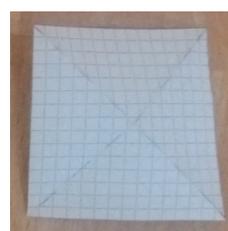


FIGURE 4.23 – Notre carré découpé

Voyons à présent ce qui se passe avec un triangle quelconque. Construisons ses bissectrices grâce à l'axiome 3. Leur intersection M est le centre de gravité du triangle (figure 4.24). Si nous plions le long de ses bissectrices, nous n'obtenons pas une figure plane, comme illustré à la figure 4.25. Il nous manque encore un pli pour « écraser » notre forme (figure 4.26). Il y a plusieurs façons de construire ce pli. Il doit être perpendiculaire à un côté du triangle et passer par le point de gravité. Il est donc réalisable grâce à l'axiome 4. Notons que les bissectrices sont des plis montagnes et que la perpendiculaire est un pli vallée.

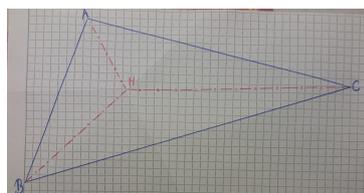


FIGURE 4.24 – Construisons les bissectrices du triangle.

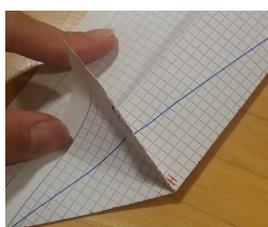


FIGURE 4.25 – Plions ses bissectrices.

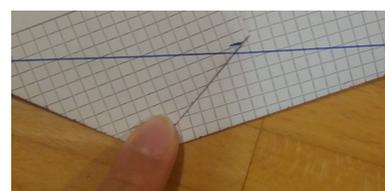


FIGURE 4.26 – Alignons les traits.

Après avoir découpé le long du trait, nous obtenons bien notre triangle quelconque (figure 4.27).

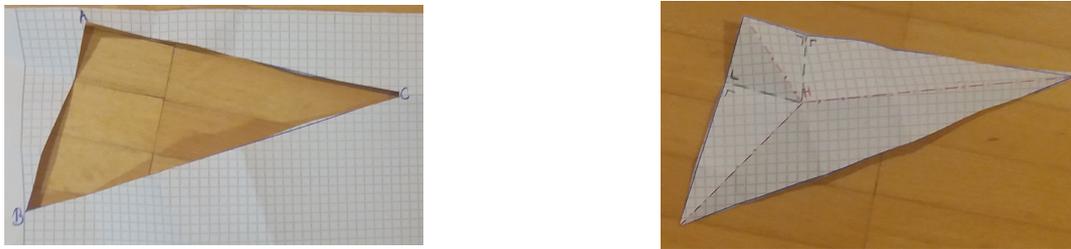


FIGURE 4.27 – Notre triangle une fois découpé

Intéressons nous à présent à un polygone convexe quelconque, par exemple un pentagone irrégulier. Par l'axiome 3, nous construisons les bissectrices de chaque angle, en superposant deux côtés adjacents. Nous obtenons ainsi la figure 4.28.

Chaque bissectrice a deux bissectrices adjacentes. Prenons, par exemple, la bissectrice b_C de l'angle \widehat{BCD} , à la figure 4.28. Ses bissectrices adjacentes sont les bissectrices b_B et b_D des angles \widehat{ABC} et \widehat{CDE} . Nous considérons le point I comme le point d'intersection entre le segment $[CI]$ et une de ses bissectrices adjacentes (b_B ou b_D) tel que le segment $[CI]$ ne coupe qu'une seule des bissectrices. Ainsi, nous avons le segment $[CI]$ qui coupe la bissectrice b_D . Par le même raisonnement, nous avons le point d'intersection J tel que le segment $[AJ]$ ne coupe qu'une seule de ses bissectrices adjacentes : b_E . Nous obtenons ainsi la figure 4.29.

Il nous faut ensuite relier la bissectrice b_B aux autres bissectrices, autrement dit aux points I et J . Par l'axiome 3, nous superposons, dans un premier temps, les droites AB et ED et, dans un deuxième temps, les droites BC et ED , afin d'obtenir deux droites qui se coupent en un point K . Ce point K appartient à la bissectrice b_B . A la figure 4.30, nous obtenons le squelette de notre pentagone à la figure 4.30. Notons que tout squelette est un pli montagne.

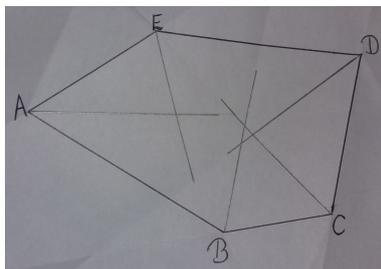


FIGURE 4.28 –
Construisons les
bissectrices.

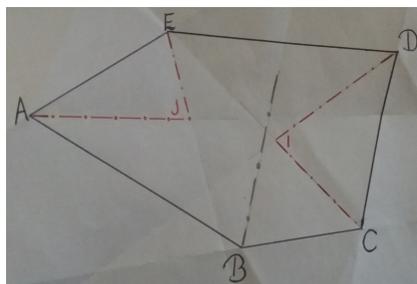


FIGURE 4.29 – Les inter-
sections I et J

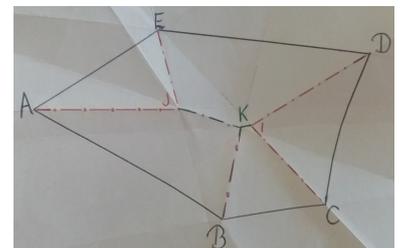


FIGURE 4.30 – Le
squelette de ce poly-
gone

Afin de superposer tous les bords du pentagone à plat, il faut que le théorème de Meakawa soit respecté. En chacun des points d'intersection (I , J et K), il y a trois plis

montagnes (figure 4.30). Par le théorème de Meakawa, il nous faut donc soit un pli vallée soit cinq. Afin de minimaliser le nombre de plis à construire, nous allons construire un pli vallée pour chaque point d'intersection. Nous utilisons l'axiome 4, qui permet de construire des perpendiculaires qui passent par un point en particulier. Le choix de construction des perpendiculaires n'est pas unique. La figure 4.31 est une des constructions possibles. Nous pouvons à présent plier notre canevas afin de superposer tous les bords de notre pentagone, comme illustré à la figure 4.32.

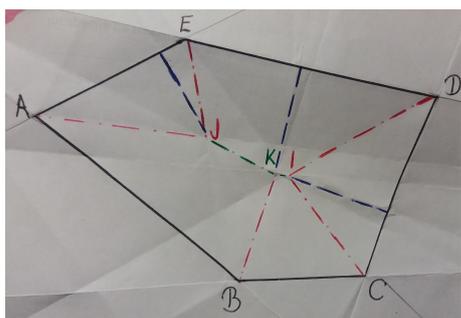


FIGURE 4.31 – Plions le canevas.

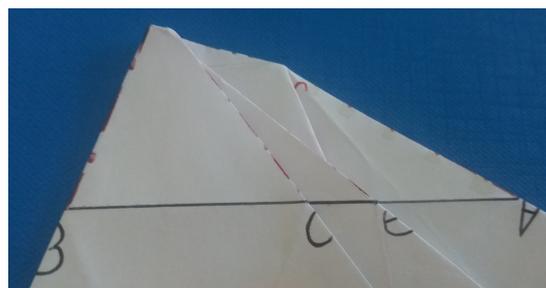


FIGURE 4.32 – Coupons le long du trait.

Après avoir découpé le long du trait, nous obtenons les images de la figure 4.33.

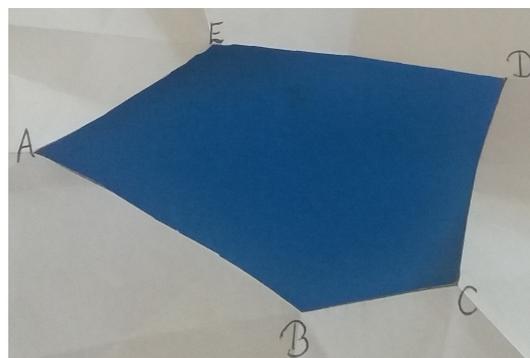
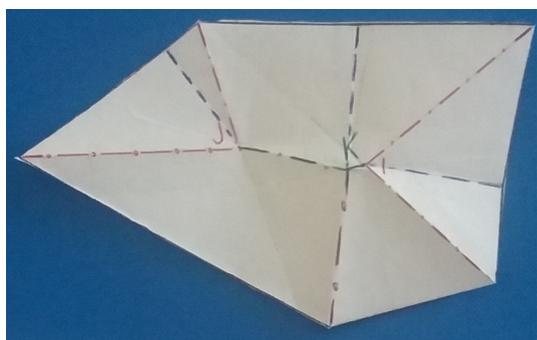


FIGURE 4.33 – Notre forme découpée

4.5.2 La méthode de l'emballage sur disque

Cette méthode est décrite sur le site de Erik Demaine, un des mathématiciens ayant participé à la découverte de cette méthode de l'emballage sur disque [50].

L'empaquetage est inspiré de la méthode du squelette droit. Son but est de remplir la figure de disques selon quatre conditions.

Premièrement, les cercles ne doivent jamais se chevaucher, mais ils peuvent se toucher. Deuxièmement, le centre de chaque disque se situe à chacun des sommets de la figure que nous désirons découper. Troisièmement, les espaces formés par différents disques qui se touchent sont composés de trois ou quatre disques. Finalement, les segments de la figure

doivent correspondre à l'addition des rayons des deux cercles dont leur centre se situe sur les extrémités du segment.

Présentons un exemple (figure 4.34) pour mieux expliquer le fonctionnement de cette méthode.

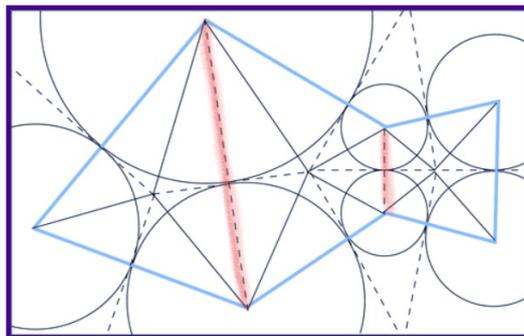


FIGURE 4.34 – Nous désirons découper la figure dessinée en bleu [50].

Le poisson dessiné en bleu est la figure que nous souhaitons découper. Vérifions si les conditions de la méthode de l'emballage sur disques sont respectées.

La première condition est que les disques ne doivent pas se chevaucher. Ensuite, il faut que chaque centre se trouve sur un sommet de la figure en bleu. A l'intérieur du poisson, nous pouvons remarquer qu'il y a des espaces entre différents disques. Nous devons vérifier si ces espaces-là sont délimités par trois ou quatre disques seulement. Les traitillés en rouge délimitent un triangle, à gauche, et deux quadrilatères, au milieu et à droite. Pour terminer, les segments de la figure bleue correspondent bien à l'addition des rayons des cercles, dont leur centre se trouve sur les extrémités du segment.

Découvrons à présent comment nous obtenons les différents traits (pleins et traitillés). Les traitillés en rouge décomposent le poisson soit en triangle soit en quadrilatère. Nous avons donc un triangle (à gauche) et deux quadrilatères (un au centre et un autre à droite).

Nous allons nous intéresser d'abord au triangle de gauche. Les bissectrices sont représentées avec des traits pleins. Leur intersection forme le centre du cercle inscrit. Les traitillés passant par ce centre sont tangents aux cercles. Ils sont donc aussi perpendiculaires aux côtés du triangle. Remarquons que la construction des traits du triangle est similaire à ceux obtenus avec la méthode du squelette droit.

La construction des différents traits des deux quadrilatères est similaire à celle du triangle, décrit ci-dessus. Les traits pleins sont également les bissectrices de ce polygone. Leur intersection est aussi le centre du cercle inscrit. Les traitillés sont tangents aux cercles et donc orthogonaux aux côtés des quadrilatères.

Plions à présent le long des différents traits afin de superposer les segments bleus. Prenons également en compte qu'il faut réaliser un pli à plat. Le théorème de Meakawa doit donc être respecté.

Chapitre 5

L'aspect géométrique

L'origami a été introduit dans le domaine pédagogique afin de faire découvrir la géométrie aux enfants. Dans ce chapitre, nous allons construire différentes formes en deux ou trois dimensions à partir d'une forme basique. Nous commencerons avec la géométrie plane. Nous poursuivrons ensuite avec la géométrie tri-dimensionnelle et ses polyèdres réguliers (solides de Platon), ainsi que les solides de Kepler-Poinsot. Ces solides de Kepler-Poinsot sont des polyèdres réguliers dont les faces sont étoilés.

L'essentiel de ce chapitre est tiré du livre [55] de Didier Boursin. Il décrit comment réaliser diverses figures planes ou tri-dimensionnelles. Il nous offre également des preuves quant à ses constructions.

5.1 La géométrie plane

Dans cette section, nous allons présenter la construction de quelques polygones réguliers (triangle équilatéral, carré, pentagone, hexagone et octogone), ainsi qu'une boîte à secret et un flexagone. Une boîte à secret est un origami créé par Didier Boursin. Elle peut se présenter sous deux formes : la première est une étoile à six branches et la seconde est un triangle équilatéral dans un triangle équilatéral. Un flexagone est un objet un peu mystérieux. Il semble au premier abord n'avoir que deux faces, or il en possède trois. C'est également une figure qui peut se tourner à l'infini.

Nous pouvons obtenir plus d'informations sur l'histoire des flexagones ou leur manipulation sur le poster suivant écrit par Jean-Philippe et André Deledicq [56].

5.1.1 D'un rectangle à un carré

La plupart des pliages commencent avec une feuille carrée. Or, il est plus courant de disposer d'un papier rectangulaire que carré. A partir d'un rectangle, il est assez facile d'obtenir une feuille carrée. Il existe deux méthodes pour obtenir une feuille carrée à partir d'une feuille rectangulaire. Chacune a son avantage et son défaut.

A l'aide de deux feuilles rectangulaires

La première méthode consiste à utiliser deux feuilles rectangulaires de mêmes dimensions. La première feuille est positionnée horizontalement. La seconde est posée verticalement à côté de la largeur de la première feuille. Le carré apparaît par superposition des deux feuilles, voir la figure 5.1.

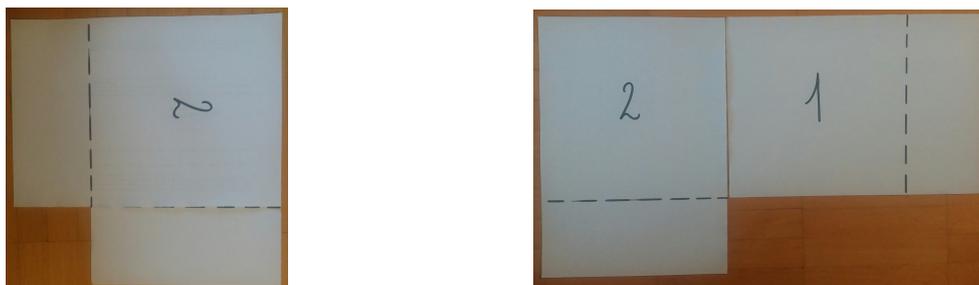


FIGURE 5.1 – Superposons les feuilles et le carré apparaîtra.

