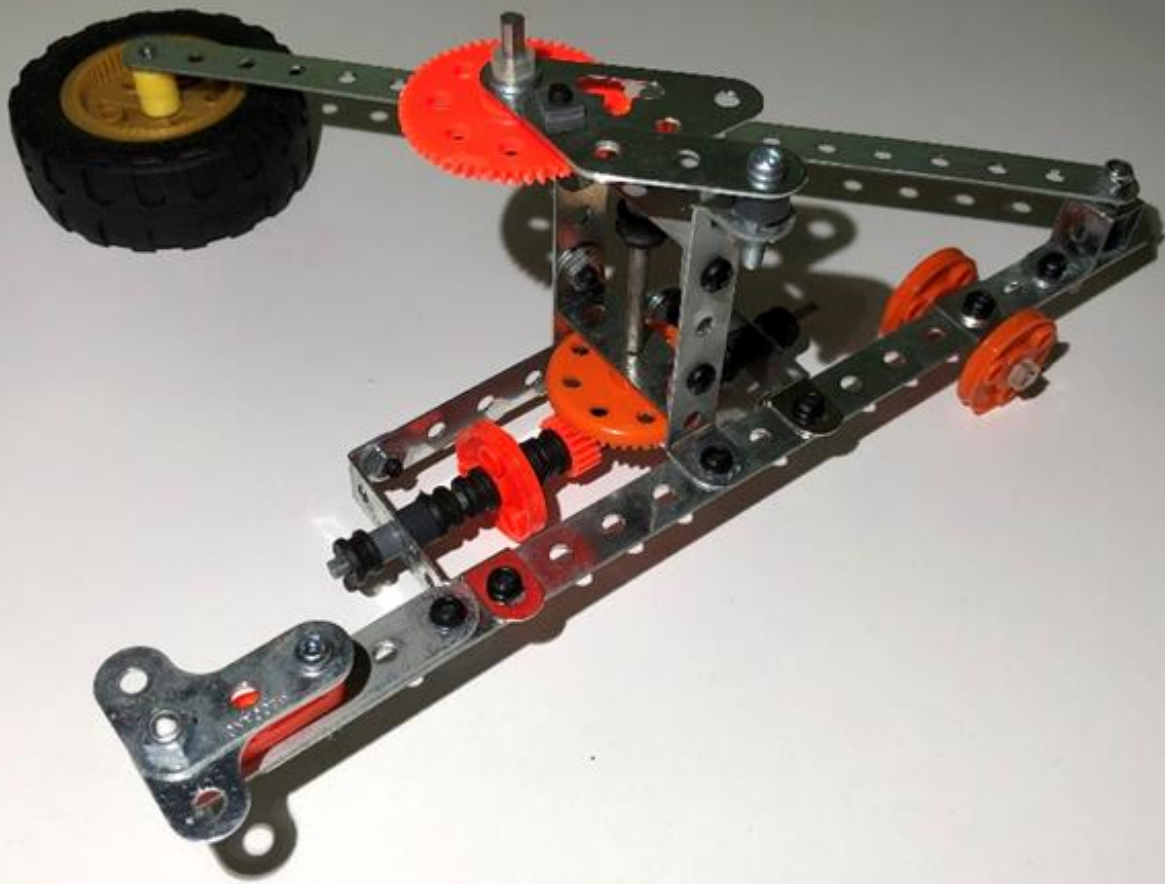


Funktionsweise und Bau eines Polarplanimeters nach J. Amsler-Laffon



Kantonsschule Schaffhausen
Datum: 27.03.2022
Fach: Mathematik
Betreuungsperson: Dr. David Stotz
Verfasserin: Simona Styger, 4sa, simona.styger@edu.sh.ch

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
1.1 Thematik und Motivation	1
1.2 Historischer Kontext der Erfindung des Polarplanimeters	2
2. Grundwissen über das Polarplanimeter	4
2.1 Eigenschaften der Bestandteile.....	4
2.2 Ergänzendes Grundwissen.....	5
2.3 Messschema.....	5
3. Geometrische Erklärung des Funktionsprinzips.....	6
3.1 Begriffe und deren Abkürzungen	6
3.2 Allgemeine Betrachtung des Messrads.....	6
3.3 Tracerarmfläche.....	8
3.4 Flächendifferenz	9
3.5 Berechnung der Tracerarmfläche	10
4. Mathematischer Beweis des Funktionsprinzips	12
4.1 Übersicht des Beweises	12
4.2 Parametrisierte Kurven (4.2.1) und Vektorfelder (4.2.2)	13
4.3 Berechnung des Messwerts mit dem Satz von Green.....	16
4.4 Beweisführung mit Gleichungssystem	18
5. Isoperimetrische Ungleichung der Ebene.....	21
6. Dokumentation des eigenen Baus	23
6.1 Messgenauigkeit und Messversuche	31
6.2 Experiment zur Messrad-Achsenneigung und Messversuche.....	33
7. Schlusswort und Dank.....	38
8. Quellen- und Abbildungsverzeichnis	39
9. Redlichkeitserklärung.....	39

1. Einleitung

1.1 Einführung in die Thematik und Motivation

Wenn sich eine Lateinschülerin mit dem Thema des Polarplanimeters auseinandersetzt, darf zu Beginn die Etymologie nicht fehlen. Das lateinische Wort «planus» bedeutet «flach, eben» und das aus dem Griechischen stammende «métron» so viel wie «Mass». Planimeter sind also Geräte, die Flächen messen. Um Missverständnissen vorzubeugen, sei gesagt, dass es sich hierbei um Flächen auf Papier handelt. Das Polarplanimeter ist eines unter vielen Planimetern. Es ist ein heutzutage eher unbekanntes, rein mechanisches Flächenmessgerät, das Flächen beliebiger Formen messen kann.

Ich habe mich mit der Thematik des Polarplanimeters beschäftigt, weil mich die Eleganz von dessen Funktionsprinzip fasziniert. Hinter einer sehr einfachen Anwendung verbirgt sich eine beträchtliche Theoriemenge, worauf in dieser Arbeit eingegangen wird. Überdies finde ich an diesem Thema auch den regionalen Bezug reizvoll. Das Polarplanimeter wurde nämlich von Jakob Amsler-Laffon in Schaffhausen erfunden.

An dieser Stelle ist festzuhalten, dass diese Arbeit nur auf das Polarplanimeter genauer eingeht, obwohl die Behandlung vieler anderer Planimeter ebenfalls spannend wäre.

Hauptziel dieser Arbeit ist, dass ein Leser ein Polarplanimeter anzuwenden lernt, das Funktionsprinzip mathematisch nachvollziehen kann und den Aufbau begreift.

Die folgende Arbeit nähert sich der Thematik theoretisch, indem zuerst der Gebrauch des Geräts erläutert wird und einige Begrifflichkeiten eingeführt werden. Dann wird das Funktionsprinzip auf zwei Arten nachvollzogen. Einerseits mittels einer geometrischen Erklärung, wobei Vieles mit Bildern intuitiv klargemacht wird und andererseits mittels eines mathematischen Beweises. Danach kommt ein kurzes Kapitel, das sich der isoperimetrischen Ungleichung der Ebene widmet. In einem nächsten, praktischen Teil wird der genaue Aufbau des Geräts gezeigt. Dies geschieht anhand der Dokumentation eines selbst konstruierten Polarplanimeters.

1.2 Historischer Kontext der Erfindung des Polarplanimeters

In Europa war die Nachfrage für mechanische Flächenmessgeräte erstmals zu Beginn des 19. Jahrhunderts von Bedeutung. Vor allem aus zwei Bereichen kam das Bedürfnis: Im Vermessungswesen wollte man Flächen auf Karten, und in der experimentellen Physik Flächen in Diagrammen bestimmen. Solange es noch keine Messgeräte gab, konnte man nur die Inhalte regelmässiger Flächen mit Hilfe geometrischer Formeln berechnen. Wollte man den Inhalt einer unregelmässigen Fläche bestimmen, war man gezwungen, die gesuchte Fläche in kleine, berechenbare Stücke zu zerteilen. Dies war ein insgesamt mühseliges und ungenaues Verfahren. Die Erfindungen der ersten Planimeter um 1830 trafen aber nicht auf den erwarteten Erfolg, denn sie waren allesamt umständlich oder kompliziert zu bedienen. Erst das 1854 von Jakob Amsler-Laffon erfundene Polarplanimeter konnte eine breite Kundschaft überzeugen. Das Polarplanimeter war preiswert, klein und praktisch, einfach zu bedienen und lieferte zuverlässig genaue Messungen ohne grossen Aufwand. Ausserdem blieb dem Nutzer umständliches Umrechnen der Einheiten erspart, indem das Polarplanimeter für verschiedene Kartenmassstäbe speziell eingestellt werden konnte. Im Laufe des 20. Jahrhunderts wurden die mechanischen Flächenmessgeräte weitestgehend durch digitale Alternativen ersetzt, weshalb auch das Polarplanimeter zunehmend an Bekanntheit verliert. Nichtsdestotrotz lohnt sich die Auseinandersetzung mit diesem Gerät aus mathematischer Sicht, denn die Funktionsweise ist verblüffend einfach. (vgl. Amsler und Erisman 1993 und Dubois 1944, S.34)

Über den Erfinder

Amsler-Laffon wuchs im Kanton Aargau in einer Familie der Mittelschicht auf, sein Studium in Mathematik und Physik absolvierte er in Königsberg. 1848 kehrte er in die Schweiz zurück und arbeitete an verschiedenen Universitäten, zuletzt als Privatdozent in Zürich. Aufgrund des bescheidenen Lohns war er gezwungen, eine Stelle als Mathematik- und Physiklehrer am Gymnasium in Schaffhausen anzunehmen. Er unterrichtete sieben Jahre lang und soll einen eigenmächtigen Umgang mit dem Lehrplan gehabt haben. Weil es damals noch keine geeigneten Bahnverbindungen nach Schaffhausen gab und weil er die Schaffhauserin Elise Laffon heiratete, liess er sich in Schaffhausen nieder. 1854 erfand Amsler-Laffon das Polarplanimeter, 1856 schrieb er eine Abhandlung darüber, in der er angibt, selbst von der Einfachheit der Problemlösung überrascht zu sein. Seine Tätigkeit als Kantonsschullehrer gab Amsler-Laffon 1858 auf, weil er als Firmenleiter, Familienmann und zeitweise als Politiker zu beschäftigt war. Seine durch Auszeichnungen und ökonomischen Erfolg geprägte Karriere wurde nur durch eine Sehschwäche und Schwerhörigkeit getrübt. (vgl. Amsler und Erisman 1993, S.34)



Abbildung 1: Jakob Amsler-Laffon, 1823 bis 1912

Firmengeschichte

Die Erfindung des Polarplanimeters 1854 veranlasste Jakob Amsler-Laffon dazu, in seinem damaligen Haus in der Vorstadt eine Werkstatt einzurichten. Schon bald reichte der Platz für seine Mitarbeiter nicht mehr aus, sodass er seine Unternehmung umsiedeln musste. Wegen des steten Wachstums wechselte die Firma ihren Standort innerhalb von Schaffhausen mehrere Male. Zuletzt stand sie ab 1911 im Ebnat, dem damals neuen Industrieviertel.