En effet, les côtés de la figure obtenue sont tous égaux à la largeur du rectangle. De plus, les feuilles ont été placées perpendiculairement. La forme finale est donc bien un carré.

Le désavantage de cette technique est qu'une certaine précision est exigée pour placer les feuilles correctement l'une sur l'autre afin d'obtenir le carré par superposition. L'avantage est que nous obtenons deux carrés sans aucun pli.

A l'aide d'une seule feuille

La seconde technique ne demande que l'aide d'une feuille rectangulaire. Nous nommons ce rectangle $ABCD$. Pour obtenir le carré $AEFD$, le coin inférieur D est ramené sur le bord supérieur AB pour former un pli passant par A .

Le point F est créé par l'intersection entre le pli et le côté inférieur CD et le point E est la superposition du point D sur le bord AB .

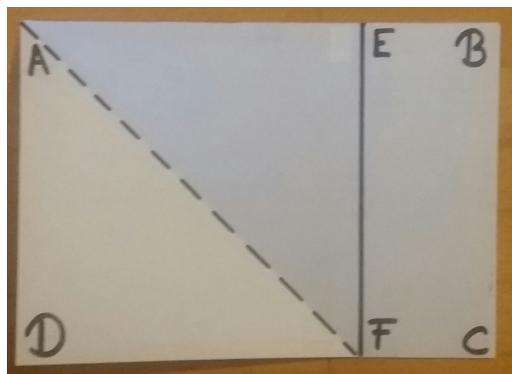


FIGURE 5.2 – Construisons un carré en pliant sa diagonale.

Par la symétrie du pli AF , nous obtenons deux triangles isométriques : AFD et AEF . Nous savons qu'ils sont rectangles en D et E , grâce à l'angle droit \widehat{ADF} de la feuille. Ils sont également isocèles, car AD et EF ont la même longueur. Cela veut dire que le côté AD est isométrique à AE et EF est isométrique à DF . Par l'égalité qu'ont les longueurs AD , AE , EF et DF et l'existence d'au moins un angle droit, nous en concluons que le quadrilatère $AEFD$ est un carré.

L'inconvénient de cette méthode est que notre carré a une diagonale marquée, alors que cela n'est pas nécessairement demandé dans tous les plis. Or, cette technique permet d'être plus précise.

5.1.2 D'un rectangle à un triangle équilatéral

Nous allons construire un triangle équilatéral à partir d'une feuille rectangulaire. C'est une partie importante, car elle va être plusieurs fois reprise (dans les prochaines sous-sections) pour construire d'autres figures plus complexes.

Notre base est un rectangle $ABCD$ de longueur AB et de largeur BC .

Construction

La première étape, décrite à la figure 5.3, est de marquer la médiane m en traitillé des largeurs en rejoignant les bords AB et DC . Nous créons ainsi le point M , le milieu de la largeur BC . Le prochain pli n passe par le sommet B et ramène le coin C sur la médiane m , voir la figure 5.4. Trois points sont créés : le point E est au croisement de n et du segment DC , le point F superpose le point C sur la médiane et le point G est l'intersection entre m et n .

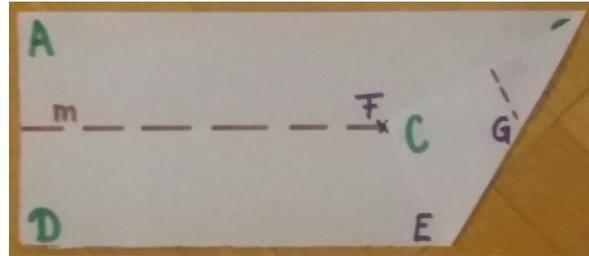
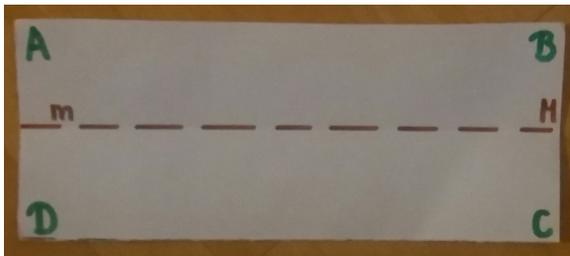


FIGURE 5.3 – Construisons la médiane m . FIGURE 5.4 – Superposons le point C sur m .

Pour finir, nous rabattons le segment BE sur le bord DE , comme à la figure 5.5. Le point H est créé par l'intersection de ce nouveau pli o et du côté AB . En dépliant la forme, nous obtenons deux triangles équilatéraux, comme nous pouvons le voir à la figure 5.6.

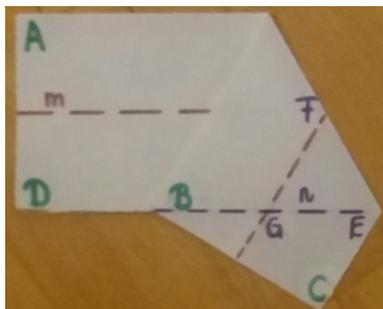


FIGURE 5.5 – Superposons le pli BE sur le segment DE .

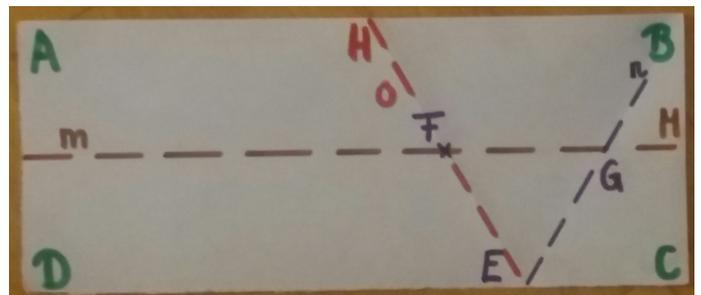


FIGURE 5.6 – La forme finale avec un grand et un petit triangles équilatéraux

Preuve

Le grand triangle BEH et le petit EFG sont équilatéraux, en voici la preuve.

Les points F et M font partie du pli m . Le segment FM est donc parallèle à DC .

Nous savons que $BF = CF$, car FM est la médiatrice de BC . Par symétrie du pli n , les segments BC et BF sont égaux. Nous en concluons que $BF = CF = BC$. Donc le triangle BCF est équilatéral.

Prouvons que l'angle \widehat{EBH} vaut $\frac{\pi}{3}$. Par le pli n qui superpose le point C sur F , les angles \widehat{CBE} et \widehat{EBF} sont isométriques. Sachant que l'angle \widehat{CBF} est un angle d'un triangle équilatéral, les angles \widehat{CBE} et \widehat{EBF} valent $\frac{\pi}{6}$. Ainsi, par l'angle

droit \widehat{CBA} de la feuille, nous en concluons que $\widehat{EBH} = \widehat{CBA} - \widehat{CBE} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

Nous savons que le triangle BCE est rectangle et que la somme des angles d'un triangle est égale à π . Nous en déduisons l'angle \widehat{BEC} , qui vaut $\frac{\pi}{3}$, car

$$\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

Par la symétrie du pli n , les angles \widehat{BEC} et \widehat{BEF} sont isométriques et donc l'angle \widehat{BEF} vaut $\frac{\pi}{3}$.

Nous savons que \widehat{CBH} est un angle droit. Nous en concluons que l'angle \widehat{EBH} vaut $\widehat{CBH} - \widehat{CBE} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

La droite m étant parallèle à HB , les angles \widehat{EBH} et \widehat{EGF} sont correspondants. Donc l'angle \widehat{EGF} vaut également $\frac{\pi}{3}$.

Nous savons que la somme des angles d'un triangle vaut π , alors les angles \widehat{BHE} et \widehat{GFE} valent

$$\pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Pour conclure, les triangles BEH et EFG sont des triangles équilatéraux, car tous leurs angles valent $\frac{\pi}{3}$.

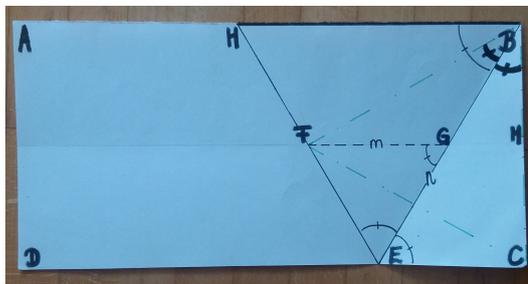


FIGURE 5.7 – Preuve que les triangles BEH et EFG sont équilatéraux

5.1.3 Construire un octogone

Un octogone est un polyèdre régulier à huit côtés. Chacun de ses angles vaut $\frac{3}{4}\pi$. On peut construire un octogone avec une feuille A4 ou à l'aide d'un carré quelconque.

A partir d'une feuille A4

Nous réalisons un carré selon une des deux méthodes décrites à la sous-section 5.1.1. Après le découpage du carré, il reste un bande rectangulaire. Sur le carré, nous marquons les deux diagonales en rejoignant deux sommets opposés. Sur la bande rectangulaire, nous

marquons la médiatrice des petits côtés en superposant les grands côtés. Nous devons obtenir le même résultat que la figure 5.8.



FIGURE 5.8 – Les deux bases avec leurs médiatrices marquées

Nous plaçons ensuite le rectangle sur le carré en alignant la médiatrice sur une des diagonales du carré. De plus, il faut que les coins du rectangle touchent les bords du carré, comme à la figure 5.9. Ensuite, on rabat les deux triangles qui dépassent du rectangle, comme nous pouvons le voir à la figure 5.10. Nous répétons cette manœuvre sur l'autre diagonale.



FIGURE 5.9 – Les coins du rectangle doivent toucher les bords du carré.

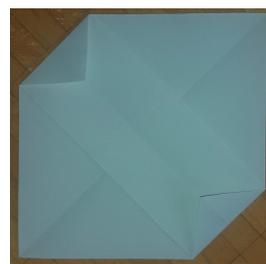


FIGURE 5.10 – Rabattons les petits triangles.

Remarquons qu'il n'est pas possible de réaliser un octogone avec une feuille rectangulaire quelconque. En effet, les coins du rectangle découpé doivent toucher les bords du carré. Si notre base n'a pas un rapport $\sqrt{2}$ entre ses côtés, tous les sommets du rectangle découpé ne touchent pas les bords du carré.

Une fois retournée, l'origami prend une forme d'octogone (voir à la figure 5.11).



FIGURE 5.11 – L'octogone

Preuve

Une feuille A4 a pour dimensions $21 \text{ cm} \times 29,7 \text{ cm}$. Le rapport de ses côtés vaut donc approximativement $\sqrt{2}$. Cela est équivalent à dire que la largeur vaut une unité et la longueur $\sqrt{2}$. Le carré a donc les côtés de longueur 1. Le rectangle a une longueur de 1 et donc une largeur de $\sqrt{2} - 1$.

Nous nommons les sommets du carré $ABCD$ et ceux de l'octogone $EFGHIJKL$, comme montré à la figure 5.12.

Nous savons que EF , GH , IJ et KL sont égaux, car ils mesurent la même longueur que la largeur de la bande rectangulaire soit $\sqrt{2} - 1$. De plus, FG , HI , JK et LE ont également la même longueur, car ils sont tous sur un des bords du carré. Pour prouver que $EFGHIJKL$ est bien un octogone, il suffit de montrer que EF est égal à FG et que tous deux valent $\sqrt{2} - 1$.

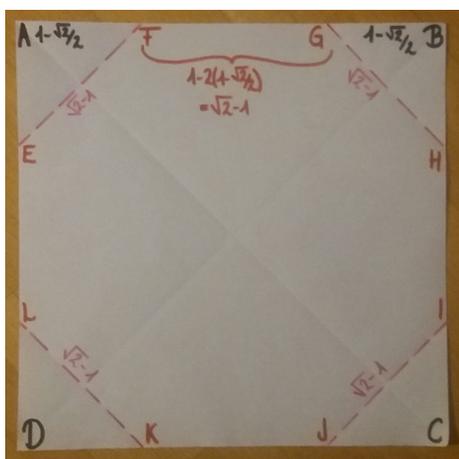


FIGURE 5.12 – La base carrée $ABCD$ et l'octogone $EFGHIJKL$

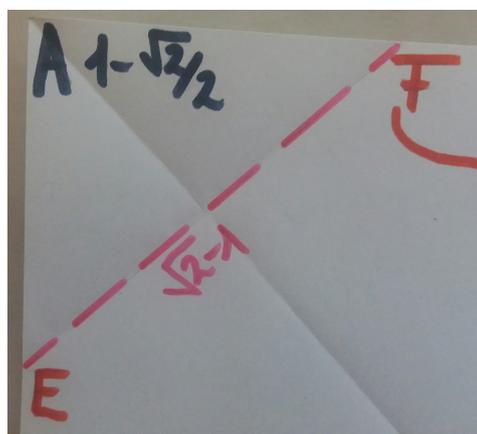


FIGURE 5.13 – Les longueurs du triangle AEF isocèle et rectangle

Le triangle rectangle AEF est aussi isocèle, par la symétrie des plis. Ainsi, AE et AF ont la même longueur. Par le théorème de Pythagore, la somme des carrés des cathètes est égale au carré de l'hypoténuse

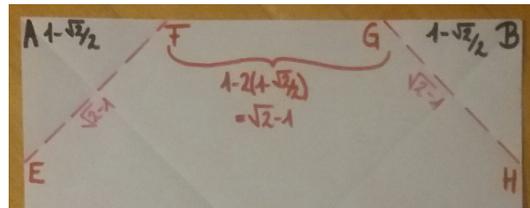
$$EF^2 = AF^2 + AE^2 \Rightarrow EF^2 = 2AF^2 \Rightarrow AF = \sqrt{\frac{EF^2}{2}} = \frac{EF}{\sqrt{2}}. \quad (5.1)$$

Nous savons que EF vaut $\sqrt{2} - 1$

$$AE = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Le côté FG peut se calculer en faisant la différence entre le côté du carré 1 et les deux côtés du triangle isocèle, ce qui nous donne

$$FG = AB - 2AF = 1 - 2 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - 2 + \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1.$$

FIGURE 5.14 – La longueur EF est égale à FG .

Nous obtenons bien que $FG = EF = \sqrt{2}-1$. Ainsi, $EFGHIJKL$ est bien un octogone régulier.

A l'aide d'un carré quelconque

Voici une seconde manière de construire un octogone. Notre base est un carré, si possible assez grand (celui de la feuille A4 21 cm \times 21 cm, par exemple).

Plions le carré de sorte à marquer les médiatrices de ses longueurs. L'intersection de ces plis est le centre du carré, comme nous pouvons le voir à la figure 5.15. Ensuite, les coins sont amenés au centre. Cela crée huit triangles isocèles rectangles. Nous allons nous intéresser aux quatre qui se trouvent à chaque sommet du carré (voir figure 5.16).

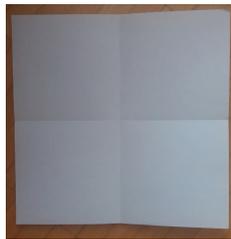


FIGURE 5.15 – La base avec ses médianes marquées et leur intersection nous donne le centre du carré.

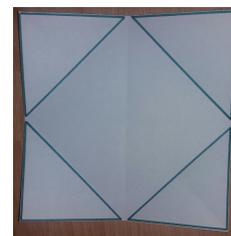


FIGURE 5.16 – Intéressons-nous aux triangles formés par les sommets.

Comme montré à la figure 5.17, nous plions la première bissectrice d'un des angles de $\frac{\pi}{4}$ en superposant la cathète de l'hypoténuse et nous conservons le pli. Nous allons ensuite plier la bissectrice du second angle de $\frac{\pi}{4}$ par la même méthode. Nous répétons ces deux étapes sur les trois autres triangles.



FIGURE 5.17 – Construisons les deux bissectrices.

Lorsque nous retournons la figure avec tous les plis conservés, notre origami a une forme d'octogone (figure 5.18).

Preuve

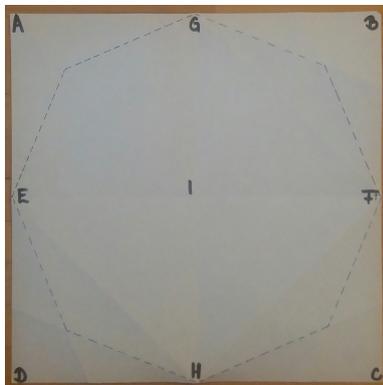


FIGURE 5.18 – L'octogone en traitillé

à l'intersection des bissectrices. En effet, le troisième angle vaut $\frac{3}{4}\pi$, car nous savons que la somme des angles d'un triangle vaut π . Or, un angle de $\frac{3}{4}\pi$ est aussi l'angle d'un octogone. Par conséquent, il est aussi l'angle de l'origami que nous avons construit. Nous en concluons que tous les angles au croisement des bissectrices mesure $\frac{3}{4}\pi$.

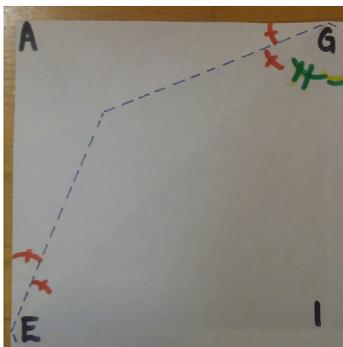


FIGURE 5.19 – L'angle à l'intersection des bissectrices

Il nous reste à prouver que les angles de la figure en G , F , H et E mesurent également $\frac{3}{4}\pi$, pour que notre origami soit bien un octogone régulier. Nous allons nous intéresser à l'angle formé au sommet G . Il est composé de deux angles de $\frac{\pi}{8}$ et de deux angles de $\frac{\pi}{4}$, angles des triangles rectangles isocèles. Il vaut donc :

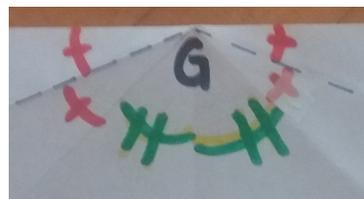
$$2 \cdot \frac{\pi}{8} + 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi.$$

Il est égal à l'angle d'un octogone régulier. Nous pouvons en conclure que la forme obtenue de notre origami est un octogone régulier.

Nommons notre base carré $ABCD$. La construction des médiatrices EF et GH et de leur intersection I ont créé quatre carrés plus petits, tous isométriques : $AEIG$, $BGIF$, $CHIF$ et $DEIH$. Le point I est un point particulier, car il est le centre de gravité du carré.

En ramenant ensuite les sommets du carré au centre, les diagonales des petits carrés sont marquées. Cela sépare donc les petits carrés en huit triangles isocèles rectangles. En effet, les cathètes mesurent toutes deux la moitié du côté du carré. De plus, les triangles ont un angle droit en chaque sommet du carré ou en I .

A présent, intéressons-nous aux triangles AEG , BGF , CFH et DHE . En construisant les deux bissectrices des angles de $\frac{\pi}{4}$, nous obtenons des angles de $\frac{\pi}{8}$. Le nouveau triangle formé est isocèle mais plus rectangle. Il est isocèle

FIGURE 5.20 – L'angle au point G

5.1.4 La boîte à secrets

La boîte à secret est une construction qui permet de réaliser trois triangles équilatéraux différents. En effet, cet origami a, pour base un triangle équilatéral. Il prend ensuite la forme d'une étoile à six branches, mais il peut aussi être vu comme une superposition de deux triangles équilatéraux. Finalement, l'origami terminé est un triangle équilatéral qui en contient un autre plus petit à l'intérieur. Cela a été découvert par Didier Boursin dans son ouvrage *Pliages Utiles* [57] dont nous a été inspiré les explications à venir.

Construction

Notre base est un triangle équilatéral. Pour le construire, nous pouvons nous aider de la démarche décrite à la sous-section 5.1.2. Nous devons marquer le centre. Pour cela, plions au minimum deux bissectrices en superposant deux côtés. Leur intersection nous donne le centre du triangle, que nous pouvons voir à la figure 5.21. Nous choisissons un sommet où passe une bissectrice. Nous le rejoignons à l'intersection du côté opposé et de la bissectrice, comme décrit à la figure 5.22. Nous rabattons ensuite le pli au niveau du centre du triangle (figure 5.23).

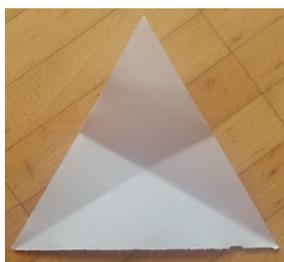


FIGURE 5.21 – Le centre de gravité

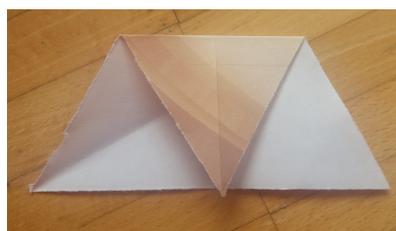


FIGURE 5.22 – Plions le premier sommet au bord du segment opposé.

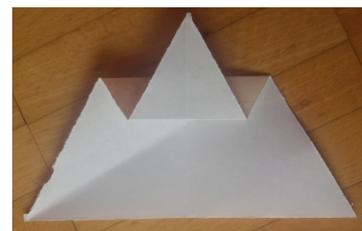


FIGURE 5.23 – Rabattons le sommet à hauteur du centre de gravité.

Nous répétons ces étapes sur les deux autres sommets.

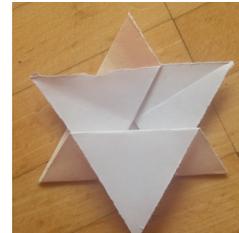
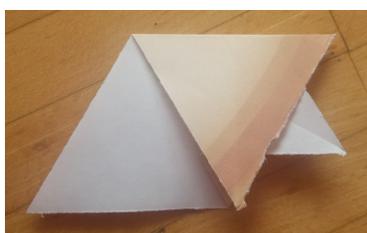


FIGURE 5.24 – Répétons l'enchaînement sur les deux autres sommets.

Le pli du troisième sommet va se placer en dessous du premier sommet (figure 5.25).

Ainsi, nous obtenons l'étoile à six branches ou deux triangles équilatéraux. Nous remarquons qu'il y a une « base » en forme de triangle équilatéral, car si nous tournons la figure la surface est « lisse ». Nous remarquons qu'un second triangle équilatéral, formé

en blanc à la figure 5.25. Il est tourné de $\frac{\pi}{6}$ par rapport au triangle de « base ». Nous pouvons écrire un mot à l'intérieur et il nous suffit de tirer sur les pointes de l'étoile pour ouvrir l'origami. Or, ce pliage n'est pas encore la boîte à secrets.



FIGURE 5.25 – L'étoile à six branches

Nous allons nous intéresser au triangle au-dessus de la « base ». Chacun des petits triangles qui dépassent va être plié de façon à ce qu'ils ne dépassent plus de la « base ». Le pli va passer par les bords de la « base ». Le pliage est illustré à la figure 5.26. Lorsque nous avons répété ce pliage aux deux autres pointes, nous obtenons la figure 5.27.

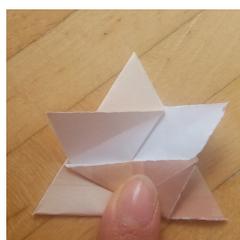


FIGURE 5.26 – La pointe ne dépasse pas de la « base ».

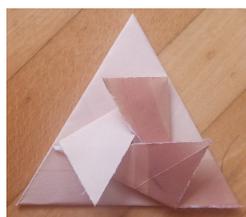


FIGURE 5.27 – Répétons sur les deux autres pointes.

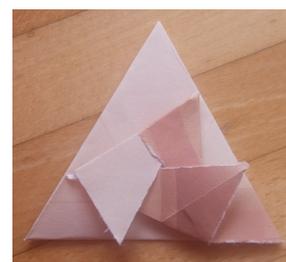


FIGURE 5.28 – Cachons les pointes derrière.

Nous rabattons à l'arrière les pointes qui dépassent, comme l'illustre la figure 5.28. Nous obtenons finalement la boîte à secret avec un triangle équilatéral dans un autre, comme la figure 5.29.



FIGURE 5.29 – La boîte à secret

5.1.5 D'une bande rectangulaire à un pentagone

Nous avons uniquement besoin d'une bande rectangulaire pas très large. Nous la nouons (figure 5.30) et nous l'aplatissons avec délicatesse à plat. Nous ferons bien attention à ce qu'il n'y est pas de fente.



FIGURE 5.30 – Enroulons la bande comme un nœud.

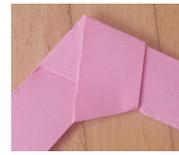


FIGURE 5.31 – Tirons sur les extrémités pour aplatir délicatement.

Cette méthode est la plus simple et la plus rapide pour construire un pentagone.

Par la même méthode, nous pouvons créer une étoile en volume [58] avec une longue bande rectangulaire, ayant une dimension d'environ $1 \times 29,7$ cm. Nous enveloppons le papier délicatement selon la technique du nœud au bord de la bande. Nous faisons attention de ne pas trop aplatir le pentagone, car le but final est d'avoir un volume.



FIGURE 5.32 – Rentrons le petit bout de la bande qui ressort.



FIGURE 5.33 – Rentrons l'extrémité.

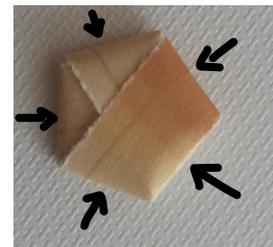


FIGURE 5.34 – Le pentagone

Nous rentrons à l'intérieur la petite extrémité de la bande qui dépasse du pentagone (comme illustré à la figure 5.32). Nous enroulons le reste de la bande en suivant bien la forme du pentagone. Nous obtenons la figure 5.33. Une fois terminée, nous rentrons son extrémité, comme à la figure 5.33. Nous avons construit un pentagone comme à la figure 5.34. Nous écrasons notre origami aux endroits indiqués par les flèches de la figure 5.34. Nous obtenons finalement une étoile en volume, comme illustré à la figure 5.35.



FIGURE 5.35 – L'étoile en volume

5.1.6 Construction d'un pentagone à partir d'une feuille A4

Nous débutons avec une feuille A4 pour obtenir un pentagone sans découpage. Nous commençons par rejoindre deux sommets opposés de la feuille. Le pli sépare la feuille en deux et il va nous servir de base. Nous le plaçons en face de nous, comme le montre la figure 5.36.



FIGURE 5.36 – Le premier pli est placé face à nous.

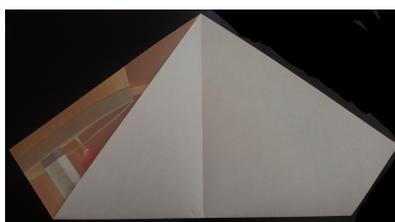


FIGURE 5.37 – Marquons la symétrie.



FIGURE 5.38 – Superposons le petit bord à la symétrie.

Nous rejoignons les deux autres coins opposés afin de marquer l'axe de symétrie (figure 5.37). Nous amenons ensuite les deux petits côtés sur l'axe de symétrie, comme à la figure 5.38. Lorsque nous retournons notre origami, nous obtenons le pentagone, qui ressemble à la figure 5.39.



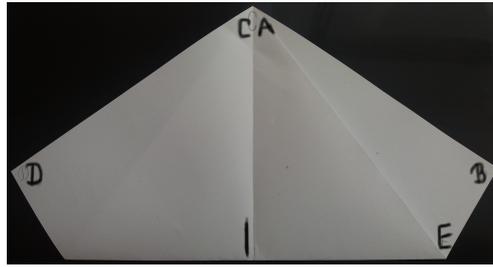
FIGURE 5.39 – Le pentagone

Mais notre origami est-il vraiment régulier ? Allons le découvrir tout de suite.

Description

Notre base est un rectangle de longueur BC de $\sqrt{2}$ et de largeur AB d'une unité. Ces longueurs sont définies par les dimensions d'une feuille A4.

Le premier pli superpose C sur A . Il crée le point E sur le segment BC . Le point I est l'intersection entre les deux premiers plis. Ces points sont illustrés à la figure 5.40. En ramenant le point D sur B , nous créons une symétrie CI . Les parties de gauche et de droite délimitées par le pli CI se superposent parfaitement. Pour notre étude de la figure, nous pouvons nous intéresser uniquement à un côté. Dans notre cas, nous étudierons la partie de droite.

FIGURE 5.40 – Position des points A , B , C , D , E et I

Calcul de l'angle \widehat{BCI}

La longueur de CI est égale à la moitié de la diagonale AC du rectangle, car A et C se superposent grâce le premier pli. Par le théorème de Pythagore, AC vaut $\sqrt{3}$, car le triangle ABC est rectangle en B

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC = \sqrt{1^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{3}.$$

Nous cherchons à calculer ensuite la longueur de AE . Or, le triangle ABE est rectangle en B , d'où

$$AE^2 = BE^2 + AB^2. \quad (5.2)$$

De plus, BE est égal à $BC - CE$. Le segment CE étant égal à AE , $BE = BC - AE$. Sachant que BC vaut $\sqrt{2}$, BE est donc égal à $\sqrt{2} - AE$. Ainsi,

$$AE^2 = (\sqrt{2} - AE)^2 + 1$$

$$\Rightarrow AE^2 = 2 - 2\sqrt{2}AE + AE^2 + 1 \Rightarrow 2\sqrt{2}AE = 3 \Rightarrow AE = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{4}\sqrt{2}.$$

L'angle \widehat{BAI} est égale à la bissectrice d'un angle du pentagone, car son autre moitié se trouve sur la partie de gauche. Si le pentagone est régulier, la moitié de son angle vaut 54° . Nous allons chercher la valeur des angles \widehat{BAE} et \widehat{EAI} et les additionner ensuite

$$\begin{aligned} \widehat{BAI} &= \widehat{BAE} + \widehat{EAI} = \arccos\left(\frac{AB}{AE}\right) + \arccos\left(\frac{AI}{AE}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{1}{3\sqrt{2}/4}\right) + \arccos\left(\frac{\sqrt{3}/2}{3\sqrt{2}/4}\right) = \arccos\left(\frac{2}{3}\sqrt{2}\right) + \arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right). \end{aligned}$$

Nous obtenons un angle d'environ de $54,7^\circ$. Or, pour que le pentagone que nous avons construit soit régulier, il aurait fallu que l'angle \widehat{BAI} soit égal à 54° . Nous en concluons donc que notre pentagone n'est pas régulier.