Der Erfolg der Unternehmung, die inzwischen neben verschiedensten Planimetern allerlei andere Messgeräte herstellte, z.B. Druck-, Gefäll- und Strömungsmesser, zeichnete sich aber nicht nur im ökonomischen Wachstum ab, sondern auch dadurch, dass die Firma während des Ersten Weltkriegs, der Weltwirtschaftskrise und des Zweiten Weltkriegs bestehen konnte ohne grösseren Schaden davonzutragen. Die Firma blieb über vier Generationen hinweg im Familienbesitz, bis sie 1970 von der Georg Fischer AG aufgekauft und weiterverkauft wurde an die Firma Wolpert in Ludwigshafen. Die Georg Fischer AG behielt jedoch das Grundstück und steht bis heute an der Amsler-Laffon-Strasse. (vgl. Amsler und Erisman 1993, S.34)

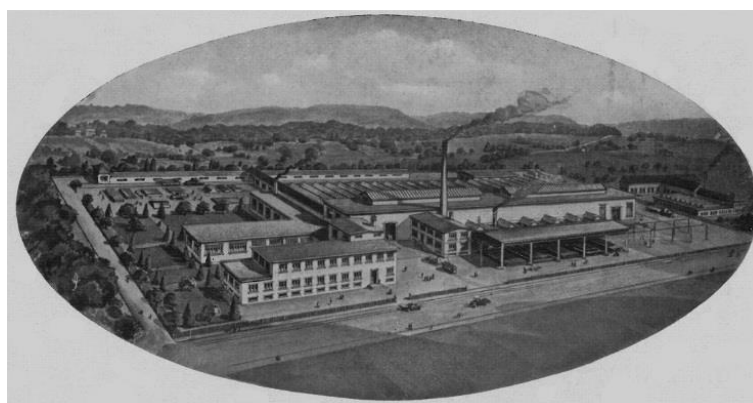


Abbildung 2: letztes und grösstes Fabrikgebäude im Ebnat von 1911 bis 1970

2. Grundwissen über das Polarplanimeter

In diesem Kapitel wird gezeigt, wie das Polarplanimeter aufgebaut ist und wie es verwendet wird. Im Hinblick auf die theoretischen Betrachtungen, die in Kapitel 3 und 4 folgen, wird das Polarplanimeter schematisiert, indem die Relevanz der einzelnen Bestandteile aufgezeigt wird. Beim schematisierten Planimeter werden ausserdem alle physikalischen Einflüsse vernachlässigt, die die Messung stören würden. (vgl. Gebrauchsanleitung, S.34)

2.1 Eigenschaften der Bestandteile

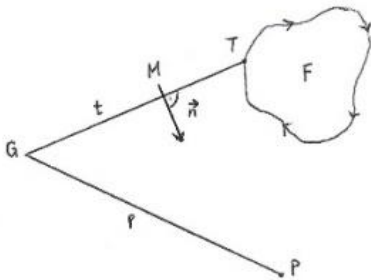


Abbildung 3: schematisiertes Polarplanimeter Abbildung 4: industriell hergestelltes Polarplanimeter
(Aus technischen Gründen befindet sich das Messrad neben dem Tracerarm. Wichtig ist, dass die Radachse parallel zum Tracerarm ist.)

- Pol P : Gewicht, soll sich während Messung nicht bewegen
- Polarm p : gerade Stange
- Tracerarm t : gerade Stange
- Tracer T : Nadelspitze, umfährt die zu ermittelnde Fläche
- Messrad M (mit Nonius zur Ablesemöglichkeit auf Hundertsteinheiten): Rad mit aufgewickeltem Messband, hat eine zum Tracerarm parallele Radachse / Rad kann vorwärts und rückwärts rollen (dann misst es) oder es kann rutschen (dann misst es nicht) / Position des Messrades auf dem Tracerarm ist beliebig, solange sie für eine Messung gleichbleibt / Vektor \vec{n} zeigt die vorwärts-Rollrichtung des Rades an
- Quermessrad (nicht nötig beim schematisierten Polarplanimeter): misst die Anzahl ganzer Umdrehungen des Messrads, möglich dank eines hier nicht sichtbaren Übersetzungsgewindes
- Gelenk G : Schnittpunkt vom Tracerarm und Polarm, bewegt sich je nach Bewegung des Tracers stets auf einer Kreisbahn um den Pol mit Radius p
- Fläche F : Gebiet, das vom Tracer umfahren wird, um deren Inhalt zu ermitteln

2.2 Ergänzendes Grundwissen

- Alle oben nicht beschriebenen Bestandteile dienen zur Stabilisierung des Geräts und sind für das Verständnis des Funktionsprinzips irrelevant.
- Nur der Pol, das Messrad und der Fahrstift berühren die Unterlage.
- Das Polarplanimeter kann auf zwei Arten angeordnet werden. So, dass es die Fläche im oder gegen den Uhrzeigersinn umfährt. Wenn das Polarplanimeter die Fläche im Gegenuhrzeigersinn umfährt, sollte der Vektor \vec{n} stets dorthin zeigen, wo der Winkel $\sphericalangle PGT$ kleiner ist, also in Richtung des Pols. Das Analoge gilt für die Anordnung bei der Umfahrung im Uhrzeigersinn.

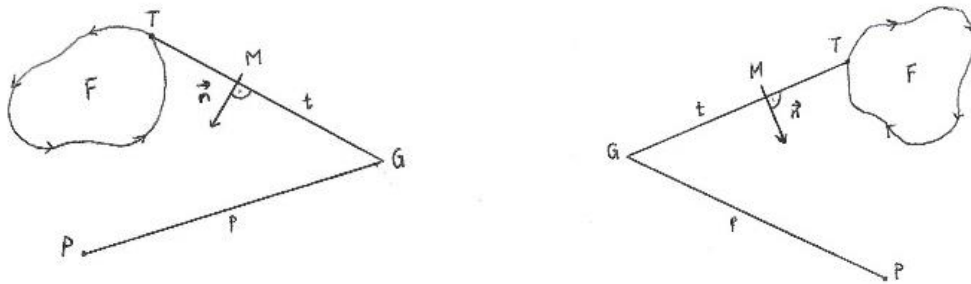


Abbildung 5: schematisierte Polarplanimeter auf zwei Arten angeordnet

Mit anderen Worten: Während der Umfahrung einer Fläche darf das Gelenk niemals überstreckt werden, d.h. p und t sollten niemals auf einer Geraden liegen, da dann die Gefahr besteht, dass das Polarplanimeter seine Anordnung wechselt. Für das Funktionsprinzip ist aber essenziell, dass das Polarplanimeter für eine Messung dieselbe Anfangs- wie Endlage hat.

2.3 Messschema

Um einen Flächeninhalt messen zu können, wird der Pol ausserhalb des zu messenden Gebiets platziert. Den Tracer legt man auf einen beliebigen Punkt des Flächenrandes. Es ist darauf zu achten, dass zu Beginn der Messung die beiden Arme so positioniert werden, dass während der Umfahrung das Gelenk keinesfalls überstreckt. Nun fährt man mit dem Tracer dem Rand des Gebietes entlang, bis man wieder den Startpunkt erreicht. Der Flächeninhalt ist das Produkt aus dem erhaltenen Messwert und einer Proportionalitätskonstanten.



Abbildung 6: industriell hergestelltes Polarplanimeter, für eine Umfahrung im Uhrzeigersinn um den Bodensee angeordnet

3. Geometrische Erklärung des Funktionsprinzips

In diesem Kapitel wird auf geometrischem Wege erläutert, weshalb das Ergebnis einer Messung proportional zur umfahrenen Fläche ist. Dafür ist wichtig zu verstehen, wie sich das Messrad während der Umfahrung verhält und was es genau aufzeichnet. Allerdings stellt diese Erklärung keinen strengen Beweis dar, da sie sich a.a.O. auch auf die Intuition stützt.

N.B.: Für dieses Kapitel wird das im vorherigen Kapitel beschriebene, schematisierte Polarplanimeter betrachtet. Die im vorherigen Kapitel eingeführten Begriffe und Abkürzungen werden daher wieder aufgegriffen und erweitert. (vgl. Gollnick 2015, S.34)

3.1 Begriffe und deren Abkürzungen

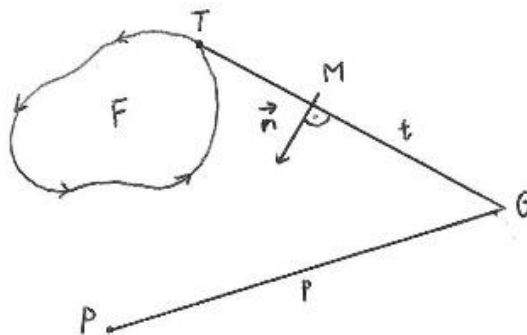


Abbildung 7: schematisiertes Polarplanimeter für eine Umfahrung im Gegenuhrzeigersinn angeordnet

Definitionen gemäss Abbildung: P =Pol, p =Länge des Polarms, G =Gelenk, T =Tracer, t =Länge des Tracerarms, M =Messrad mit zum Tracerarm paralleler Radachse und beliebiger (während einer Messung konstanten) Position, \vec{n} =normierter Vektor senkrecht auf Tracerarm resp. zur Radachse / zeigt in die positive Rollrichtung des Messrades, F =Inhalt der zu ermittelnden Fläche

Definition Messwert: Δm = vorzeichenbehaftete Messung des Messrades für eine einzelne Bewegung, m = vorzeichenbehaftete Messung des Messrades für eine ganze Umfahrung, d.h. $m = \Delta m_1 + \Delta m_2 + \dots + \Delta m_n$

3.2 Allgemeine Betrachtung des Messrads

Das Messrad ist der einzige Bestandteil, der während einer Umfahrung etwas aufzeichnet. Daher ist herauszufinden, wie der Messwert m mit dem Flächeninhalt F zusammenhängt. Wie oben beschrieben, ist jeder Messwert vorzeichenbehaftet. Das Vorzeichen hängt von der Rollrichtung des Messrades ab. Die positive Messrichtung bzw. das Vorwärtsrollen wird durch den normierten Vektor \vec{n} angezeigt. Weil die Radachse des Messrads parallel zum Tracerarm ist, misst das Messrad nur diejenigen Bewegungsanteile des Tracerarms, die senkrecht zum Tracerarm sind. Während Bewegungen entlang der Radachse bzw. des Tracerarms misst das Messrad nichts. Diese Tatsache wirkt sich bei den beiden einzigen Bewegungsarten des Tracerarms, Translation und Rotation, folgendermassen aus.

Definition Translation: Parallele Bewegungen des Tracerarms, wobei sich der Tracer und das Gelenk auf zueinander parallelen Kreisbogen bewegen, denn das Gelenk wird vom Polarm auf einer Kreisbahn mit Radius p gehalten.

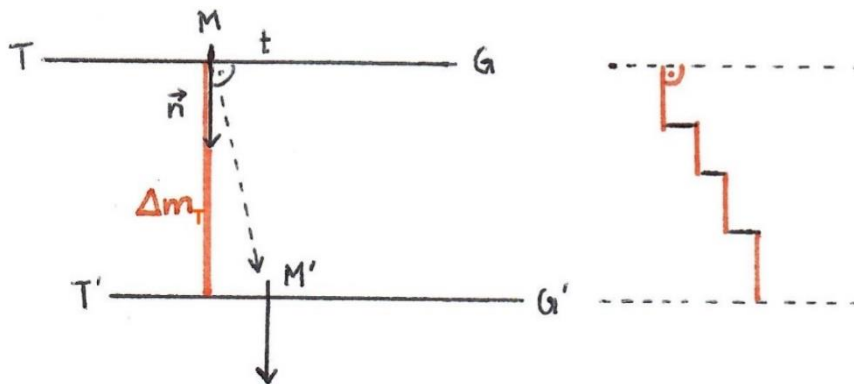


Abbildung 8: Von den Bewegungen, die nicht in die Richtung des Vektors \vec{n} sind, wird nur der Bewegungsanteil gemessen, der in die Richtung des Vektors \vec{n} geht (orange). Der Bewegungsanteil entlang der Radachse wird nicht aufgezeichnet (schwarz). In diesem Beispiel ist Δm positiv. Würde sich der Tracerarm nach oben bewegen wäre Δm negativ.

Definition Rotation: Nicht parallele Bewegungen des Tracerarms, wobei das Gelenk an Ort bleibt.

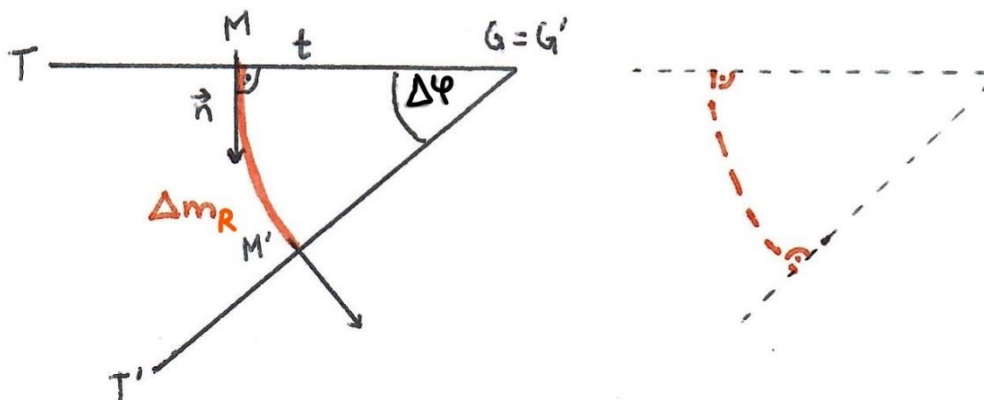


Abbildung 9: Wenn M sich auf einem Kreisbogen bewegt, entspricht Δm genau der Länge des Kreisbogens. Die Länge dieses Kreisbogens hängt vom Winkel $\Delta\varphi$ und dem Abstand \overline{GM} resp. der Position von M ab.

Sämtliche Bewegungen des Polarplanimeters lassen sich beliebig genau approximieren durch das Aneinanderreihen dieser beiden Grundbewegungen. Auf diese Weise kann das Polarplanimeter jeder beliebigen Kurve entlangfahren. Wie sich die Bewegung des Tracerarms während einer ganzen Umfahrung aus vielen winzigen Translationen und Rotationen zusammensetzt, illustriert Abbildung 10 für einen vergrößerten Kurvenabschnitt.

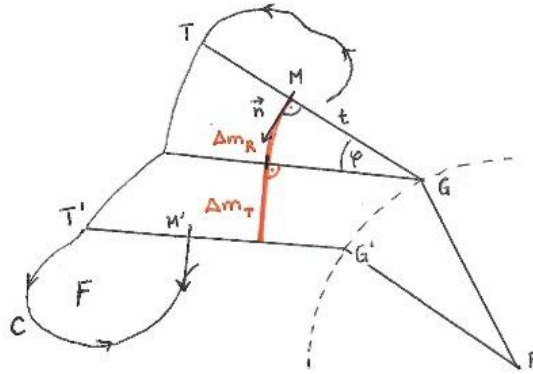


Abbildung 10: Die Bewegung des Tracerarms setzt sich aus unendlich vielen winzigen Translationen und Rotationen zusammen.

3.3 Tracerarmfläche

Definition der Tracerarmfläche: Die Fläche ΔA , die vom Tracerarm bei einer Bewegung überstrichen wird. Die Fläche hat ein positives oder negatives Vorzeichen, je nach dem, ob das Messrad während einer Bewegung vorwärts bzw. positiv oder rückwärts bzw. negativ rollt.

Für die beiden eingeführten Bewegungsarten des Tracerarms sehen die Tracerarmflächen folgendermaßen aus:

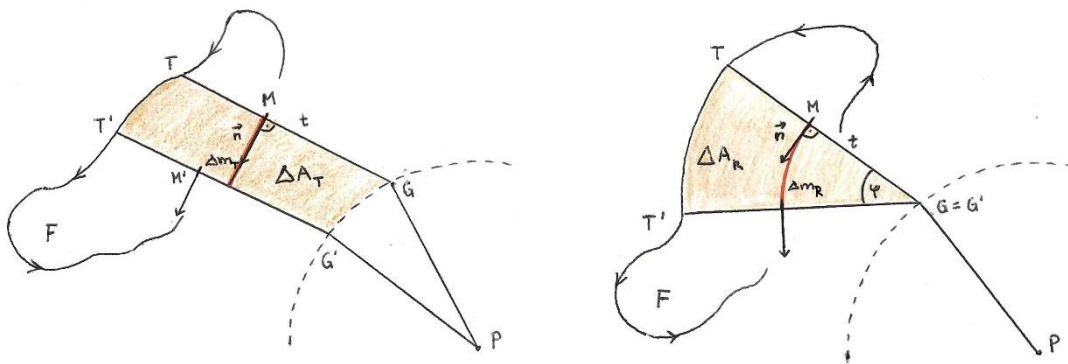


Abbildung 11, links: Bei einer winzigen Translation wird als Tracerarmfläche ΔA_T ein Parallelogramm überstrichen. In diesem Beispiel ist die Tracerarmfläche positiv.

Abbildung 11, rechts: Bei einer winzigen Rotation wird als Tracerarmfläche ΔA_R ein Kreissektor überstrichen. In diesem Beispiel ist die Tracerarmfläche positiv.

Die beiden Bewegungsarten treten für eine ganze Messung typischerweise gemischt auf, d.h. der Tracer bewegt sich immer winzige Kurvenstücke vorwärts, und der Tracerarm folgt diesen Bewegungen mit winzigen Translationen und Rotationen. Abbildung 12 zeigt, wie die Tracerarmfläche für eine solche gemischte Bewegung aussieht. Dieses Beispiel soll das Verständnis für das hierauf folgende Unterkapitel erleichtern. Man beachte, dass in solch einem Beispiel die rechts dargestellte, direkte Bewegung von T nach T'' nicht möglich ist, in der Summe die Tracerarmflächen aber so aussehen.

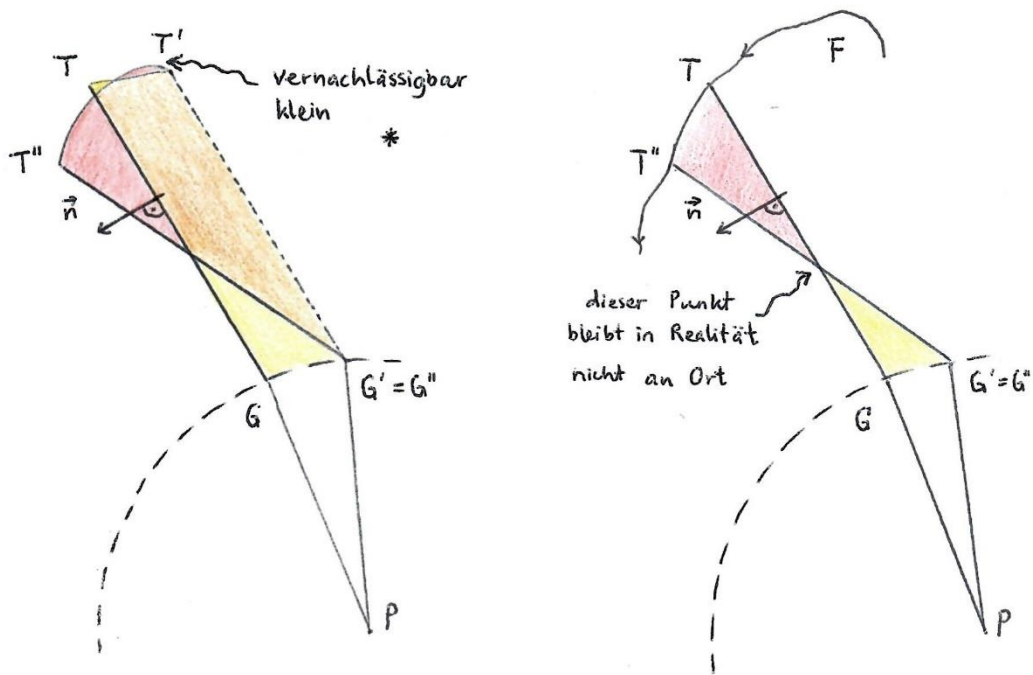


Abbildung 12: Gibt es zuerst eine winzige Translation von T nach T' , dann eine Rotation von T' nach T'' , entstehen ungefähr* zwei Tracerarmflächen unterschiedlichen Vorzeichens, die durch den (in der Praxis nichtexistierenden) Schnittpunkt getrennt sind. Die negative Tracerarmfläche ist gelb, die positive rot dargestellt. Orange ist es dort, wo die Fläche einmal negativ und einmal positiv überstrichen wird. (*Mit dem Asterisk sind nur die beiden kleinen Abschnitte von der Translations- und Rotations-Tracerarmfläche gemeint, die ungefähr gleich gross sind und sich deswegen gegenseitig aufheben.)

3.4 Flächendifferenz

Betrachtet man alle Tracerarmflächen A während der ganzen Umfahrung einer Fläche F , stellt man **intuitiv** fest, dass sich alle positiven Tracerarmflächen A^+ (rot) von allen negativen Tracerarmflächen A^- (gelb) genau um die Fläche F unterscheiden. Die Fläche F entspricht der Differenz der Beträge aller positiven und aller negativen Tracerarmflächen. Weil das Messrad bereits eine positive und negative Rollrichtung hat, d.h. A^- «automatisch» ein negatives Vorzeichen hat, können alle Tracerarmflächen addiert werden: $F = |A^+| - |A^-| = A^+ + A^-$

In der folgenden Abbildung 13 ergibt sich für F ein positiver Wert, denn bei dieser Anordnung des Polarplanimeters (Vektor \vec{n} zeigt zum Pol und Umfahrung im Gegenuhrzeigersinn) ist A^+ grösser als A^- . Bei umgekehrter Anordnung oder der Umfahrung im Uhrzeigersinn wäre A^- grösser als A^+ und somit F negativ.