5.1.7 Le pentagone à partir d'un quart de feuille A4

Pour obtenir notre base, nous plions la feuille quatre fois en largeur. Nous découpons ensuite une des bandes. Nous pouvons à présent commencer.

Construction

Nous marquons légèrement sur le côté la moitié et le quart de la longueur, comme à la figure 5.41. Nous rejoignons ensuite le coin inférieur gauche sur le bord supérieur, en faisant attention de passer le pli par la marque du quart de la longueur, comme illustré à la figure 5.42.



FIGURE 5.41 – Marquons la moitié et le quart de la longueur de notre bande.



FIGURE 5.42 – Le premier pli

Nous plions à partir de l'extrémité de droite de la bande. Notre pli doit passer par le coin inférieur gauche, comme nous le montre la figure 5.43. De plus, le bord inférieur de la bande doit toucher notre marque du quart de la longueur, comme montré à la figure 5.44.



FIGURE 5.43 – Le deuxième pli

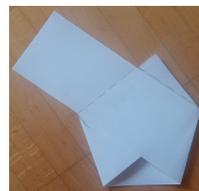


FIGURE 5.44 – Rabattons les extrémités de la bande à l'arrière.

Nous rabattons derrière les extrémités de la bande qui dépassent de la figure. Ce sont les traitillés illustrés à la figure 5.44. Nous obtenons la forme illustrée à la figure 5.45. Cet origami semble prendre la même forme que celle de la construction à la méthode du « nœud ».



FIGURE 5.45 – Le pentagone

Description

Nous nommons $ABCD$ notre base rectangulaire. La largeur AD de ce rectangle vaut le quart de la largeur d'une feuille A4, c'est-à-dire $\frac{1}{4}$. Sa longueur AB de $\sqrt{2}$ est la même qu'une feuille A4. Le point I est la marque du quart de la longueur AB , alors AI vaut $\frac{\sqrt{2}}{4}$. En ramenant le point D sur le segment AB de sorte que le pli passe par le point I , nous créons trois points : J , A' et D' . Le point J est l'intersection entre le pli et DC . Les points A' et D' sont les nouvelles positions des points A et D lors du premier pli. Ces points sont illustrés à la figure 5.46.

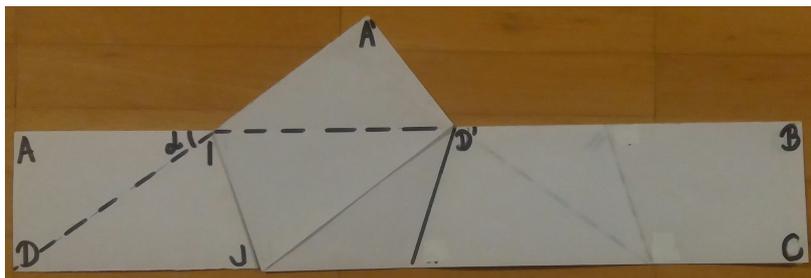


FIGURE 5.46 – Les positions des points décrits ci-dessus

Calcul de l'angle $\widehat{A'IJ}$

L'angle $\widehat{A'IJ}$ est un des angles de la figure obtenue. Si celui-ci vaut 108° , il correspond à l'angle d'un pentagone régulier.

Tout d'abord, calculons l'angle $\widehat{D'IA}$

$$\arctan\left(\frac{AD}{AI}\right) = \arctan\left(\frac{1/4}{\sqrt{2}/4}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Appelons-le α . Il est également égal à $\widehat{A'ID'}$, car ils sont opposés par le sommet I .

L'angle $\widehat{D'ID}$ vaut donc $\pi - \alpha$, par l'angle plat $\widehat{D'IA}$. Le pli IJ est la bissectrice de cet angle $\widehat{D'ID}$. Ainsi, les angles $\widehat{D'IJ}$ et \widehat{JID} sont isométriques et valent $(\pi - \alpha)/2$. Finalement, nous pouvons calculer l'angle $\widehat{A'IJ}$ en additionnant les angles $\widehat{A'ID'}$ et $\widehat{D'IJ}$:

$$\alpha + (\pi - \alpha)/2 = (\pi + \alpha)/2 = \left(\pi + \arctan\left(\sqrt{2}/2\right)\right)/2.$$

L'angle vaut approximativement $107,6^\circ$.

Calcul de l'angle \widehat{IJC}

L'angle $\widehat{D'IA}$ est correspondant à l'angle \widehat{IDJ} . Ainsi, ces deux angles valent tous deux α . Comme la somme des angles d'un triangle vaut π , l'angle \widehat{DJI} vaut

$$\pi - \widehat{IDJ} - \widehat{JID} = \pi - \alpha - (\pi - \alpha)/2 = (\pi - \alpha)/2.$$

Par l'angle plat \widehat{DJC} , nous en déduisons l'angle \widehat{IJC} :

$$\pi - \widehat{DJI} = \pi - \frac{\pi - \alpha}{2} = (\pi + \alpha)/2.$$

Nous obtenons un angle égale à $\widehat{A'IJ}$. Il vaut donc aussi approximativement $107,7^\circ$.

Description de la suite des plis

Nous ramenons l'extrémité droite de la bande de façon que le pli passe par le point D' . De plus, il permet la superposition du segment inférieur sur le point I . Nous obtenons un nouveau point, K , l'intersection entre le segment DC et ce pli. Le point L se trouve superposé sur I . Le point M est l'intersection entre LA' et BD' , voir figure 5.47.

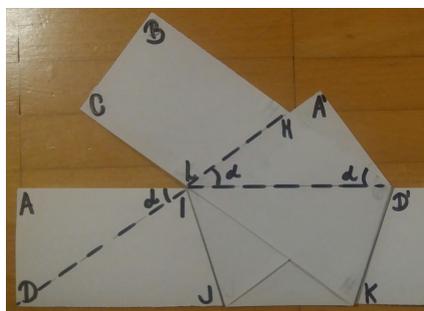


FIGURE 5.47 – Les positions des nouveaux points

La symétrie

Nous pouvons remarquer que la figure $MD'KJL$ a un axe de symétrie, perpendiculaire à JK et passant par M . Les angles $\widehat{JKD'}$ et $\widehat{KD'M}$ sont donc isométriques aux angles de l'origami que nous avons calculé précédemment, à savoir $\widehat{A'IJ}$ ($= \widehat{MLJ}$) et \widehat{IJC} ($= \widehat{LJK}$). Il nous reste donc à calculer l'angle $\widehat{D'ML}$ pour vérifier si la figure que nous avons obtenu est un pentagone régulier.

Calculons l'angle $\widehat{D'ML}$

L'angle $\widehat{MLD'}$ est isométrique à l'angle \widehat{DLA} , qui vaut α , car ils sont opposés par le sommet L . Par la symétrie d'axe passant par M et perpendiculaire à JK , l'angle $\widehat{MLD'}$ est isométrique $\widehat{LD'M}$. Ils valent donc tous deux α . Comme la somme des angles d'un triangle vaut π , l'angle $\widehat{D'ML}$ vaut approximativement $109,5^\circ$, car

$$\pi - \widehat{MLD'} - \widehat{LD'M} = \pi - 2\alpha.$$

Conclusion

Nous en concluons que nous avons construit un pentagone irrégulier. Cette méthode ressemble beaucoup à la méthode du nœud, qui est plus rapide à construire que celle-ci.

5.1.8 Du carré au pentagone

Notre base est une feuille de forme carrée.

Construction

Commençons par plier le carré en deux le long de la diagonale et conservons ce pli. Nous allons marquer le milieu de la diagonale, ainsi que le milieu et le quart du côté droit. Le quart se crée en rejoignant le milieu au coin du haut. La figure 5.48 montre les plis à effectuer.



FIGURE 5.48 – Les marques pour débiter l'origami

En prenant le coin gauche, nous plions de sorte que le pli passe par la moitié de la diagonale. De plus, le bord inférieur doit toucher la marque du quart du côté du carré. Le pli est illustré à la figure 5.49. Nous rabattons à l'arrière la partie gauche délimitée par le triangle formé par le pli précédent. Nous répétons deux fois l'opération pour la partie qui va dépasser du triangle formé par le premier pliage. Si nous avons effectué toute la construction avec précision, nos plis devraient tous être superposés, comme à la figure 5.50.



FIGURE 5.49 – Plions une première fois.

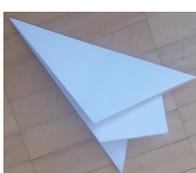


FIGURE 5.50 – Une fois que nous avons tous superposé

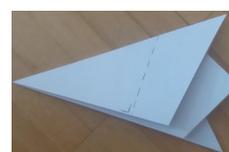


FIGURE 5.51 – Découpons sur les traitillés.

Nous découpons finalement le tout perpendiculairement en prenant soin que la coupe ait pris toutes les épaisseurs, sur les traitillés illustrés à la figure 5.51. Lorsque nous déplaçons le tout, nous obtenons un pentagone, comme à la figure 5.52.



FIGURE 5.52 – Le pentagone

Description

Notre base est un carré. En rejoignant les deux sommets opposés, nous obtenons deux triangles rectangles isocèles et isométriques. Nous nommons le triangle ABC rectangle et isocèle en B . Son hypoténuse vaut une unité et ses cathètes $\sqrt{2}$. En marquant la moitié de AC et de BC , ainsi que le quart de BC , nous créons successivement les points M , H et Q . Nous pouvons voir l'illustration des points, à la figure 5.53.

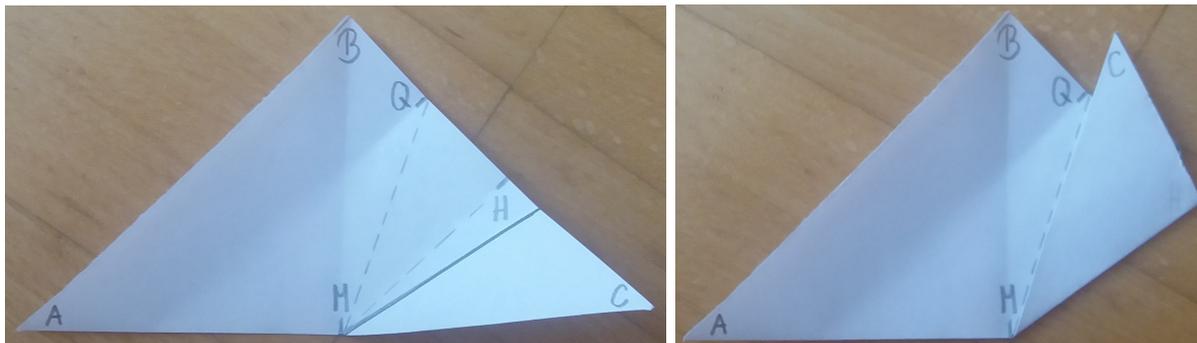


FIGURE 5.53 – Voici les positions des points.

L'angle \widehat{QMC} est l'angle du centre de la forme obtenue. Nous devons obtenir $\pi/5$ pour prouver que notre origami est un pentagone régulier.

Preuve

L'angle \widehat{ACB} mesure $\pi/4$, car le triangle ABC est isocèle et rectangle. Comme les rapports $\frac{HC}{BC}$ et $\frac{MC}{AC}$ sont égaux, les triangles HMC et ABC sont semblables. En effet, le segment HC vaut $\frac{\sqrt{2}}{2}$ de même que MH , car H est le point qui coupe BC en deux parties égales et M celui de AC . L'angle \widehat{HMC} vaut donc $\pi/4$ et \widehat{CHM} vaut $\pi/2$.

Nous savons que le point Q coupe le segment BH en deux parties égales. Le segment QH mesure donc $\sqrt{2}/4$. Nous avons

$$\widehat{QMH} = \arctan(QH/MH) = \arctan\left(\frac{\sqrt{2}/4}{\sqrt{2}/2}\right) = \arctan\left(\frac{1}{2}\right).$$

Afin de calculer l'angle \widehat{QMC} du pentagone, nous additionnons les angles \widehat{QMH} et \widehat{HMC} :

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \pi/4.$$

Nous obtenons un angle d'environ 72° , ce qui correspond à un angle d'un pentagone. Nous en concluons que notre origami est un pentagone régulier.

5.1.9 Le flexagone

Un flexagone est une figure qui semble n'avoir que deux faces. Or, il en cache une troisième. Nous allons présenter cette construction pour expliquer comment cela est possible.

Construction

Nous avons besoin d'une bande rectangulaire, qui peut être découpée à partir d'une feuille A4. Elle doit mesurer $29,7 \text{ cm} \times 9,4 \text{ cm}$. Nous marquons vingt triangles équilatéraux selon la méthode décrite à la sous-section 5.1.2. Le résultat est illustré à la figure 5.54. Nous plions ensuite la feuille en deux en largeur. Nous rabattons à l'arrière le triangle grisé (à la figure 5.55) et à l'avant le petit triangle de gauche.



FIGURE 5.54 – Les vingt triangles

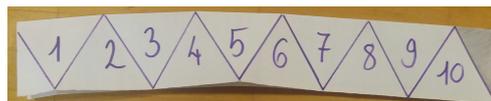


FIGURE 5.55 – Rabattons le triangle gris et le petit triangle à l'autre extrémité.

Nous superposons le triangle 7 sur le triangle 6, comme à la figure 5.56. Nous superposons ensuite le triangle 3 sur le triangle 4 (figure 5.57). Nous finissons le pliage en rentrant le dixième triangle dans le premier (figure 5.58).

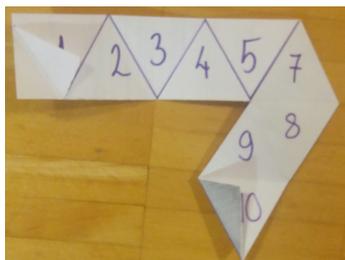


FIGURE 5.56 – Superposons le septième triangle sur le sixième.

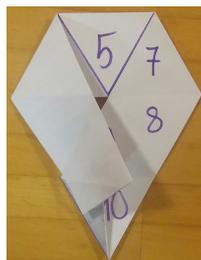


FIGURE 5.57 – Superposons le troisième triangle sur le quatrième.