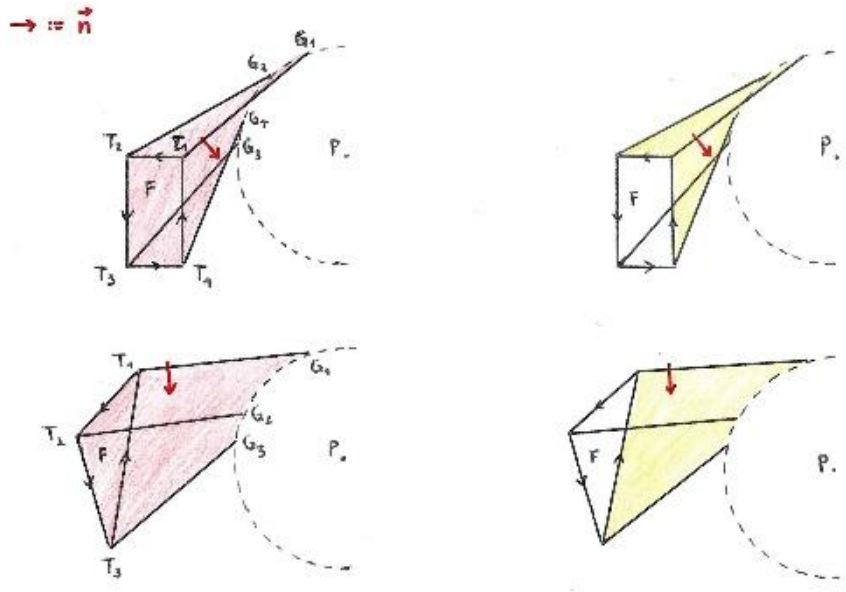


Abbildung 13, oben: von T_1 nach T_2 werden negative Tracerarmflächen überfahren (rechts eingezeichnet), von T_2 nach T_3 werden positive Tracerarmflächen überfahren (links eingezeichnet), von T_3 nach T_4 werden positive Tracerarmflächen überfahren (links eingezeichnet), von T_4 nach T_1 werden wieder negative Tracerarmflächen überfahren (rechts eingezeichnet), wobei die Bewegung von einer Ecke zur nächsten im Normalfall aus Translation und Rotation zusammengesetzt ist (siehe Abbildung 12)

Abbildung 13, unten: Beispiel mit Dreieck als Fläche

3.5 Berechnung der Tracerarmflächen für eine ganze Umfahrung der Fläche F

Die Gesamtheit aller durch Translation entstandenen Tracerarmflächen, d.h. die Summe aller positiven und negativen Anteile, kann folgendermassen berechnet werden:

$$A_T = \Delta m_{T_1} \cdot t + \Delta m_{T_2} \cdot t + \dots + \Delta m_{T_n} \cdot t = m_T \cdot t$$

Die Gesamtheit aller durch Rotation entstandenen Tracerarmfläche, d.h. die Summe aller positiven und negativen Anteile, kann folgendermassen berechnet werden:

$$A_R = \frac{1}{2} \Delta \varphi_1 t^2 + \frac{1}{2} \Delta \varphi_2 t^2 + \dots + \frac{1}{2} \Delta \varphi_n t^2 = \frac{1}{2} \cdot \varphi \cdot t^2$$

Dabei ist der Messwert aller Rotationen $m_R = \overline{GM} \cdot \Delta \varphi_1 + \overline{GM} \cdot \Delta \varphi_2 + \dots + \overline{GM} \cdot \Delta \varphi_n = \overline{GM} \cdot \varphi$.

Weil sich das Polarplanimeter am Ende einer Messung genau in derselben Stellung befindet wie am Anfang der Messung, nivellieren sich alle durch Rotation entstandenen Tracerarmflächen aus.

$$A_R = \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot t^2 = 0$$

Schlussfolgerung

Die Fläche F ist proportional zum Messwert m , wobei die Proportionalitätskonstante genau der Länge t des Tracerarms entspricht. Am Ende einer Umfahrung genügt es also, den Messwert mit der Länge des Tracerarms zu multiplizieren, um den Flächeninhalt zu bestimmen.

$$F = A_T + A_R = A_T = m \cdot t$$

Damit ist bewiesen, dass die Position des Messrades für eine Umfahrung beliebig ist; die Position des Messrades ist nämlich nur für die Berechnung der Rotations-Tracerarmflächen relevant.

4. Mathematischer Beweis des Funktionsprinzips

In diesem Kapitel wird mit Methoden der Integralrechnung gezeigt, dass der Messwert proportional ist zum Flächeninhalt. Die Beweisführung basiert auf bestimmten mathematischen Konzepten, die im Folgenden kurz erläutert, aber nicht hergeleitet werden. Wie in der geometrischen Erklärung wird auch hier ein schematisiertes, für eine Umfahrung im Gegenuhrzeigersinn angeordnetes Polarplanimeter betrachtet. Ebenso gelten weiterhin dieselben Begriffe und Abkürzungen, aber es kommen auch zwei neue dazu. (vgl. Gollnick 2015 und Stotz 2021, S.34)

4.1 Übersicht des Beweises

Behauptung

Der Flächeninhalt F und die Messung m des Messrades sind proportional zueinander. Den Zusammenhang zeigt die Formel $F = m \cdot t$.

Voraussetzungen

1. Satz von Green: $\int_C \vec{n} \circ d\vec{c} = \iint_F \left(\frac{\partial n_y}{\partial x} - \frac{\partial n_x}{\partial y} \right) dx dy$ (siehe Kapitel 4.3)
2. Der Beweis gilt nur für das Arbeitsgebiet F_{max} des Polarplanimeters.

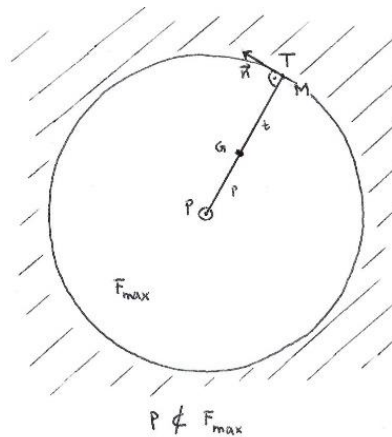


Abbildung 14: Arbeitsgebiet des Polarplanimeters

3. Die Position des Messrads auf dem Tracerarm ist beliebig. Für diesen Beweis soll das Messrad beim Tracerarm liegen.
4. Während einer Messung darf das Gelenk niemals überstreckt werden.

Beweis

Betrachtet sei nun das schematisierte Polarplanimeter in einem Koordinatensystem, wobei der Pol im Ursprung liegen soll. Der Tracer hat die Koordinaten $(x|y)$, das Gelenk die davon abhängenden Koordinaten $(a(x, y)|b(x, y))$. Man mache sich bewusst, dass diese Zuordnung eindeutig ist, da das Gelenk

niemals überstreckt werden darf. Für eine bessere Übersichtlichkeit wird von nun an nur a und b geschrieben.

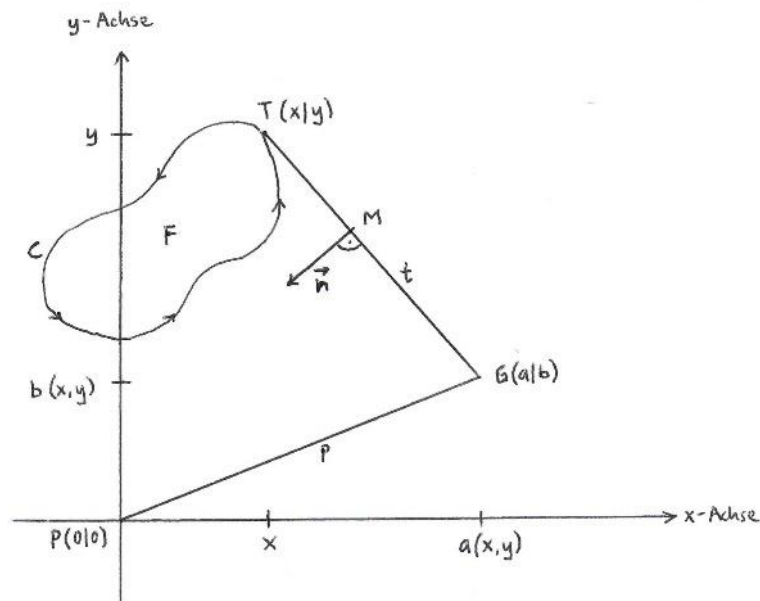


Abbildung 15: Vorstellung des Polarplanimeters

Für den ganzen folgenden Beweis dient diese Vorstellung des Polarplanimeters. Und um nun den Messwert berechnen zu können, müssen nur noch die parametrisierte Kurve c und das Vektorfeld \vec{n} des Polarplanimeters erfasst werden.

4.2 Parametrisierte Kurven und Vektorfelder

Die parametrisierte Kurve und Vektorfelder werden im Folgenden kurz allgemein und möglichst anschaulich erklärt, der Fokus liegt aber bei der Anwendung auf das Polarplanimeter.

4.2.1 Parametrisierte Kurven

Allgemeine parametrisierte Kurven

Definition der parametrisierten Kurve: Eine differenzierbare Funktion, die zu jedem Zeitpunkt t eines Zeitintervalls $[t_1; t_2]$ eine x - und eine y -Koordinate besitzt. Die Koordinaten eines Kurvenpunktes können auch als Vektor, der vom Ursprung zum Kurvenpunkt geht, aufgefasst werden (siehe gestrichelte Pfeile in Abbildung 16).

Schreibweise: $c(t) = (c_x(t) | c_y(t)) = x | y$

Anschauliche Bedeutung: Einer Kurve C wird in einer vorgegebenen Zeitspanne entlanggegangen.

Beispiel für eine parametrisierte Kurve: $c_1(t) = (3t, 4t)$, wobei $t_1 = 0$ und $t_2 = 1$, entspricht einer Geraden von $(0|0)$ zu $(3|4)$.

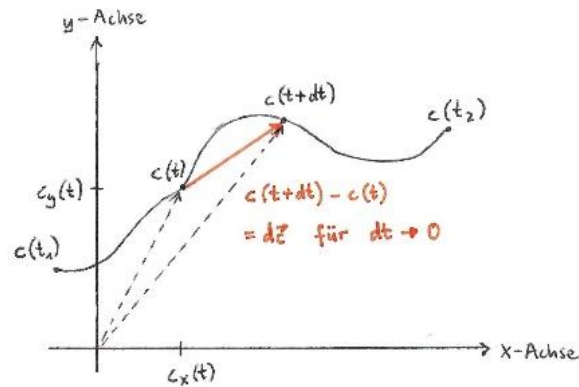


Abbildung 16: eine beliebige parametrisierte Kurve

Weitere Eigenschaften von parametrisierten Kurven

- Ist $c(t_1) = c(t_2)$, so ist die Kurve geschlossen.
- $\vec{c}'(t) = (c'_x(t), c'_y(t))$:= Die erste Ableitung ist der Vektor, der tangential zur Kurve beim Kurvenpunkt $c(t)$ ist. Bsp.: $\vec{c}'_1(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$
- $|\vec{c}'(t)| = \sqrt{c'_x(t)^2 + c'_y(t)^2}$:= Der Betrag der ersten Ableitung gibt die momentane Geschwindigkeit des Kurvenpunkts $c(t)$ wieder. Bsp.: $|\vec{c}'_1(t)| = 5$
- $d\vec{c} = \vec{c}'(t) \cdot dt = c(t + dt) - c(t)$:= infinitesimales, vektoriell Kurvenelement (siehe oranger Vektor in Abbildung 16)
- $|d\vec{c}| = |\vec{c}'(t)| \cdot dt$:= Länge eines infinitesimalen vektoriellen Kurvenelements
- $\int_C |d\vec{c}|$:= Länge der ganzen Kurve, zusammengesetzt aus vielen winzigen, berechenbaren Sekanten
- $\int_C f(x, y) |d\vec{c}| = \int_{t_1}^{t_2} f(c(t)) \cdot |\vec{c}'(t)| dt$:= Eine Funktion über der Kurve integrieren. Hierbei werden alle Funktionswerte für die in der Kurve enthaltenen $(x, y) = c(t)$ zusammengezählt. Bsp.: Für $f_1(x, y) = x + y$ und c_1 ist $\int_{t_1}^{t_2} (3t + 4t) \cdot 5 \cdot dt = \frac{35}{2}$, was leicht überprüft werden kann, da es sich um die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks handelt mit den Kathetenlängen 5 und 7.

Anschauliche Bedeutung: Es werden alle Funktionswerte von $f(x, y)$ zusammengezählt, die sich oberhalb bzw. unterhalb der parametrisierten Kurve befinden. Man berechnet quasi den Flächeninhalt einer senkrecht auf C stehenden Wand.

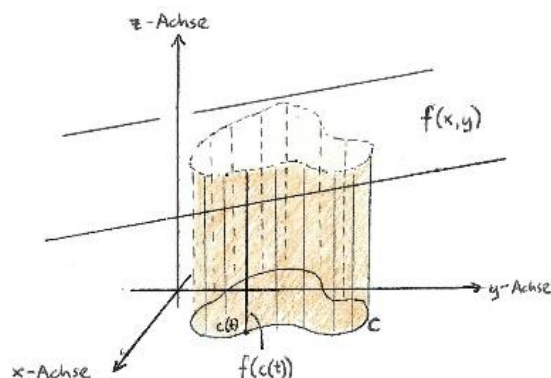


Abbildung 17: beliebiges Bild für die Integration einer Funktion über einer parametrisierten Kurve

Angewandt auf das Polarplanimeter

C ist die Kurve, die vom Tracer umfahren wird. Für das Polarplanimeter ist C also stets eine geschlossene, parametrisierte Kurve. Für diesen Beweis reicht es aus, zu wissen, dass es sich um eine beliebige parametrisierte Kurve handelt, damit man mit ihr rechnen kann. Die genaue Funktion von C braucht man allerdings nicht zu kennen.

4.2.2 Vektorfelder

Allgemeine Vektorfelder

Definition: Eine stetige Funktion, die jedem Punkt einer Grundmenge, hier \mathbb{R}^2 , einen Vektor zuordnet.

Schreibweise: $\vec{n}(x, y) = \begin{pmatrix} n_x(x, y) \\ n_y(x, y) \end{pmatrix}$

Anschauliche Bedeutung: Man stellt sich ein x - y -Koordinatensystem vor, das mit einer dünnen Schicht Wasser bedeckt ist. Das Vektorfeld gibt für jeden Punkt dieses Koordinatensystems die Strömungsrichtung und -grösse an, die das Wasser am jeweiligen Punkt hat.

Beispiel: $\vec{n}_1(x, y) = \begin{pmatrix} 3y \\ x^2 \end{pmatrix}$ hat bei (1|2) den Vektor $\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

Angewandt auf das Polarplanimeter

$\vec{n}(x, y)$ ist das vom Polarplanimeter erzeugte, stetige Vektorfeld. Es gibt für jede mögliche Lage des Polarplanimeters, ausgedrückt mit x und y , die positive Rollrichtung des Messrades an. Denn \vec{n} ist der senkrecht auf dem Tracerarm stehende und normierte Vektor, der jeweils beim Tracer ist.

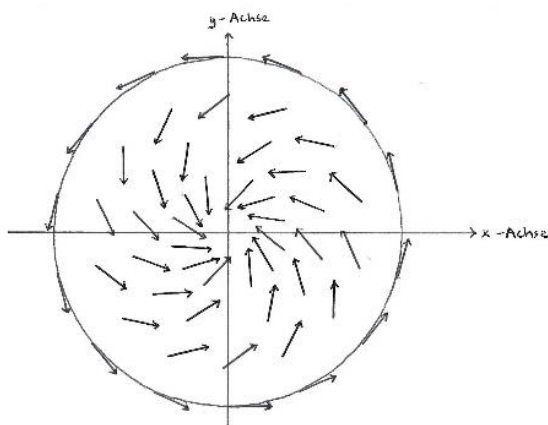


Abbildung 18: Vektorfeld des Polarplanimeters

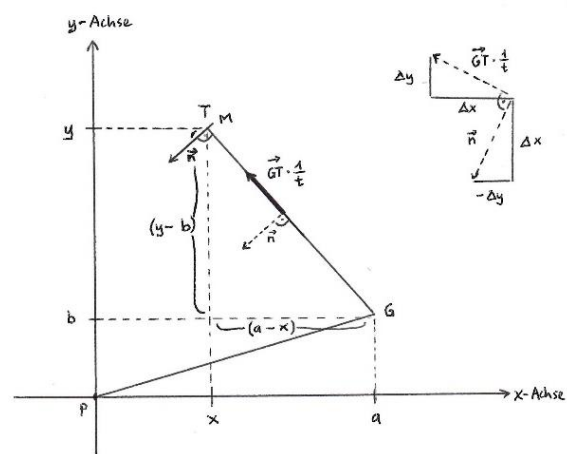


Abbildung 19: schematisiertes Polarplanimeter mit Erklärungen zur Bestimmung des Vektorfeldes

Konkret lautet die Funktion $\vec{n}(x, y) = \frac{1}{t} \cdot \begin{pmatrix} -(y-b) \\ -(a-x) \end{pmatrix} = \frac{1}{t} \cdot \begin{pmatrix} b-y \\ x-a \end{pmatrix}$. Dies kann mit dem Vektor $\vec{GT} = \begin{pmatrix} -(a-x) \\ y-b \end{pmatrix}$ hergeleitet werden. Denn der Vektor \vec{GT} auf dem Tracerarm ist senkrecht zu \vec{n} , und ist anhand der Abbildung zu beschreiben. Die Normierung von \vec{GT} erhält man mit der Division durch t , denn $|\vec{GT}| = t$. Infolgedessen erhält man die Normierung von \vec{n} auch mit der Division durch t .

4.3 Berechnung des Messwerts mit dem Satz von Green

Die Idee ist nun, den Messwert für eine ganze Umfahrung zu berechnen, indem man das Vektorfeld $\vec{n}(x, y) = \begin{pmatrix} n_x(x, y) \\ n_y(x, y) \end{pmatrix}$ entlang der parametrisierten Kurve C integriert, d.h. $\int_C \vec{n} \circ d\vec{c} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{n}(c(t)) \circ \vec{c}'(t) \cdot dt$. Bei einer solchen Integration wird an jedem Kurvenpunkt das Skalarprodukt aus dem jeweiligen Vektor des Vektorfeldes und dem jeweiligen infinitesimalen, vektoriellen Kurvenelement gebildet. Mit diesem Skalarprodukt $\vec{n} \circ d\vec{c}$ berechnet sich der Bewegungsanteil von dem vektoriellen Kurvenelement $d\vec{c}$, der in Richtung von \vec{n} zeigt. Im Falle des Polarplanimeters entspricht dann die Summe all dieser Skalarprodukte genau dem Messwert. Das Messrad zeichnet während einer Umfahrung nämlich nur diejenigen Bewegungsanteile auf, die in Richtung von \vec{n} zeigen, also senkrecht auf dem Tracerarm stehen.

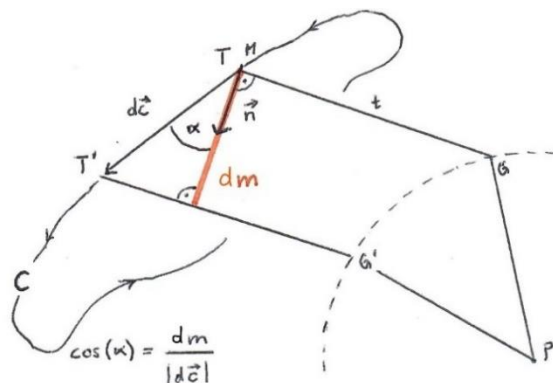


Abbildung 20: Berechnung des Messwerts für einen winzigen Kurvenabschnitt. Da dm dem Anteil von $d\vec{c}$ entspricht, der in Richtung von \vec{n} zeigt und weil $|\vec{n}| = 1$, berechnet sich der Messwert so:

$$dm = \vec{n} \circ d\vec{c} = |\vec{n}| \cdot |d\vec{c}| \cdot \cos(\alpha) \rightarrow m = \int_C dm = \int_C \vec{n} \circ d\vec{c}$$

Eingesetzt ergibt der Messwert m also dies:

$$m = \int_C \frac{1}{t} \begin{pmatrix} b-y \\ x-a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

Bereits jetzt sieht man der Gleichung an, dass die Behauptung erfüllt wäre, sofern das Integral entlang der Kurve C dem Flächeninhalt F entspricht. Die weitere Vereinfachung dieses Integrals wäre sehr kompliziert, da a und b funktionell von x und y abhängen und die Funktion $c(t)$ nicht bekannt ist. Stattdessen kommt nun der Satz von Green zum Zug, der die Berechnung wesentlich eleganter macht.

Allgemeine Betrachtung des Satzes von Green

Um den Satz von Green nachvollziehen zu können, muss bekannt sein, was man unter der Rotation eines Vektorfeldes versteht. Im folgenden Abschnitt wird nur kurz darauf eingegangen, sodass man eine intuitiv einleuchtende Vorstellung des Satzes bekommt.

Definition der Rotation: Eine Funktion, die angibt, wie stark ein unendlich kleiner Kreis um den Punkt $(x|y)$ durch ein Vektorfeld in Drehung bzw. Rotation versetzt wird.

Schreibweise der Rotation: $\langle \text{rot } \vec{n}(x, y) \rangle := \frac{\partial n_y(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial n_x(x, y)}{\partial y}$

Aussage des Satzes von Green: Die Integration eines differenzierbaren Vektorfeldes entlang einer geschlossenen Kurve ergibt dasselbe wie die Integration der entsprechenden Rotationsfunktion über einer Fläche, die als Rand dieselbe geschlossene Kurve hat.