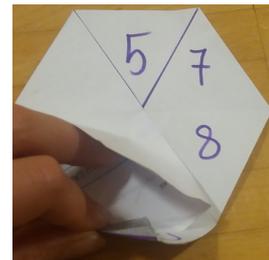


FIGURE 5.58 – Rentrons le dixième triangle dans le premier.

Nous obtenons finalement le flexagone. Les trois faces sont dessinés avec différents motifs sur la figure 5.59. Or, le flexagone est également une figure qui peut se tourner à l'infini. Pour visualiser comment cela est possible, consulter la vidéo [59] pour manœuvrer indéfiniment notre origami.

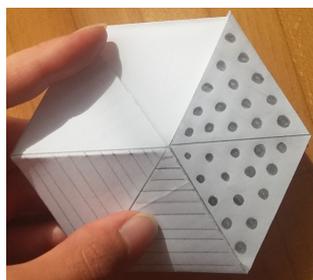


FIGURE 5.59 – Le flexagone

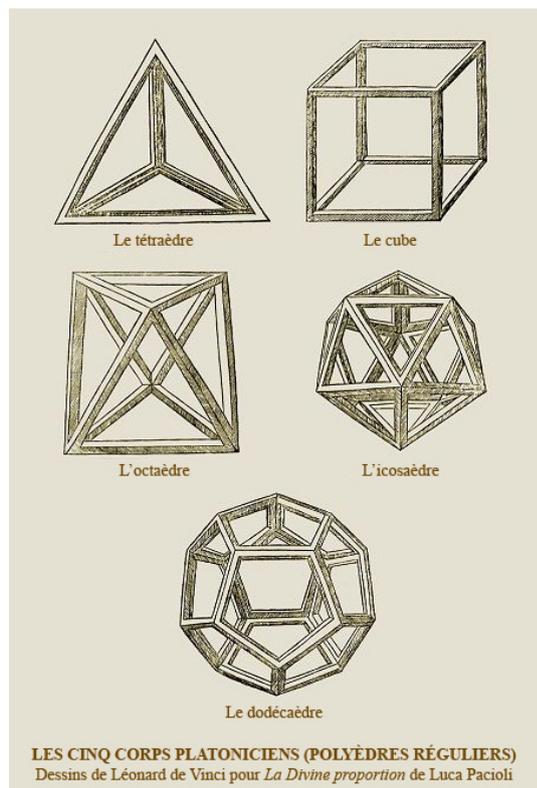
5.2 La géométrie tridimensionnelle

Dans cette section, nous allons nous intéresser à la géométrie en trois dimensions et donc aux polyèdres. D'origine grecque, le mot « polyèdre » est composé de *poly-* qui signifie plusieurs et de *-hedra* face, ou encore base. Il se traduit donc littéralement par plusieurs faces.

Nous allons construire principalement des solides réguliers, ceux de Platon. Nous découvrirons également d'autres polyèdres, comme la pyramide à base carrée ou encore un rhomboèdre à faces cassées.

5.2.1 Les polyèdres réguliers

Un polyèdre est un solide composé de plusieurs faces. Les polyèdres réguliers sont des solides formés d'un même polygone régulier. De plus, chaque sommet a le même nombre d'arêtes qui convergent, c'est-à-dire que chacun des sommets a le même nombre de polygones.



Il existe cinq polyèdres réguliers convexes : le tétraèdre (4 faces), le cube (6 faces), l'octaèdre (8 faces), l'icosaèdre (12 faces) et le dodécaèdre (20 faces). Ce sont les cinq solides de Platon, illustrés à la figure 5.60. Chacun peut être décrit sous la forme du symbole de Schläfli : $\{a; b\}$ avec a le nombre de côtés de chacune de faces et b le nombre d'arêtes ou faces se rejoignant en un sommet. Le tétraèdre $\{3; 3\}$, l'octaèdre $\{3; 4\}$ et l'icosaèdre $\{3; 5\}$ sont des polyèdres formés de triangles équilatéraux, le cube $\{4; 3\}$ de carrés et le dodécaèdre $\{5; 3\}$ de pentagones.

Durant la Grèce Antique, Platon découvre qu'il existe seulement cinq polyèdres réguliers convexes. Selon lui, cela s'expliquerait par les cinq éléments du cosmos, à savoir le Feu, l'Air, l'Eau, la Terre et l'Univers. En effet, Platon a assimilé à chacun des polyèdres un élément. Face à cette justification peu convaincante, Euclide d'Alexandrie réussit à prouver mathématiquement pourquoi ces polyèdres réguliers convexes sont au nombre de cinq. Nous verrons cette preuve dans la prochaine sous-section.

FIGURE 5.60 – Les cinq solides de Platon [60]

Johannes Kepler remarque que chacun de ces polyèdres peuvent être contenu dans une sphère de sorte que seuls les sommets touchent la surface de la sphère. Il propose cette théorie en associant chacun des polyèdres à une planète et en modélisant la planète Terre par la sphère.

En 1752, Leonhard Euler démontre que la formule d'Euler, découverte par René Descartes, s'applique aux graphes de ces cinq polyèdres

$$F_{aces} + S_{ommets} - A_{retes} = 2.$$

Kepler découvre également le grand et le petit dodécaèdres étoilés. Il remarque que chacun de ces deux solides étoilés peuvent être contenus dans une sphère tout comme les solides de Platon. Deux siècles plus tard, Poinot, s'intéressant également aux polyèdres réguliers étoilés, découvre les grands dodécaèdre et icosaèdre. Or, il ignorait que ces deux solides sont les derniers solides des polyèdres réguliers étoilés. C'est le mathématicien Cauchy qui le démontre. Ces quatre solides sont appelés les solides de Kepler-Poinot, en l'honneur de leurs découvreurs. Le tableau ci-dessous, inspiré de celui de l'encyclopédie Wikipédia [61] représente les quatre solides étoilés, ainsi que leur symbole de Schläfli.

Les solides de Kepler-Poinot				
Nom	Image	Symbole de Schläfli	Faces (a)	Sommets (b)
Petit Dodécaèdre Etoilé	 [62]	{5/2; 5}	[63]  5/2	[64]  5
Grand Dodécaèdre Etoilé	 [65]	{5/2; 3}	[63]  5/2	[66]  3
Grand Dodécaèdre	 [67]	{5; 5/2}	[64]  5	[63]  5/2
Grand Icosaèdre	 [68]	{3; 5/2}	[66]  3	[63]  5/2

Il existe neuf polyèdres réguliers : cinq convexes (les solides de Platon) et quatre concaves (les solides de Kepler-Poinot). Les solides de Kepler-Poinot ont pour base des polyèdres réguliers. La particularité de ces solides est que leurs faces, toutes régulières, sont étoilés.

Cette introduction des polyèdres est tirée de l'article [69] intitulé « *Histoire des polyèdres réguliers* » et des sites internet [70] sur « *Les Solides de Platon* » et [71] sur « *Tout sur les polyèdres : des solides de Platon aux étoiles de Poinot-Kepler* ».

5.2.2 Preuve du nombre cinq des polyèdres réguliers

Il est assez aisé de démontrer pourquoi il existe cinq polyèdres réguliers convexes et pas plus. Cette démonstration est tirée du site internet [70] de Yves Monka sur « *Les solides de Platon* ». Pour cela, nous allons nous intéresser au nombre de polygones réguliers que peuvent avoir chacun des sommets. Pour que notre polyèdre soit régulier, il faut qu'il ait le même nombre de polygones en chacun de ses sommets. De plus, la somme des angles

des polygones en un sommet doit être obligatoirement strictement supérieur à π (pour ne pas être dans le plan) et strictement inférieure à 2π (pour être convexe).

Commençons par les triangles. Si nous en plaçons trois, nous obtenons un tétraèdre. Avec quatre triangles en un sommet, nous réalisons un octaèdre. Finalement un icosaèdre peut être construit avec cinq triangles en chacun de ses sommets. Or, lorsque nous additionnons les angles de six triangles, nous obtenons exactement 2π ($6 \times \frac{\pi}{3}$). Ce sont donc les seuls polyèdres réguliers convexes qui ne sont construits qu'avec des triangles équilatéraux.

Intéressons-nous à présent à la base carré. Avec trois carrés en un sommet, nous obtenons le cube. Mais au-delà de ce nombre, il n'est plus possible, car nous obtenons un angle de π avec quatre carrés ($4 \times \frac{\pi}{2}$).

Continuons avec les pentagones. Lorsque trois pentagones sont sur un sommet, nous construisons un dodécaèdre. A partir de quatre pentagone sur un sommet, nous obtenons un angle de $4\frac{3\pi}{5}$, ce que il est supérieur à 2π .

Nous ne pouvons pas construire un polyèdre régulier avec des polygones de plus de cinq côtés. En effet, nous obtenons un angle de 2π avec trois hexagones ($3 \times \frac{2\pi}{3}$). Ainsi avec les hexagones et de polygones réguliers de plus de six côtés, nous ne pourrions pas réaliser des polyèdres réguliers convexes.

5.2.3 Construire un tétraèdre

Un tétraèdre est un polyèdre ou une pyramide à quatre faces. Lorsque celui-ci est régulier, il est composé de quatre triangles équilatéraux.

Il existe plusieurs façons de réaliser un tétraèdre régulier. Nous en construirons à partir de deux bases différentes : une feuille A4 et une enveloppe de format 11 cm \times 22 cm. Commençons par la feuille A4.

A partir d'une feuille A4

Nous commençons par marquer la médiane des largeurs en rejoignant les longueurs de la feuille. Nous ramenons ensuite les longueurs sur le pli au centre, comme à la figure 5.61.

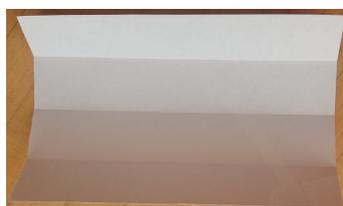


FIGURE 5.61 – Les premiers plis marqués

A l'aide de la sous-section 5.1.2, nous savons comment construire un triangle équilatéral. Conservons les plis ramenant les longueurs sur la médiane puis réalisons quatre triangles équilatéraux, comme indiqué à la figure 5.62. Afin de bien marquer ces plis, n'hésitons pas à utiliser nos ongles.

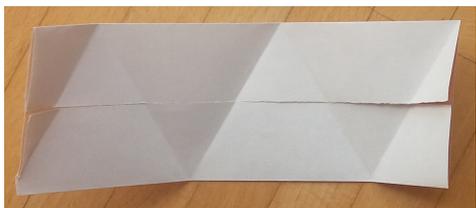


FIGURE 5.62 – Marquons quatre triangles équilatéraux.

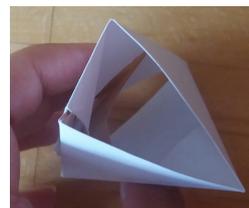


FIGURE 5.63 – Rentrons délicatement le petit triangle de gauche dans celui de droite.

Nous enroulons notre papier pour pouvoir rentrer à l'intérieur le petit triangle de gauche dans celui de droite, comme illustré à la figure 5.63. Il faut être assez délicat pour éviter de déchirer le papier. La manœuvre est assez difficile et nécessite de la patience. Une fois terminée, nous obtenons notre tétraèdre (figure 5.64). En effet, nous avons construit quatre triangles équilatéraux isométriques. Cela nous a permis de réaliser les faces de notre solide.



FIGURE 5.64 – Le tétraèdre

A partir d'une enveloppe 11 cm × 22 cm

Notre base est une enveloppe fermée. Nous collons donc l'autocollant, puis découpons l'ouverture nettement, avec un cutter par exemple. Nous plions notre enveloppe en deux. Nous marquons le haut légèrement en pliant de nouveau en deux. Nous obtenons donc la figure 5.65.



FIGURE 5.65 – Plions notre enveloppe en deux et marquons la moitié de la largeur.

Nous amenons ensuite le coin inférieur (celui qui est assez épais) sur notre marque et nous faisons attention à ce que le pli passe par le coin inférieur droit (un des coins fermés

de l'enveloppe). Ce pli est illustré à la figure 5.66. Nous rabattons le coin supérieur gauche le long du bord de ce pli, comme aux figure 5.67 et 5.68. Ces deux plis doivent être bien marqués. Nous pouvons utiliser nos ongles.



FIGURE 5.66 – Plions à partir du coin épais.



FIGURE 5.67 – Le deuxième pli



FIGURE 5.68 – Le pli se fait le long du premier pli.

Nous pouvons à présent déplier le tout et découper le long de la symétrie depuis la partie ouverte jusqu'au croisement des plis, comme illustré à la figure 5.69. Nous rabattons à l'intérieur les petits triangles, puis nous ouvrons la figure comme illustré à la figure 5.70. Nous rentrons la partie de gauche dans la partie de droite 5.71.



FIGURE 5.69 – Découpons le haut.



FIGURE 5.70 – Ouvrons notre enveloppe.



FIGURE 5.71 – Rentrons la partie de gauche dans celle de droite.

Nous obtenons finalement le tétraèdre (voir figure 5.72).



FIGURE 5.72 – Le tétraèdre

5.2.4 Construire une pyramide à base carrée

Une pyramide à base carrée est formée, comme son nom l'indique, d'un carré et de quatre triangles isocèles. Nous allons en construire une à partir de papier de forme carrée.

Nous plions les deux médianes en rejoignant les côtés. Nous tournons ensuite la feuille pour marquer les diagonales du carré. Nous obtenons ainsi la figure 5.73. Nous ramenons les coins supérieurs sur les coins inférieurs. Nous devons obtenir un triangle isocèle rectangle comme illustré à la figure 5.74.



FIGURE 5.73 – Marquons les plis suivants.

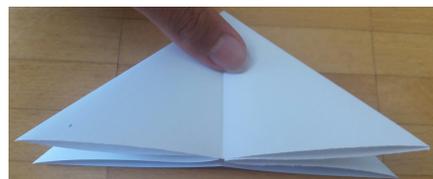


FIGURE 5.74 – Superposons les sommets supérieurs sur les inférieurs.

Nous ramenons le sommet inférieur du triangle sur le sommet du haut afin de marquer les plis (figure 5.75). Nous superposons le bord inférieur sur le pli précédent, comme illustré à la figure 5.76.

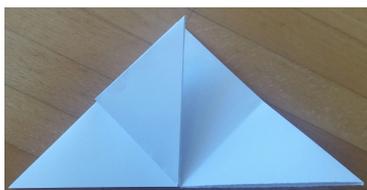


FIGURE 5.75 – Le coin inférieur sur le sommet



FIGURE 5.76 – Le bord inférieur sur le pli de la figure 5.75

Il y a une intersection entre ce pli et le côté du triangle. Cette intersection va se superposer sur le côté opposé, voir figure 5.77. Nous ramenons ensuite la pointe sur le sommet du haut (figure 5.78). N'oublions pas de rentrer la pointe dans la « poche », formée par les plis précédents, comme illustré à la figure 5.79.



FIGURE 5.77 – Amenons le côté du pli 5.76 sur le côté opposé.