Schreibweise des Satzes von Green: $\int_C \vec{n} \circ d\vec{c} = \iint_F \left(\frac{\partial n_y}{\partial x} - \frac{\partial n_x}{\partial y} \right) dx dy$

Anschauliche Bedeutung des Satzes von Green:

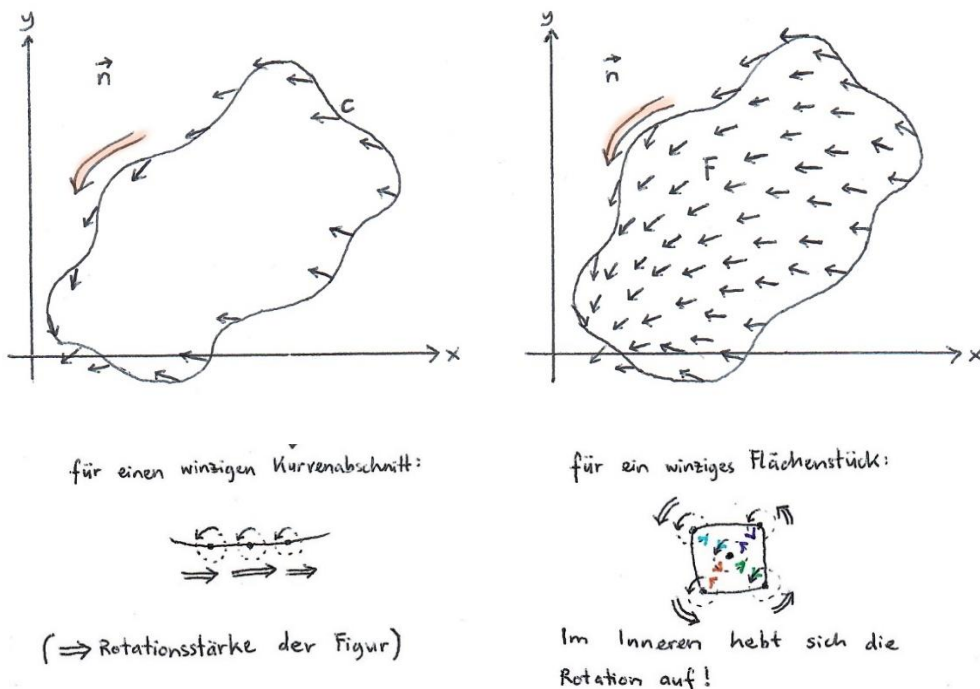


Abbildung 21: bildliche Vorstellung für den Satz von Green

$\int_C \vec{n} \circ d\vec{c}$ ist ein Mass dafür, wie sehr die Kurve durch das Vektorfeld in Rotation versetzt wird. Währenddessen ist $\iint_F \left(\frac{\partial n_y}{\partial x} - \frac{\partial n_x}{\partial y} \right) dx dy$ ein Mass dafür, wie sehr die Fläche mit derselben Form wie die Kurve durch das Vektorfeld in Rotation versetzt wird. Den Satz von Green kann **intuitiv** nachvollziehen, wer sich die Aussage bildlich vorstellt. Man kann sich das Vektorfeld als Wasseroberfläche vorstellen (die einzelnen Vektoren stellen dann einzelne Wasserströmungen dar), und die Rotation als winzige, sich drehende Kreise, die auf der Wasseroberfläche liegen. Wie stark sich ein einzelner solcher Kreis

dreht, hängt von seiner Lage und dem Vektorfeld ab. Der Satz von Green behauptet nun, dass es keine Rolle spielt, ob man auf die Wasseroberfläche eine starre, geschlossene Kurve oder eine starre Fläche derselben Form und Grösse legt. Beide Objekte rotieren gleich stark, da sich alle Rotationsanteile im Inneren der starren Fläche aufheben (schliesslich ist das Vektorfeld stetig) und nur die Rotationsanteile am Rand übrigbleiben.

Angewandt auf den Beweis des Funktionsprinzips

Der Satz von Green kann zur Berechnung des Messwerts m angewandt werden, da $(b - y)$ und $(x - a)$ die beiden Funktionen sind, die das Vektorfeld definieren. D.h. $\vec{n}(x, y) = \frac{1}{t} \cdot \begin{pmatrix} b - y \\ x - a \end{pmatrix}$

Mit dem Satz von Green ergibt der Messwert:

$$m = \frac{1}{t} \cdot \int_C (b - y) \circ \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \frac{1}{t} \cdot \iint_F \left(\frac{\partial(x - a)}{\partial x} - \frac{\partial(b - y)}{\partial y} \right) dx dy$$

Vereinfacht, weil die partielle Ableitung $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$ und das Analoge für y gilt, ergibt dies:

$$m = \frac{1}{t} \cdot \iint_F \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial y} \right) dx dy = \frac{1}{t} \cdot \iint_F 2 - \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} \right) dx dy$$

Dank der letzten Vereinfachung wird klar, dass die Formel $F = m \cdot t$ gültig wäre, sofern $\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} \right) = 1$ ist, denn dann wäre $m = \frac{1}{t} \cdot \iint_F 1 dx dy = \frac{1}{t} \cdot F$. Es gilt $\iint_F 1 dx dy = F$, da die Funktion $f(x, y) = 1$ eine zur x-y-Ebene parallele Ebene auf der Höhe $z = 1$ ist. Die Integration der Funktion $f(x, y) = 1$ entspricht $F \cdot 1 = F$.

4.4 Beweisführung mit Gleichungssystem

Dass $\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} \right) = 1$ ist kann mit Hilfe eines 4x4-Gleichungssystems gezeigt werden. Die vier Gleichungen kommen zustande, indem man die Gleichungen (I) und (II) partiell ableitet. Dass die Gleichungen (I) und (II) stimmen, ist unter Anwendung des Pythagoras in Abbildung 19 ersichtlich.

$$(I) a^2 + b^2 = p^2$$

$$(II) (a - x)^2 + (y - b)^2 = t^2$$

Die Gleichung (I) mit der **Kettenregel** abgeleitet nach x :

$$(I_x) \frac{\partial a^2}{\partial x} + \frac{\partial b^2}{\partial x} = 2a \cdot \frac{\partial a}{\partial x} + 2b \cdot \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial p^2}{\partial x} = 0$$

$$(I_x) a \frac{\partial a}{\partial x} + b \frac{\partial b}{\partial x} = 0$$

Auf analoge Weise wird Gleichung (I) nach y abgeleitet:

$$(I_y) a \frac{\partial a}{\partial y} + b \frac{\partial b}{\partial y} = 0$$

Die Gleichung (II) abgeleitet nach x:

$$(II_x) \left(\frac{\partial a^2}{\partial x} - \frac{\partial 2ax}{\partial x} + \frac{\partial x^2}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial y^2}{\partial x} - \frac{\partial 2yb}{\partial x} + \frac{\partial b^2}{\partial x} \right) = \frac{\partial t^2}{\partial x} = 0$$

Die orange markierte Summe entfällt gemäss (I_x), unter Anwendung der **Produktregel** vereinfacht sich die Gleichung (II_x):

$$(II_x) - 2 \left(x \frac{\partial a}{\partial x} + a \frac{\partial x}{\partial x} \right) + 2x + 0 - 2y \frac{\partial b}{\partial x} = -2 \left(x \frac{\partial a}{\partial x} + a - x + y \frac{\partial b}{\partial x} \right) = 0$$

$$(II_x) x - a = x \frac{\partial a}{\partial x} + y \frac{\partial b}{\partial x}$$

Auf analoge Weise wird Gleichung (II) nach y abgeleitet:

$$(II_y) y - b = x \frac{\partial a}{\partial y} + y \frac{\partial b}{\partial y}$$

Das Gleichungssystem besitzt die vier Gleichungen (I_x), (I_y), (II_x) und (II_y).

Die vier Unbekannten sind $\frac{\partial a}{\partial x}$, $\frac{\partial b}{\partial x}$, $\frac{\partial a}{\partial y}$ und $\frac{\partial b}{\partial y}$. Für den Satz von Green werden $\frac{\partial a}{\partial x}$ und $\frac{\partial b}{\partial y}$ gebraucht, weswegen das Gleichungssystem nach diesen zwei Unbekannten aufgelöst wird.

Lösungsschritte:

- Gleichung (I_x) nach $\frac{\partial a}{\partial x}$ umstellen: $\frac{\partial a}{\partial x} = -\frac{b}{a} \cdot \frac{\partial b}{\partial x}$
- Gleichung (I_y) nach $\frac{\partial a}{\partial y}$ umstellen: $\frac{\partial a}{\partial y} = -\frac{b}{a} \cdot \frac{\partial b}{\partial y}$
- Gleichung (II_x) nach $\frac{\partial b}{\partial x}$ umstellen: $\frac{\partial b}{\partial x} = \left(x - a - x \frac{\partial a}{\partial x} \right) : y$
- Gleichung (II_y) nach $\frac{\partial b}{\partial y}$ umstellen: $\frac{\partial b}{\partial y} = \left(y - b - x \frac{\partial a}{\partial y} \right) : y$
- $\frac{\partial b}{\partial x}$ aus (II_x) wird eingesetzt bei $\frac{\partial a}{\partial x}$ aus (I_x): $\frac{\partial a}{\partial x} = -\frac{b}{a} \cdot \left(x - a - x \frac{\partial a}{\partial x} \right) : y$
 $\frac{\partial a}{\partial x}$ lässt sich vereinfacht darstellen, indem man alle Anteile mit $\frac{\partial a}{\partial x}$ zusammenfasst:

$$\frac{\partial a}{\partial x} = -\frac{b}{ay}x + \frac{b}{ay}a + \frac{b}{ay}x \frac{\partial a}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{b}{ay}x \frac{\partial a}{\partial x} = -\frac{b}{ay}(x - a) \rightarrow$$

$$\frac{\partial a}{\partial x} \cdot \left(1 - \frac{bx}{ay} \right) = -\frac{b(x-a)}{ay} \rightarrow \frac{\partial a}{\partial x} = -\frac{b(x-a)}{ay} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{bx}{ay} \right)} = -\frac{b(x-a)}{ay-bx}$$
- $\frac{\partial a}{\partial y}$ aus (I_y) wird eingesetzt bei $\frac{\partial b}{\partial y}$ aus (II_y): $\frac{\partial b}{\partial y} = \left(y - b - x \left(-\frac{b}{a} \cdot \frac{\partial b}{\partial y} \right) \right) : y$
- Auf analoge Weise lässt sich $\frac{\partial b}{\partial y}$ vereinfacht darstellen: $\frac{\partial b}{\partial y} = \frac{a(y-b)}{ay-bx}$

Schlussfolgerung

Zu guter Letzt ist gezeigt, dass $\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}\right) = 1$ ist, wenn man die mit dem Gleichungssystem gefundenen

Unbekannten einsetzt:

$$\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}\right) = -\frac{b(x-a)}{ay-bx} + \frac{a(y-b)}{ay-bx} = \frac{ay-bx}{ay-bx} = 1$$

Damit ist bewiesen, dass $m = \frac{1}{t} \cdot F$ resp. $F = m \cdot t$ gilt. (Q.E.D.)

5. Isoperimetrische Ungleichung der Ebene

Im Folgenden soll das schematisierte Polarplanimeter dazu verwendet werden, die isoperimetrische Ungleichung der Ebene zu belegen. Die Ungleichung $L^2 \geq 4\pi F$ bedeutet, dass das Quadrat der Länge L , welche die Fläche F umschliesst, immer grösser gleich 4π -mal den Flächeninhalt ist. Nur für die Figur des Kreises tritt die Gleichheit ein, woraus sich erschliesst, dass die Kreisfigur bei gegebenem Umfang den grösstmöglichen Flächeninhalt einschliesst. Damit die Flächenformel des Polarplanimeters die Aussage der isoperimetrischen Ungleichung bestätigt, wird die Flächenmessung leicht abgeändert, sodass sie nicht mehr dem typischen Messschema entspricht:

- Das Polarplanimeter soll während einer Messung eine ganze Umdrehung machen, d.h. es muss von der einen Anordnungsart in die andere wechseln. (siehe Abbildung 22)
- Die Flächenformel muss an den Umstand angepasst werden, dass sich die Messanteile aller Rotationen nicht ausnivellieren, da nun $\varphi = 2\pi$ ist. $F = A_T + A_R = m_T \cdot t + \frac{1}{2}\varphi \cdot t^2$
- Das Messrad soll beim Tracer liegen, sodass $\overline{GM} = t$ ist.

Von der Flächenformel zur isoperimetrischen Ungleichung

Nach dem Einsetzen von $\varphi = 2\pi$ besteht die erste Umformung darin, m_T zu ersetzen. Denn es gilt $m = m_T + m_R = m_T + 2\pi t$, weil der Messanteil aller Rotationen genau dem Kreisumfang mit Radius t entspricht. Nun wird schrittweise vereinfacht und umgeformt:

$$F = (m - 2\pi t) \cdot t + \frac{1}{2}2\pi \cdot t^2$$

$$F = mt - \pi t^2$$

$$-mt + 2F = F - \pi t^2$$

$$-mt + (2mt - 2\pi t^2) = F - \pi t^2$$

$$t \cdot (m - 2\pi t) = F - \pi t^2$$

$$t^2 \cdot (m - 2\pi t)^2 = (F - \pi t^2)^2$$

$$m^2 - 4\pi m t + 4\pi^2 t^2 = (F - \pi t^2)^2 : t^2$$

$$m^2 - 4\pi F = (F - \pi t^2)^2 : t^2$$

Mit Hilfe der folgenden Überlegung wird aus der Gleichung eine Ungleichung: Der Messwert m ist maximal so gross wie die Länge L der Kurve, die die gesuchte Fläche umschliesst. Denn das sich beim Tracer befindende Messrad zeichnet nur die Längen derjenigen Kurvenabschnitte auf, die senkrecht zum Tracerarm sind. Die einzige Kurve, deren Länge folglich komplett gemessen wird, ist ein Kreis mit Radius t , da diese Kreiskurve permanent senkrecht zum Tracerarm ist. Nur in diesem Falle tritt die

Gleichheit ein, weil dann $m = L = 2\pi t$ gilt. Beim Entlangfahren jeder anderen Kurve würde das Messrad auch rutschen, d.h. abschnittsweise L nicht messen. Die Ungleichung lautet:

$$L^2 - 4\pi F \geq (F - \pi t^2)^2 : t^2$$

Damit unterstützt die eben gefundene Ungleichung die Behauptung der echten Ungleichung mehr als genug, da der Term $(F - \pi t^2)^2 : t^2$ grösser gleich 0 ist.

$$L^2 \geq 4\pi F + (F - \pi t^2)^2 : t^2$$

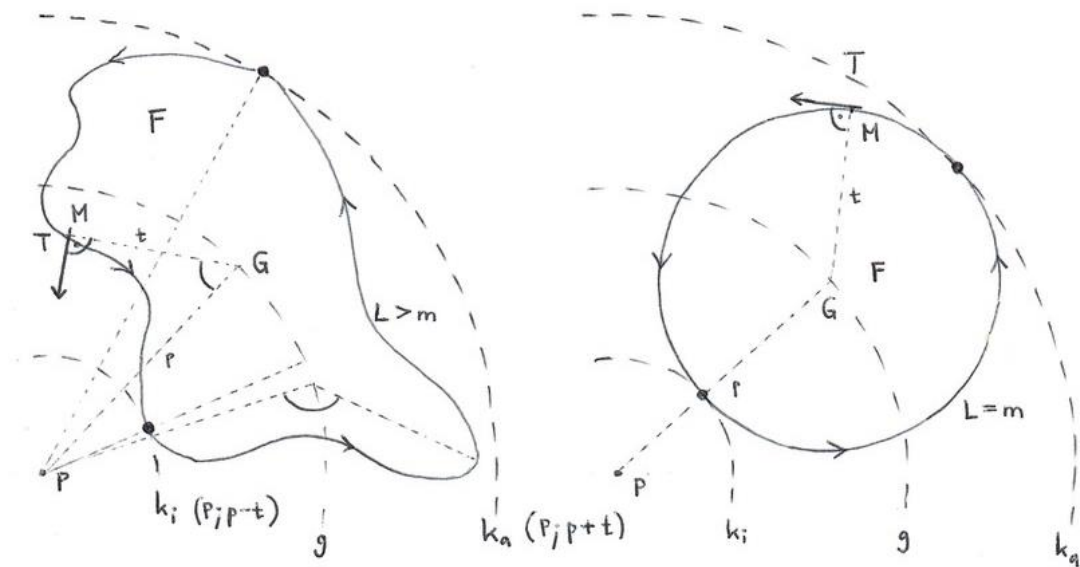


Abbildung 22: Damit $\varphi = 2\pi$ ist, muss sich mindestens ein Punkt des Flächenrandes auf k_i und mindestens ein Punkt des Flächenrandes auf k_a befinden. Links dargestellt eine beliebige Fläche, rechts ein Kreis mit Radius t .

(vgl. Isoperimetrische Ungleichung der Ebene 2021 und Planimeter und Isoperimetrische Ungleichung 2021, S.34)

6. Dokumentation vom Bau eines Polarplanimeters

Für den Bau meines Polarplanimeters habe ich einen «Meccano»-Baukasten verwendet. Die Teile bestehen aus Metall, Plastik und Gummi. Die Teile lassen sich zusammenzubauen, indem man die Schrauben durch die dafür vorgesehenen Löcher steckt und sie von der anderen Seite mit Schraubenmuttern fixiert. Der Vorteil von «Meccano» ist, dass sich fast alle Teile beliebig zusammenbauen lassen und danach auch stabil sind. Der Nachteil ist, dass die Konstruktionen schnell ein hohes Gewicht aufweisen und deswegen stabilisiert werden müssen. Ich habe mich beim Bau an den industriell hergestellten Polarplanimetern, den sogenannten Ott-Polarplanimetern, orientiert. So besteht auch meine Konstruktion aus den drei Teilen Pol, Polarm und Tracerarm, die nun einzeln beschrieben werden. (vgl. Meccano 2021, S.34)

Pol

Als Pol eignet sich ein Rad aus Gummi, weil es auf einer Papierunterlage gut haftet. In das Mittelloch des Felgens wird eine Schraube gesteckt, die später als Auflagepunkt für den Polarm dient. Zwischen Schraubenkopf und Schraubenmutter befinden sich zwei mittelgrosse Spacerringe. Dadurch liegt später der Polarm auf der richtigen Höhe.



Abbildung 23: 1 Rad aus Gummi, 1 Schraube und 1 Schraubenmutter aus Metall, 2 gelbe Spacerringe aus Plastik

Polarm

Der Polarm besteht aus einem platten Metallstab. In das Loch am einen Ende kommt eine Pfropfschraube (hat auf der einen Seite kein Gewinde), die mit zwei Schraubenmuttern von oben und unten fixiert wird. Der kleine Plastikring wird später am Gelenk benötigt, damit die sich berührenden Metallteile nicht aneinander reiben.

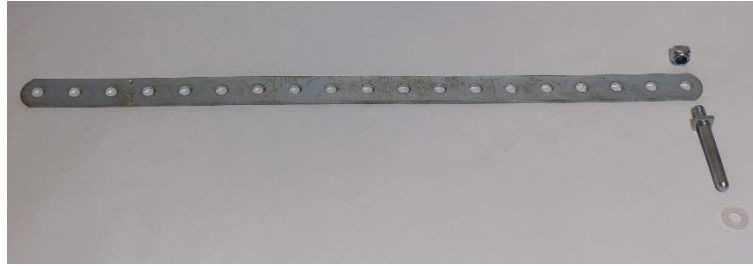


Abbildung 24: 1 platter Metallstab mit 19 Löchern, 1 Pfropfschraube und 2 (unterschiedlich grosse) Schraubenmuttern aus Metall, 1 weisser Spacerring aus Plastik



Abbildung 25: Pol und Polarm zusammengebaut

Tracerarm

Da dies der komplizierteste Teil darstellt, wird sein Aufbau in mehreren Schritten erklärt.

- Messradachse und Rahmengestell: Da sich das Messrad während der Messung nicht verschieben darf, wird es mit rutschsicheren Spacerringen aus Gummi an der Messradachse fixiert. Nur dort, wo es möglichst keine Reibung haben soll (also dort, wo die Radachse das Rahmengestell berührt), hat es Spacerringe aus Plastik. Mit dem Rahmengestell wird die Messradachse am Tracerarm befestigt.

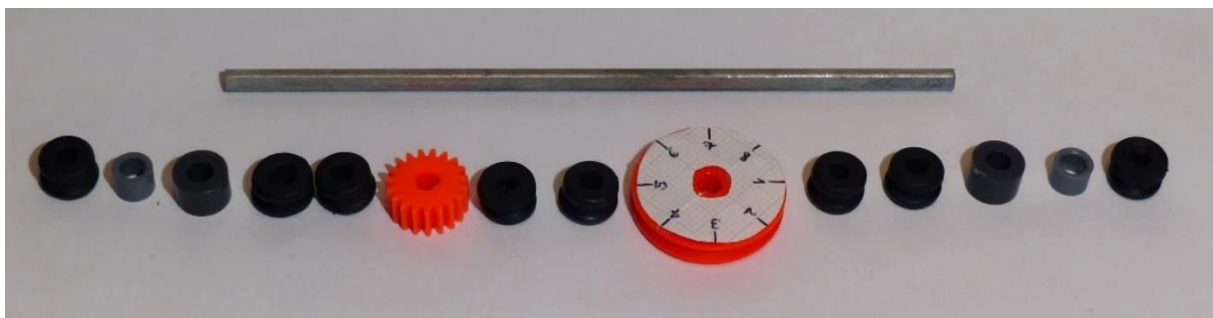


Abbildung 26: 1 lange Radachse aus Metall, 8 schwarze Spacerringe aus Gummi, 4 graue Spacerringe aus Plastik, 1 Messrad aus Plastik, 1 mittelgrosses oranges Zahnrad mit 19 Zähnen aus Plastik

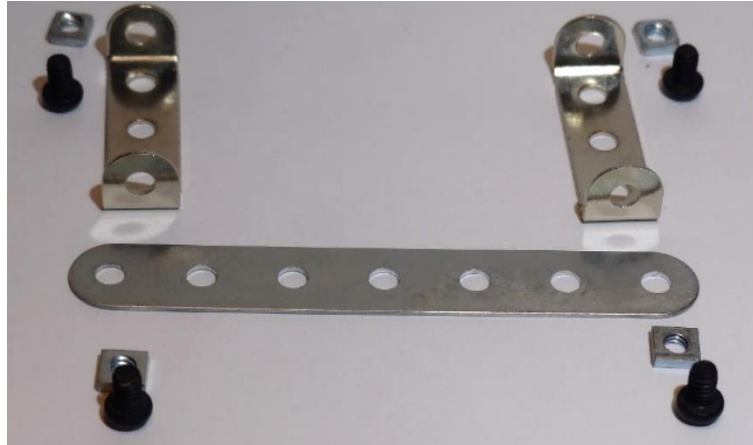


Abbildung 27: 1 platter Metallstab mit 7 Löchern, 2 platte und beidseitig angewinkelte Metallstäbe mit 5 Löchern, 4 schwarze Schrauben und 4 Schraubenmuttern aus Metall

- Tracerstab: Damit der Tracerstab unter dem Gewicht der Messradachse nicht kippt, sind zwei Stützräder von derselben Art wie das Messrad im fünften Loch von links angebracht, wobei ihre Achse senkrecht zum Tracerstab verläuft. Bei den drei ersten Löchern des Tracerstabs von links ist bereits die Gelenkeinbuchtung bereitgestellt, dort hinein kann später der Pfropfen des Polarms gesteckt werden.