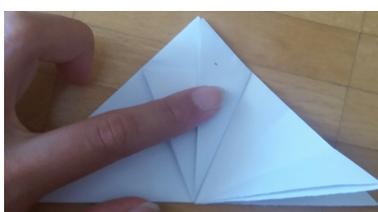


FIGURE 5.78 – Rabattons la pointe sur le sommet.

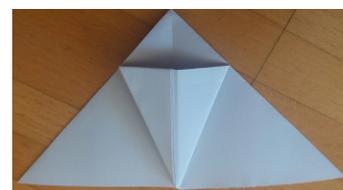


FIGURE 5.79 – Rentrons les petit triangle formé dans la poche.

Répetons ces dernières étapes (de la figure 5.75 jusqu'à la figure 5.79) sur l'autre côté du triangle, puis à l'arrière. Nous obtenons la figure 5.80. Nous pouvons à présent ouvrir la figure en tirant sur la « poche », où nous rentrons le sommet des triangles (figure 5.79).

Nous obtenons la figure 5.81. Nous appuyons délicatement la pointe formé jusqu'à obtenir une base carrée, la base de notre pyramide, comme à la figure 5.82.

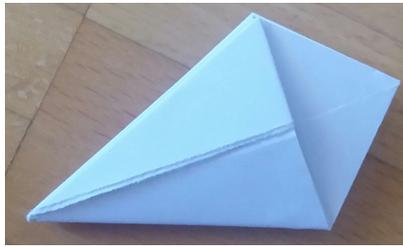


FIGURE 5.80 – Une fois tous les plis répétés

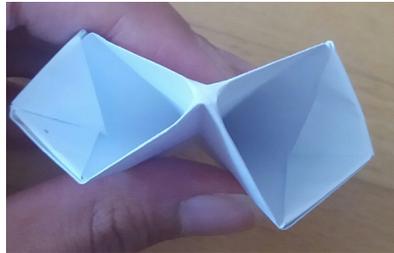


FIGURE 5.81 – Ouvrons notre origami.



FIGURE 5.82 – La pyramide à base carrée

5.2.5 Construire un cube

Nous aurons besoin de six quarts de feuille *A4*, préférablement. Nous pouvons également utiliser six moitiés de feuille *A4*, mais notre cube sera assez volumineux.

Pour obtenir notre base, nous plions notre feuille *A4* en deux en longueur et en largeur. Nous obtenons quatre rectangles isométriques (figure 5.83). Chacun représente une base. Nous avons besoin de six bases, pour les six faces de notre cube. Si nous voulons construire le cube avec une moitié d'une feuille *A4* comme base, nous plions simplement la feuille en deux en longueur. Les deux rectangles obtenus représentent deux modules (figure 5.84).



FIGURE 5.83 – Les quarts d'une feuille *A4*



FIGURE 5.84 – Les moitiés d'une feuille *A4*

Nous plions en deux notre base en superposant la largeur supérieure sur celle du bas. Nous marquons la symétrie en pliant en deux la largeur. Nous obtenons la figure 5.85. Nous ramenons le coin supérieur droit (celui qui a deux épaisseurs de plis) sur la symétrie (figure 5.86). Le pli doit passer par l'intersection entre la symétrie et le bord supérieur. Nous déplions la feuille à plat. Nous devons obtenir les mêmes marques que la figure 5.87.

Nous prolongeons le pli du rectangle supérieur droit sur le rectangle inférieur gauche, pour obtenir la figure 5.88. Nous rabattons le coin le long du bord horizontal (figure

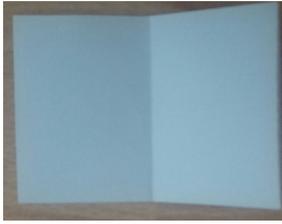


FIGURE 5.85 – Plions la largeur en deux.



FIGURE 5.86 – Rejoignons le coin sur le pli précédent.



FIGURE 5.87 – Déplions notre origami.

5.89). Nous remontons la bande inférieure horizontalement, comme à la figure 5.90. Nous retournons notre origami et répétons ces étapes de l'autre côté.



FIGURE 5.88 – Prolongeons le pli.

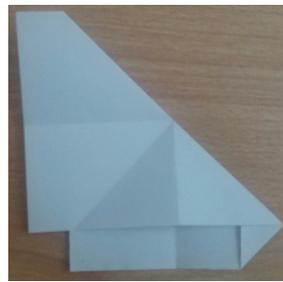


FIGURE 5.89 – Rabattons le coin le long du bord.

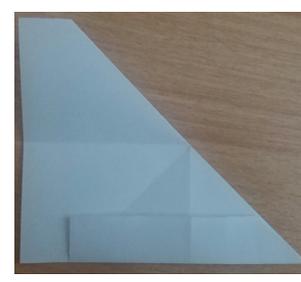


FIGURE 5.90 – Rabattons la bande le long du bord.

Nous pouvons ouvrir notre origami, comme à la figure 5.91. Nous plaçons l'ouverture en haut à droite dans celle du bas à gauche, comme à la figure 5.92, et formons un triangle. Nous plaçons le côté non marquée par la symétrie devant nous. A l'aide d'un onglet ou d'une dent de requin, nous plions en arrière les deux triangles pour obtenir une face carrée avec des triangles rectangles et isocèles de côtés. Nous devons obtenir le même résultat qu'à la figure 5.93.

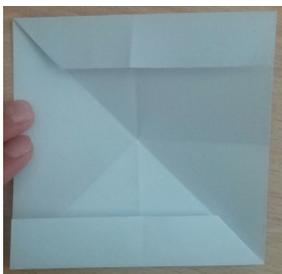


FIGURE 5.91 – Ouvrons notre origami.



FIGURE 5.92 – Formons un triangle.

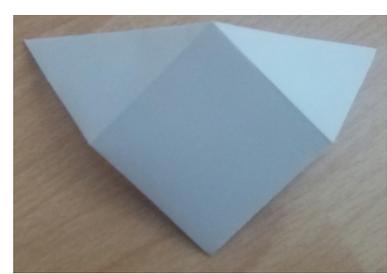


FIGURE 5.93 – Un module du carré

Notre module est composée de deux triangles et d'une base carrée, qui va nous servir de « poche ». Nous plaçons les triangles à l'intérieur de cette « poche » (figure 5.94). Nous

obtiendrons notre cube (figure 5.95), une fois que nous aurons fini d'assembler tous les modules.

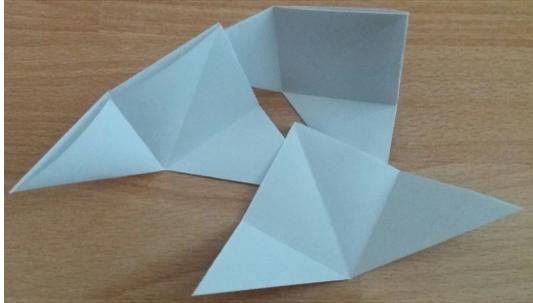


FIGURE 5.94 – Assemblons les modules entre eux.



FIGURE 5.95 – Un cube

5.2.6 Construire un hexaèdre

Un hexaèdre est un polygone à six faces. Le plus connu est le cube. En effet, le seul hexaèdre régulier possible est le cube.

L'hexaèdre que nous allons construire dans cette sous-section n'est pas un hexaèdre régulier. En effet, il est composé de six triangles isocèles. Deux de ces sommets ont trois arêtes qui s'y rejoignent tandis que les trois autres sommets en ont quatre.

Nous allons construire cet hexaèdre à partir des modules construits précédemment à la sous-section 5.2.5. Nous avons besoin uniquement de trois modules. Nous marquons la symétrie du module de sorte d'obtenir un pli montagne (voir figure 5.96). Nous les rassemblons comme à la figure 5.97, puis nous refermons la figure pour obtenir notre hexagone irrégulier (comme à la figure 5.98).



FIGURE 5.96 – Plions notre module en deux.

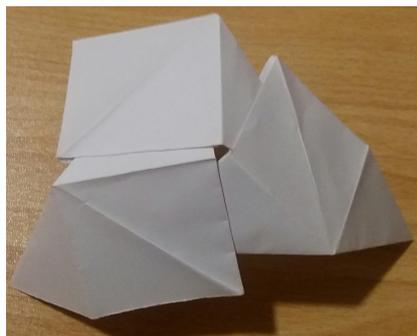


FIGURE 5.97 – Assemblons les modules entre eux.

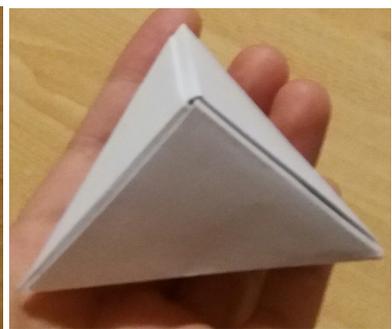


FIGURE 5.98 – Un hexaèdre non-régulier

5.2.7 Construire un rhomboèdre à faces cassées

Un rhomboèdre est un parallélépipède particulier [72]. En effet, ses arêtes mesurent toutes les mêmes longueurs. Or, ce solide n'est pas forcément un cube, car toutes ses faces sont des losanges isométriques. Ses faces sont tous des losanges. Mais qu'est-ce qu'un rhomboèdre à faces cassées? C'est un rhomboèdre, mais au lieu que ses faces soient en forme de losanges, ce sera deux triangles isométriques qui vont « casser » ces losanges.

Pour construire cet étrange solide, nous allons construire douze modules décrits à la sous-section 5.2.5. Nous rajoutons un pli vallée en marquant la diagonale du carré, comme illustré à la figure 5.99. Afin de nous faciliter la construction, nous commençons à

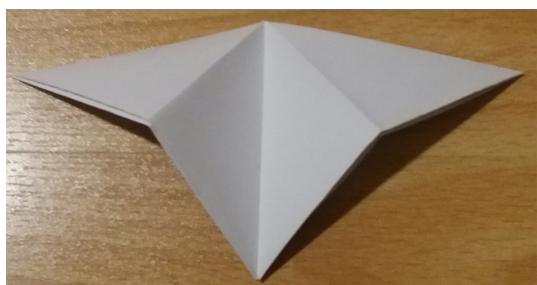


FIGURE 5.99 – Plions notre module en deux.

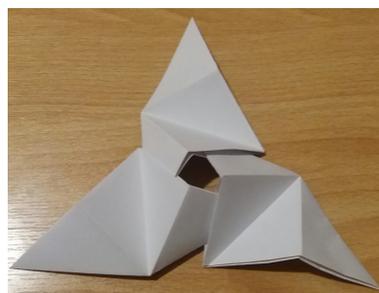


FIGURE 5.100 – Assemblons d'abord trois modules ensemble.

assembler trois modules entre eux, comme illustré à la figure 5.100. Nous répétons cette opération quatre fois avec les autres modules. Avec patience, nous assemblons le tout ensemble pour obtenir notre origami (figure 5.101).



FIGURE 5.101 – Un rhomboèdre à faces cassées

5.2.8 Construire un dodécaèdre

Nous allons construire un dodécaèdre à l'aide de douze modules en forme de pentagone. Nous avons donc besoin de douze feuilles A4.

Nous commençons par rejoindre deux coins de la même diagonale. Tout en conservant le pli, nous ramenons les deux autres coins l'un sur l'autre. Nous obtenons la figure 5.102. Nous déplaçons ensuite le tout et plions selon la diagonale déjà marquée. Nous marquons ensuite les triangles rectangles qui dépassent (figure 5.103) : celui de dessous vers l'avant et celui de dessus vers l'arrière.

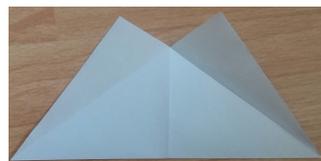


FIGURE 5.102 – Plions la symétrie.

FIGURE 5.103 – Plions les triangles qui dépassent.

Ouvrons ensuite le pliage et rentrons un triangle dans l'autre, voir figure 5.104. Nous obtenons un triangle isocèle (figure 5.105). Plions de sorte que les sommets inférieurs sont ramenés sur leur côté opposé chacun des sommets sur le côté opposé. Le coin touche le pli formé par l'autre sommet. Nous pouvons visualiser notre pli à la figure 5.106. Nous obtenons donc notre module.

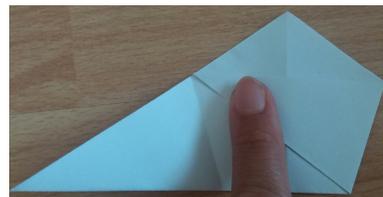
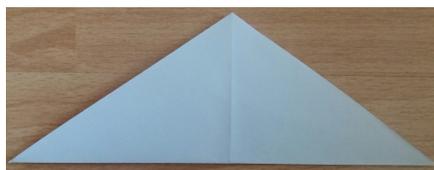
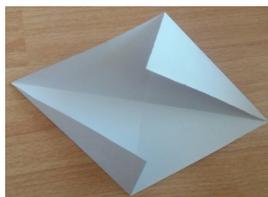


FIGURE 5.104 – Insérons un triangle dans l'autre.

FIGURE 5.105 – Obtenons un triangle isocèle.

FIGURE 5.106 – Plions le sommet sur le pli opposé.

Nous obtenons deux poches et deux triangles que nous enfilons dans ces poches. Commençons par assembler trois modules ensemble, comme à la figure 5.107. Rassemblons les triplets de modules ensemble pour obtenir notre dodécaèdre (figure 5.108).

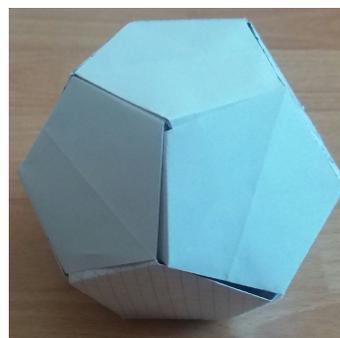
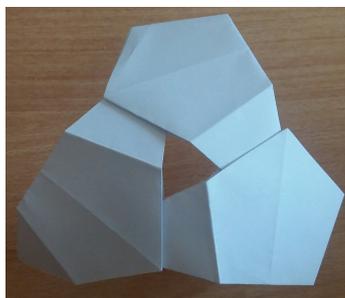


FIGURE 5.107 – Assemblons les modules trois par trois.

FIGURE 5.108 – Notre dodécaèdre

5.2.9 Construire un octaèdre

Un octaèdre est un polyèdre formé de huit triangles équilatéraux.

Il existe plusieurs façons de construire un octaèdre. Nous allons partir de deux bases différentes : d'une feuille A4 et une enveloppe de rapport de côtés $\frac{1}{2}$ (par exemple une qui mesure 11 cm \times 22 cm). Commençons par construire un octaèdre à partir d'une feuille A4.

A partir d'une feuille A4

Nous plions en deux notre feuille A4 en largeur. Nous obtenons deux rectangles de 10,5 cm \times 29,7 cm.

Nous construisons sept triangles équilatéraux selon la méthode décrite à la sous-section 5.1.2 et découpons le reste de la bande. Nous obtenons la figure 5.109. Nous enroulons la feuille en glissant le bord gauche dans celui de droite. Nous devons obtenir la figure 5.110. Nous plions la seconde moitié de la feuille A4 selon la même démarche que la première. Nous enroulons la deuxième bande dans la première, comme à la figure 5.111.



FIGURE 5.109 – Construisons sept triangles.

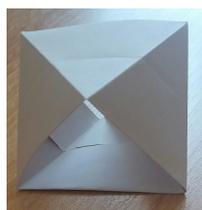


FIGURE 5.110 – Enroulons la bande.

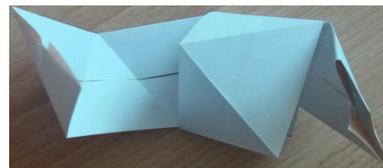


FIGURE 5.111 – Enroulons la deuxième bande dans la première.

Nous obtenons finalement notre octaèdre (figure 5.112). Le petit inconvénient de cette technique de construction est qu'il y a des petits espaces entre les deux bandes enroulées. Afin que notre origami tienne mieux, nous pouvons coller les surfaces qui se superposent.



FIGURE 5.112 – Un octaèdre

A partir d'une enveloppe

Notre base est une enveloppe de rapport de côté $\frac{1}{2}$. La plus courante est une enveloppe de 11 cm \times 22 cm.

Nous commençons par coller l'ouverture de l'enveloppe et découper ses largeurs. Nous marquons des triangles équilatéraux selon la technique 5.1.2. Nous obtenons la figure 5.113. Si nous marquons bien nos triangles, notre origami gardera plus facilement son volume une fois construit. Nous découpons notre enveloppe afin d'obtenir la figure 5.114. Nous n'oublions pas découper la moitié de la symétrie horizontale de droite.



FIGURE 5.113 – Marquons des triangles équilatéraux.



FIGURE 5.114 – Découpons notre origami.

Nous rentrons les deux triangles de gauche à l'intérieur, pour obtenir un hexagone comme à la figure 5.115. Nous ouvrons notre origami et rentrons à l'intérieur les deux triangles équilatéraux opposés, comme à la figure 5.116. Nous croisons ensuite vers l'intérieur les deux autres triangles pour obtenir notre octaèdre.



FIGURE 5.115 – Rentrons deux triangles.



FIGURE 5.116 – Rentrons deux triangles opposés.

Nous obtenons un octaèdre (figure 5.117). Cette technique permet d'en construire un rapidement et aisément. Si nous marquons bien les plis, l'octaèdre tient sa forme.



FIGURE 5.117 – Un octaèdre

5.2.10 Construire un icosaèdre

Un icosaèdre est un polyèdre formé de vingt triangles équilatéraux.

Nos bases sont trois rectangles de $8,6 \text{ cm} \times 29,7 \text{ cm}$. Nous allons construire onze triangles équilatéraux de la même manière qu'à la sous-section 5.1.2. Nous faisons attention de bien les marquer. Nous obtenons donc la figure 5.118.



FIGURE 5.118 – Créons onze triangles.

Nous enroulons la première bande en plaçant l'extrémité de la bande dans l'autre. Nous rajoutons ensuite la deuxième bande (figure 5.119) et finalement la troisième (figure 5.120).



FIGURE 5.119 – Enroulons la première et la deuxième bandes.



FIGURE 5.120 – Rajoutons la troisième bande.

Pour faire tenir la forme, nous pouvons coller les triangles qui se superposent. Nous obtenons finalement notre icosaèdre (figure 5.121).



FIGURE 5.121 – Un icosaèdre

5.2.11 Octo-flexagone

Le principe de l'octo-flexagone est de tourner un volume à l'infini. Voyons à présent comment le construire.

Notre base est une enveloppe de 162 mm \times 93,5 mm dont les longueurs sont découpées et le rabat collé. Pour obtenir cette base, nous partons d'une enveloppe de 162 mm \times 114 mm.

Marquons le milieu puis les quarts des longueurs. Marquons également les plis illustrés à la figure 5.122. Chaque coin doit se retrouver sur le pli du quart de la longueur et le pli doit passer par la moitié de la longueur. Ouvrons ensuite notre enveloppe et marquons les plis afin d'obtenir la figure 5.123.



FIGURE 5.122 – Plions les plis suivants.



FIGURE 5.123 – Ouvrons et plions.

Ouvrons notre enveloppe et rentrons les triangles à l'intérieur (figure 5.124).

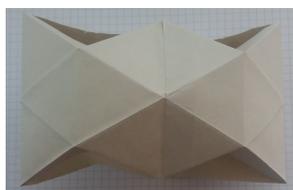
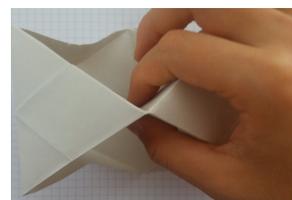


FIGURE 5.124 – Rentrons à l'intérieur les triangles.



Nous obtenons un anneau formé de tétraèdres, comme à la figure 5.125. Pour une meilleure manipulation, nous pouvons rajouter huit épingles à cheveux entre chacun des tétraèdres, comme illustré à la figure 5.126. Cela les empêche de s'ouvrir.

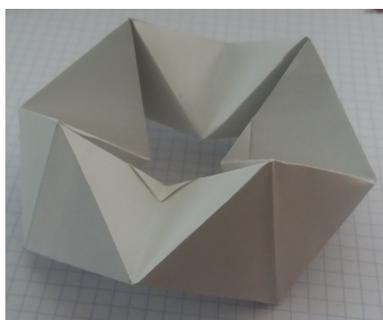


FIGURE 5.125 – Formons un anneau.

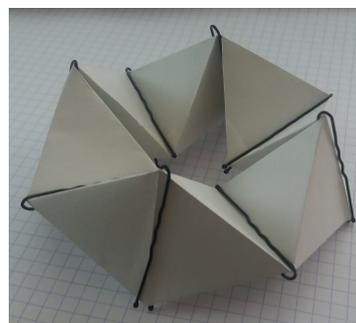


FIGURE 5.126 – Séparons chacun des tétraèdres à l'aide d'épingles à cheveux.

Chapitre 6

Les limites de l'origami

Une des limites du pliage est l'épaisseur du papier utilisé. En effet, il n'est pas possible de plier une infinité de fois un papier. Une des questions est de savoir en combien de fois une feuille de papier peut être pliée en deux. En théorie, la réponse serait une infinité, car l'épaisseur du papier est négligée. Il a été longtemps dit qu'une feuille de papier ne pouvait se plier que huit fois en deux au maximum. Pourtant, avec deux méthodes différentes, Britney Gallivan, une américaine, réussit à établir un nouveau record de douze fois. Ce chapitre est tiré du site du Dr Karl [73] et d'une institue de mathématiques [74].

Dans la première méthode qui autorise la feuille à se plier dans d'une seule direction, Britney Gallivan utilise du papier de toilette de plus d'un kilomètre de long (1'200 mètres), voir figure 6.1. Dans la seconde méthode de Gallivan, la feuille est pliée à chaque fois perpendiculairement. Elle utilise alors une feuille d'or.



FIGURE 6.1 – Pliage en deux selon une direction avec du papier toilette [75]

L'américaine propose également une formule qui lie la longueur L minimale d'une feuille (ou longueur perdue) pour une quantité de pliages effectués n et de l'épaisseur e du papier. En effet, elle remarque que plus l'épaisseur du papier est importante moins le nombre de pliages possibles est grand. De même, plus le nombre de pliages augmente, plus il est difficile de plier en deux. Nous remarquons, dans la vidéo [76] de Kevin Bautista, qu'il est considérablement plus difficile de plier plus de sept fois leur feuille (mesurant la taille d'un terrain de foot).

La première équation (6.1) correspond au pliage en deux selon une direction

$$L = e\pi(2^n + 4)(2^n - 1)/6. \quad (6.1)$$

Lorsque nous plions selon deux directions, nous utilisons un carré comme base. Britney Gallivan propose également une formule (6.2) pour ce type de pliage, avec L la longueur du côté de la base carrée

$$L = e\pi \cdot 2^{3(n-1)/2}. \quad (6.2)$$

Ces deux formules sont tirées de la vidéo [77] de Guinness World Records, dans laquelle Britney Gallivan explique son travail.

La première fonction croît très rapidement, car elle est exponentielle (voir figure 6.2). Il faut donc une feuille très longue pour effectuer plus de sept plis. C'est pourquoi Britney Gallivan a utilisé du papier toilette d'une longueur de 1200 mètres pour réaliser le pliage en deux selon une direction. En 2013, un groupe d'étudiants a battu le record après avoir plié treize fois 16 kilomètres de papier toilette. Ils ont utilisé l'équation 6.1 pour calculer la longueur du papier toilette qu'ils ont eue besoin.



FIGURE 6.2 – Longueur minimale pour un papier d'épaisseur de 0,1 [mm]

La deuxième fonction croît moins rapidement. Afin de plier douze fois de suite une feuille selon les deux directions, Gallivan a utilisé une feuille en or très fine. Il est également possible d'utiliser une feuille très grande, comme le montre la vidéo [76] dans laquelle une équipe réussit à plier plus de huit fois une feuille de la taille d'un terrain de foot.



FIGURE 6.3 – Longueur minimale du côté d'un carré d'épaisseur de 0,1 [mm]

Sur la figure 6.4, nous constatons que la première fonction, en bleue, représentée à la figure 6.2 croit beaucoup plus rapidement que la fonction en orange de la figure 6.3.

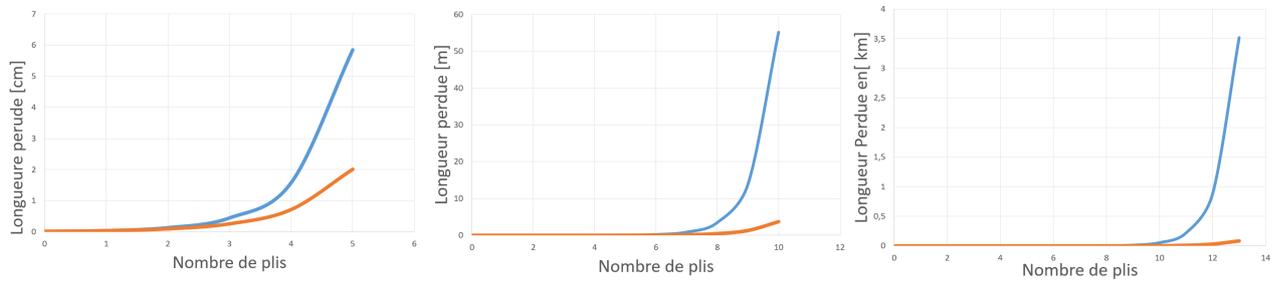


FIGURE 6.4 – Comparaison des fonctions bleues et orange pour une épaisseur de papier de 0,1 [mm]

Chapitre 7

Conclusion

Le but de ce travail de maturité est de présenter la richesse des mathématiques dans l'origami. Les thèmes qui ont été abordés sont la construction de nombres, les théorèmes vérifiant le pliage à plat, le théorème de la découpe unique, l'aspect géométrique lié à l'origami et finalement l'épaisseur du papier limitant le nombre de pliages.

Après six chapitres, il est temps de s'interroger sur l'utilité de ce travail sur les mathématiques de l'origami. Le pliage permet, à partir d'une forme plane, de construire n'importe quelle forme. Il est utilisé aussi bien en médecine que dans le transport, dans le design, ou encore dans l'arrêt des munitions.

Dans la technologie spatiale, par exemple, les stations spatiales ont besoin d'un maximum de panneaux solaires lorsqu'elles se trouvent dans l'espace. Or, pour les transporter, ces panneaux doivent prendre un minimum de place. Des enchaînements de plis simples sont utilisés pour transporter les panneaux solaires lors du décollage. Une fois que la station se trouve dans l'espace, les panneaux solaires sont déployés afin d'optimiser leur utilisation. Différents types de pliages sont utilisés pour résoudre ce problème.

Lors de ma défense de travail de maturité, deux solutions à ce problème de déploiement de panneaux solaires sont abordés : le miura ori et l'origami flasher. Le miura ori est un pavage de parallélogrammes. Pour visualiser le mouvement de cet origami, consulter la page Wikipédia [78]. Nous pouvons également en construire un à l'aide de la vidéo [79]. L'origami flasher a une forme ronde d'une grande surface qui peut être facilement compactée en faisant bouger ses deux coins opposés. Le site [80] de la NASA montre le mouvement de cet origami. Pour en réaliser un, nous pouvons visionner la vidéo [81].

7.1 Inspirations

Dans ce travail, je me suis essentiellement inspirée de l'article *Pour la Science* écrit par Jean-Paul Delahaye. Il m'a permis d'établir un plan majoritairement similaire aux thèmes que l'auteur a abordé dans son article. J'ai également ajouté un chapitre portant sur la géométrie, essentiellement inspiré du livre de Didier Boursin [55]. Pour cette conclusion, j'ai utilisé principalement la vidéo en anglais de Veritasium [82] afin d'étendre mes connaissances du pliage et de mieux saisir l'importance de l'origami dans notre monde.

7.2 Autocritique

Une des premières critiques de ce travail est que j'aurais pu approfondir chacun de mes chapitres de mon travail de maturité. En effet, chaque chapitre aurait pu être à lui seul un sujet d'un seul TM. Ainsi, chaque domaine abordé dans mon travail possède différentes pistes pour poursuivre l'étude de l'origami.

Afin de clore le sujet des nombres constructibles à l'aide de l'origami, j'aurais bien voulu proposer une méthode pour réaliser la racine cubique d'un nombre quelconque. De plus, je me suis limitée aux plis simples, équivalents aux plis autorisés par les axiomes de Justin-Huzita-Hatori. J'aurais aussi aimé aborder les plis simultanés, afin de comprendre la complexité du pliage. J'aurais donc pu résoudre la quintasection d'un angle, c'est-à-dire la découpe d'un angle en cinq parties égales. Selon l'article *Pour la Science* de Jean-Paul Delahaye [29], il est également possible de résoudre toutes les équations polynomiales à coefficients entiers. Dans ce cas, un ordinateur est nécessaire. Pour le chapitre des canevas, la généralisation du théorème de la découpe unique selon les deux méthodes aurait été la bienvenue. J'aurais également pu essayer d'inventer mon propre origami. Quant au chapitre de géométrie, il aurait été possible de proposer une construction des solides étoilés de Kepler-Poinsot. Finalement, pour le dernier chapitre sur les limites de l'origami, une étude plus approfondie des équations découvertes par Britney Gallivan aurait été intéressante. Pour aller plus loin, je pourrais explorer les sujets abordés dans la vidéo en anglais [82] sur l'origami dans l'ingénierie. Cela permettrait plus explicitement de comprendre ce que peut apporter le pliage dans la technologie.

J'aurais pu également noter plus systématiquement les sources et les référer plus formellement.

Un point fort et en même temps une faiblesse de mon travail est le contenu riche que j'aborde. En effet, mon travail comporte énormément d'informations sur des domaines assez variés et approfondis. \LaTeX m'a permis d'avoir une mise en page propre et automatique.

Mon travail comporte également beaucoup d'illustrations que j'ai moi-même réalisées. J'aurais aimé pouvoir en réaliser certaines sur \LaTeX pour donner un meilleur effet.

Bibliographie

- [1] Didier BOURSIN. Cube, 24 avril 2019.
<https://origami-creation.com/travaux/mathematiques/>.
- [2] Jaqueline. Mathématiques des origamis, 24 octobre 2019.
<http://origami.passion.free.fr/index.php?uc=histoire>.
- [3] l'Avant Seine/ Théâtre de Colombes. Petite histoire de l'origami, 24 octobre 2019.
www.lavant-seine.com/petite-histoire-de-lorigami/.
- [4] Origami Loisirs. Qu'est-ce que l'origami ?, 22 octobre 2019.
https://www.origami-loisirs.com/web/qu_estce_que_l_origami.html.
- [5] Culture chinoise et japonaise SCARLET EXORCIST. L'art du papier découpé en chine, 24 octobre 2019. <https://scarletexorcist.wordpress.com/2013/08/11/lart-du-papier-decoupe-en-chine-%E5%89%AA%E7%B4%99/>.
- [6] Monica TEDDLE. Quelle est l'origine du mot «origami», 24 octobre 2019.
<https://fr.quora.com/Quelle-est-lorigine-du-mot-origami>.
- [7] GBTIMES. Papercutting || an introduction, 22 octobre 2019.
<https://www.youtube.com/watch?v=gAGjlGsZkx8>.
- [8] Wang Yan Studio. Simple origami & paper cutting - diy chinese new year decorations, 22 octobre 2019. https://www.youtube.com/watch?v=JhzU_asd-c4.
- [9] Vivre le Japon. L'origami, 22 octobre 2019. <https://www.vivrelejapon.com/a-savoir/comprendre-le-japon/origami-art-plier-papier>.
- [10] Aude AUGAIS. tout commence avec un pli, 22 octobre 2019.
<https://www.lesartisans.paris/art-du-plier>.
- [11] Fée NEANTIZE. L'origami, 22 octobre 2019.
<http://japanswap.canalblog.com/archives/2007/09/02/6080632.html>.
- [12] Marie. Urashima tarō, l'amertume de la mémoire, 22 octobre 2019.
<https://www.kyototradition.com/blog/culture-traditions-japonaises/urashima-taro>.
- [13] Overblog. L'histoire d'urashima tarō, 22 octobre 2019.
<http://experience-japon.over-blog.com/article-35286623.html>.
- [14] Chantal DUPUY-DUNIER. Sadako sasaki, 24 octobre 2019.
<https://arbralettres.wordpress.com/2018/08/08/sadako-sasaki-chantal-dupuy-dunier/>.

-
- [15] Ecole instrument de paix. La légende des 1000 grues, 22 octobre 2019.
<http://veille-eip.org/fr/content/la-legende-des-1000-grues>.
- [16] Fée NEANTIZE. L'origami, 22 octobre 2019.
<http://japanswap.canalblog.com/archives/2007/09/02/6080632.html>.
- [17] Adeline KLAM. Le papier japonais « washi », 24 octobre 2019.
www.adelineklam.com/tag/chiyogami.
- [18] Céline. Le kirigami... mais qu'est ce que c'est ???, 24 octobre 2019.
<http://foliescreatives.over-blog.org/article-16366649.html>.
- [19] Maëlle HILQUIN. Dans le sillage du pliage et découpage, 22 octobre 2019.
<https://bateau-en-papier.blogspot.com/2014/04/dans-le-sillage-du-pliage-et-decoupage.html>.
- [20] Yasushi SHIBATA. Gallery #6, 22 octobre 2019.
<http://himagenenoyakata.la.coocan.jp/gallery06.htm>.
- [21] Senbazuru. Boîte hexagonale de tomoko fuse, 22 octobre 2019.
<http://senbazuru.fr/files/category-objet.php>.
- [22] Leah BURROWS. The ancient art of kirigami is inspiring a new class of materials, 24 octobre 2019.
<https://phys.org/news/2017-02-ancient-art-kirigami-class-materials.html>.
- [23] Univers du Kirigami. Découvrez le kirigami, l'art du découpage du papier, 22 octobre 2019. <https://gwenaelle.jimdo.com/histoire/>.
- [24] Université de Genève. L'origami, 22 octobre 2019.
www.unige.ch/semainedesmaths/semaine-des-maths-2010/lorigami/.
- [25] Léa. Nouvelle histoire de l'origami, 22 octobre 2019.
<https://origamilea.wordpress.com/category/histoire-de-lorigami/>.
- [26] Jeux et Compagnie. Quand l'origami devient une activité ludique, 22 octobre 2019.
<https://www.jeuxetcompagnie.fr/quand-lorigami-devient-une-activite-ludique-pour-les-enfants/>.
- [27] Mark BOLITHO. The 7th international meeting on origami in science, mathematics and education (7osme) – oxford – (september 4–7, 2018), 22 octobre 2019. <http://creaselighting.co.uk/the-7th-international-meeting-on-origami-in-science-mathematics-and-education-7osme-oxford-september-4-7-2018/>.
- [28] Yin LIANG. Full program and useful information, 22 octobre 2019.
<http://osme.info/7osme/program.html>.
- [29] Jean-Paul DELAHAYE. Les mathématiques de l'origami. *Pour la Science*, pages 76–81, février 2015.
- [30] Département des mathématiques et statistiques (DMS) de l'Université de Montréal. Les mathématiques de l'origami, 24 octobre 2019.
<https://dms.umontreal.ca/rousseau/Origami.pdf>.
- [31] Christine ROUSSEAU. Les mathématiques de l'origami, 22 avril 2019.
<http://accromath.uqam.ca/2016/10/les-mathematiques-de-lorigami/>.

- [32] Yvan MONKA. Les trois problèmes de l'antiquité, 22 octobre 2019. <https://www.maths-et-tiques.fr/index.php/histoire-des-maths/geometrie/les-trois-problemes-de-l-antiquite>.
- [33] Robert J. LIANG. Huzita-justin axioms, 24 octobre 2019. <https://langorigami.com/article/huzita-justin-axioms/>.
- [34] Jean-Paul DELAHAYE. Les mathématiques de l'origami, 22 octobre 2019. https://mathinfo.unistra.fr/websites/math-info/irem/Secretariat/Conferences/2018-11-07_conf-Delahaye-origami.pdf.
- [35] Robert J. LIANG et Roger C. ALPERIN. One-, two-, and multi-fold origami axioms, 24 octobre 2019. <https://langorigami.com/article/huzita-justin-axioms/>.
- [36] Zapiok. Premier théorème de haga (1), 23 juin 2019. <http://origamics.over-blog.com/premier-th%C3%A9or%C3%A8me-de-haga-1>.
- [37] Zapiok. Premier théorème de haga (2), 23 juin 2019. <http://origamics.over-blog.com/premier-th%C3%A9or%C3%A8me-de-haga-2>.
- [38] Zapiok. Deuxième théorème de haga, 23 juin 2019. <http://origamics.over-blog.com/deuxi%C3%A8me-th%C3%A9or%C3%A8me-de-haga-1>.
- [39] Zapiok. Troisième théorème de haga, 18 avril 2019. <http://origamics.over-blog.com/troisi%C3%A8me-th%C3%A9or%C3%A8me-de-haga>.
- [40] Muriel CHAUBERT. Série 12 d'exercices de la hep, 2015.
- [41] Rachel THOMAS and Marianne FREIBERGER. Trisecting an angle with origami, 18 avril 2019. <https://plus.maths.org/content/trisecting-angle-origami>.
- [42] Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem. Origami : la trisection d'un angle, 18 avril 2019. http://sorciersdesalem.math.cnrs.fr/Origami/origami_trisection.html.
- [43] Traposo FR. Une cocotte en papier, comment faire origami, 3 novembre 2019. www.youtube.com/watch?v=77OX1F1JLlo.
- [44] Tarl. Natural born storytellers, 22 octobre 2019. <http://bornstorytellers.blogspot.com/2011/12/your-origami-is-nothing-short-of.html>.
- [45] Les origamis de Thomas. Origami! la grue traditionnelle, 22 octobre 2019. <https://www.youtube.com/watch?v=bZcl8eKG3HU>.
- [46] Les Origamis de Thomas. Origami : Boite en papier simple et rapide!, 22 octobre 2019. https://www.youtube.com/watch?v=A_2VliBL0YA.
- [47] Les Sorciers de Salem. Le théorème de la grenouille bicolore, 22 octobre 2019. <http://sorciersdesalem.math.cnrs.fr/Posters/PosterGrenouilleBicolore.pdf>.
- [48] Aggie & Gen. The geometry of origami, 22 octobre 2019. https://people.stfx.ca/ttaylor/M371/presentations_2016/Origami-Aggie&GenB.pdf.

- [49] Millennium Mathematics Project at the University of Cambridge. History of the fold and cut problem, 22 octobre 2019.
<https://wild.maths.org/history-fold-and-cut-problem>.
- [50] Erik DEMAINE. Erik demaine's folding and unfolding : The fold-and-cut problem, 22 octobre 2019. <http://erikdemaine.org/foldcut/>.
- [51] CLUBORILYON. Le théorème de la découpe unique, 22 octobre 2019.
<https://cluborilyon.wordpress.com/2019/03/01/decoupe-unique/>.
- [52] Numberphile. Fold and cut theorem -numberphile, 22 octobre 2019.
<https://www.youtube.com/watch?v=ZREp1mAPKTM&t=190s>.
- [53] Millennium Mathematics Project maths.org. Fold and cut theorem -dr katie steckles, 22 octobre 2019.
https://www.youtube.com/watch?time_continue=84&v=G8SoJ530JAs.
- [54] Université de Genève. En un coup de ciseau 3, 22 octobre 2019.
https://www.unige.ch/semainedesmaths/files/3115/0357/2236/CO-PO-Coup_de_ciseau_3.pdf/.
- [55] Didier BOURSIN et Valérie LAROSE. *Pliages & Mathématiques*. ACL- Les Éditions du Kangourou, 2000.
- [56] Jean-Philippe & André DELEDICQ. *Les Flexagones du KANGOUROU*. ACL- Les Éditions du Kangourou, 1996.
- [57] Didier BOURSIN. *Pliages utiles*. Dessain et Tolra, 1996.
- [58] Margaret VAN SICKLEN. *Almaniac Origami 2014*. Editions 365, 2014.
- [59] Mickaël LAUNAY. Hexa-flexagones : la multiplication des faces - micmaths, 23 février 2015. <https://www.youtube.com/watch?v=sqaFNBtLkv8>.
- [60] Christophe GENTY. Petite histoire de l'origami, 22 octobre 2019.
<http://symbolinks.com/les-5-solides-de-platon.html>.
- [61] Solide de kepler-poinsot, 22 octobre 2019.
https://fr.wikipedia.org/wiki/Solide_de_Kepler-Poinsot.
- [62] Robert FERREOL. Petit dodécaèdre étoilé, 22 octobre 2019.
<https://www.mathcurve.com/polyedres/petitdodecaedretoile/petitdodecaedretoile.shtml>.
- [63] Pentagram, 22 octobre 2019. https://fr.wikipedia.org/wiki/Solide_de_Kepler-Poinsot#/media/Fichier:Pentagram.svg.
- [64] Pentagon, 22 octobre 2019. <https://fr.wikipedia.org/wiki/Fichier:Pentagon.svg>.
- [65] Robert FERREOL. Grand dodécaèdre étoilé, 22 octobre 2019.
<https://www.mathcurve.com/polyedres/granddodecaedretoile/granddodecaedretoile.shtml>.
- [66] Toppr. Areas of triangle and quadrilateral, 22 octobre 2019.
<https://www.toppr.com/guides/maths/coordinate-geometry/areas-of-triangle-and-quadrilaterals/>.
- [67] Robert FERREOL. Grand dodécaèdre, 22 octobre 2019.
<https://www.mathcurve.com/polyedres/granddodecaedre/granddodecaedre.shtml>.

- [68] Robert FERREOL. Grand icosaèdre, 22 octobre 2019. <https://www.mathcurve.com/polyedres/grandicosaedre/grandicosaedre.shtml>.
- [69] Histoire des polyèdres réguliers, 22 octobre 2019. https://clg-cite-narbonne.ac-montpellier.fr/sites/clg-cite-narbonne/files/histoire_des_polyedres_reguliers_3.pdf.
- [70] Yves MONKA. Les solides de platon, 22 octobre 2019. <https://www.maths-et-tiques.fr/index.php/histoire-des-maths/geometrie/les-solides-de-platon>.
- [71] Jean-Jacques DUPAS. Tout sur les polyèdres : des solides de platon aux étoiles de poinsot-kepler, 22 octobre 2019. <http://culturemath.ens.fr/video/Dupas-polyedres/Dupas-glossaire.htm>.
- [72] Gerard VILLEMIN. Rhomboèdre ou hexaèdre rhombique, 22 octobre 2019. <http://villemin.gerard.online.fr/GeomLAV/Objet3D/Rhomboed.htm>.
- [73] Karl KrUSSZEKNICKI ou Dr K. Folding paper, 2 novembre 2019. www.abc.net.au/science/articles/2005/12/21/1523497.htm.
- [74] Hazel Lewis. How many times can you fold a sheet of paper ?, 2 novembre 2019. www.abc.net.au/science/articles/2005/12/21/1523497.htm.
- [75] Morgan. Elle plie en 2 une feuille de papier 12 fois, un record du monde!, 2 novembre 2019. <https://fr.ubergizmo.com/2018/12/02/video-plier-feuille-papier-12-fois-record-monde.html>.
- [76] Kevin BAUSTISTA. Mythbusters- folding paper seven plus times, 2 novembre 2019. www.youtube.com/watch?v=kRAEBbotuIE.
- [77] Guinness World Records. Britney gallivan : How many times can you fold a piece of paper ? - meet the record breakers, 2 novembre 2019. www.youtube.com/watch?v=AfPDvhKvaa0.
- [78] Miura fold, 24 novembre 2019. https://en.wikipedia.org/wiki/Miura_fold.
- [79] Maple SYRUP. Fold paper to open with one motion, 30 décembre 2015. <https://www.youtube.com/watch?v=ozpJbxlic30&t=384s>.
- [80] Jet Propulsion Laboratory. Space origami : Make your own starshade, 24 novembre 2019. <https://www.jpl.nasa.gov/edu/learn/project/space-origami-make-your-own-starshade/>.
- [81] JeremyShaferOrigami. Fold an origami flasher by jeremy shafer, 16 février 2011. <https://www.youtube.com/watch?v=1YSEDUwd84A>.
- [82] Isaac FRAME et Derek MULLER Jonny HYMAN. Engineering with origami, 28 octobre 2019. https://youtu.be/ThwuT3_AG6w.