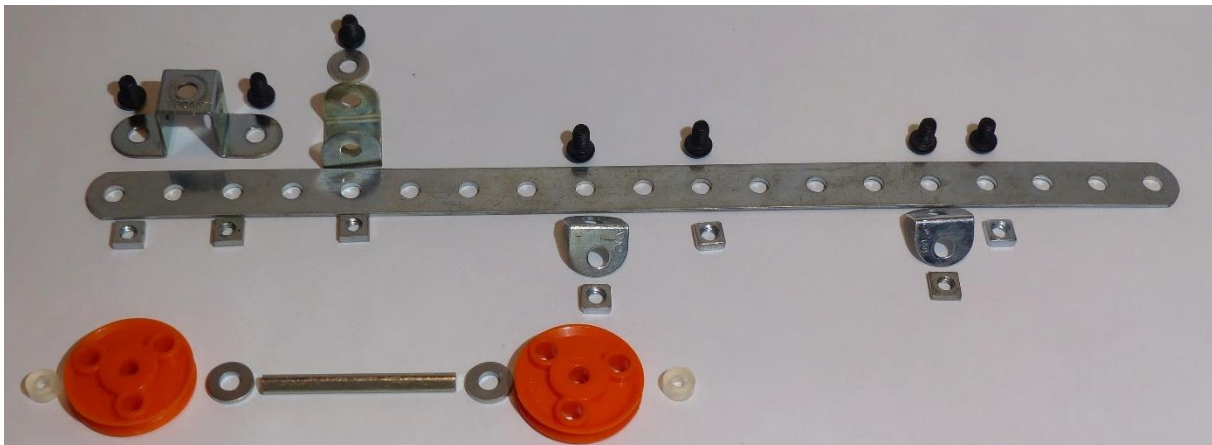


Abbildung 28: 1 kurze Radachse aus Metall, 2 kleine Spacerringe aus Metall, 2 weisse Spacerringe aus Gummi, 2 orange Räder aus Plastik, 1 platter Metallstab mit 19 Löchern, 1 platter und beidseitig doppelt angewinkelter Metallstab mit 5 Löchern, 1 platter und beidseitig angewinkelter Metallstab mit 3 Löchern, 2 platte und gewinkelte Metallstäbe mit 2 Löchern, 7 schwarze Schrauben und 7 Schraubenmuttern aus Metall

- Tracer: Für eine angenehme Handhabung des Messinstruments, ist wichtig, dass der Tracer das Papier nur leicht berührt. Es werden Spacerteile aus Plastik und platte Metallstäbe aufeinander gestapelt, sodass die als Tracer dienende Pfropfschraube das Papier nur streift. Die Schraube links in der Abbildung dient zur Stabilisation und Befestigung des Tracers im zweiten Loch des Tracerstabs von rechts.

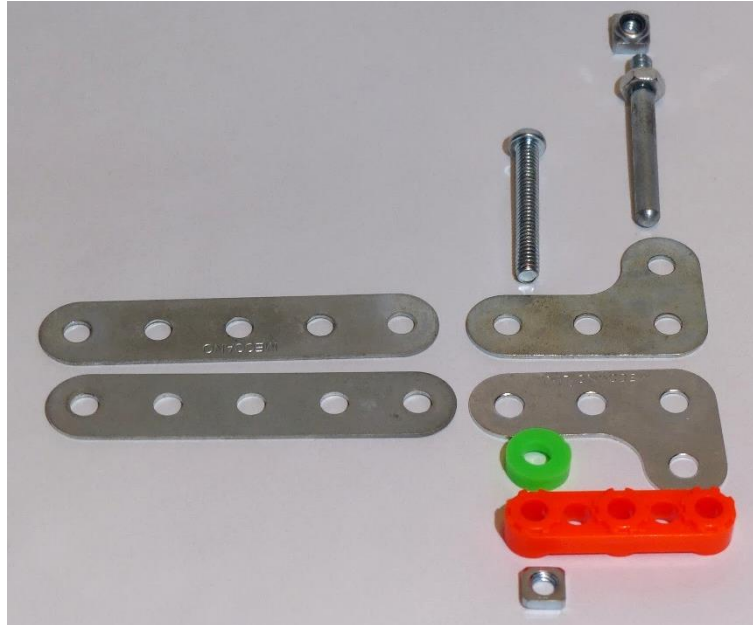


Abbildung 29: 2 flache Metallstäbe mit 5 Löchern, 2 flache und gebogene Metallstäbe mit 4 Löchern, 1 orangefarbener Spacerteil aus Plastik, 1 grüner Spacerring aus Plastik, 1 Schraube mit Schraubenmutter aus Metall, 1 Pfropfschraube mit Schraubenmutter aus Metall

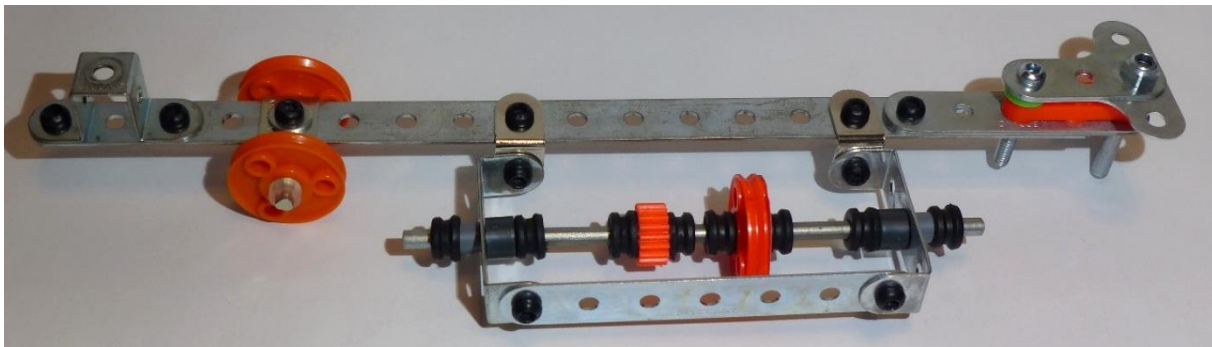


Abbildung 30: v.l.n.r. Gelenkeinbuchtung, Stützräder, Metallrahmen mit Messradachse, Tracer

Im Grunde könnte man die Teile aus den Abbildungen 23 und 28 bereits zusammenstecken, denn alle für das Funktionsprinzip wesentlichen Bestandteile sind fertiggestellt. Da das Messrad aber nur acht Zentimeter Umfang hat, wäre der Messvorgang noch nicht sehr komfortabel, weil man die Anzahl Umdrehungen stets mitzählen müsste, während man mit möglichst ruhiger Hand die gesuchte Fläche umfährt. Aus diesem Grund folgt nun eine Zusatzkonstruktion, die dem Zählwerk der industriell hergestellten Polarplanimeter ähnelt (vgl. 2.1 Quermessrad).

Zählrad

Ein Zählrad zählt die Anzahl Umdrehungen, die das Messrad während eines Messvorgangs macht. Bei den industriell hergestellten Polarplanimetern sind die Übersetzungsgewinde vom Messrad zum Zählrad genau so gebaut, dass sich das Zählrad um 36° weiterdreht, während sich das Messrad genau einmal dreht. Mit den Zahnrädern von Meccano ist eine so elegante Zehnernteilung nicht möglich. Aber

immerhin kann man verschiedengrosse Zahnräder mehrmals übersetzen, sodass das letzte Zahnrad der «Übersetzungskette» sich viel langsamer dreht als das erste Rad. Die erste Vorbereitung dafür wurde beim Bau der Radachse mit dem mittelgrossen, orangen Zahnrad unternommen. Dieses stellt den Anfang der Übersetzungskette dar und dreht sich gleich schnell wie das Messrad, schliesslich hat es dieselbe Achse. Dieses mittelgrosse, orange Zahnrad stellt den Anfang der Übersetzungskette dar. Quer dazu steht das grosse orange Zahnrad aus Abbildung 29, das nach unten gerichtete Zähne hat. Die Radachse des grossen Zahnrads steht also senkrecht nach oben auf der Radachse des Messrades. Auf der Radachse des grossen Zahnrads befindet sich auch das nächste Zahnrad der «Übersetzungskette». Das im Folgenden abgebildete Rahmengestell gibt der Radachse den nötigen Halt und kann am Tracerstab befestigt werden.

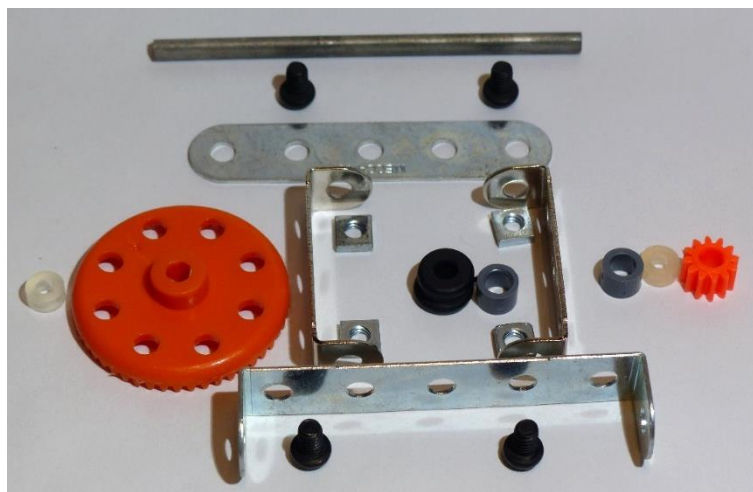


Abbildung 31: 1 lange Radachse aus Metall, 2 weisse Spacerringe aus Gummi, 1 schwarzer Spacerring aus Gummi, 2 graue Spacerringe aus Plastik, 1 grosses oranges Zahnrad mit 50 nach unten gerichteten Zähnen, 1 platter Metallstab mit 5 Löchern, 2 platten und beidseitig angewinkelte Metallstäbe mit 5 Löchern, 1 platter und beidseitig angewinkelter Metallstab mit 7 Löchern, 4 schwarze Schrauben mit 4 Schraubenmuttern aus Metall

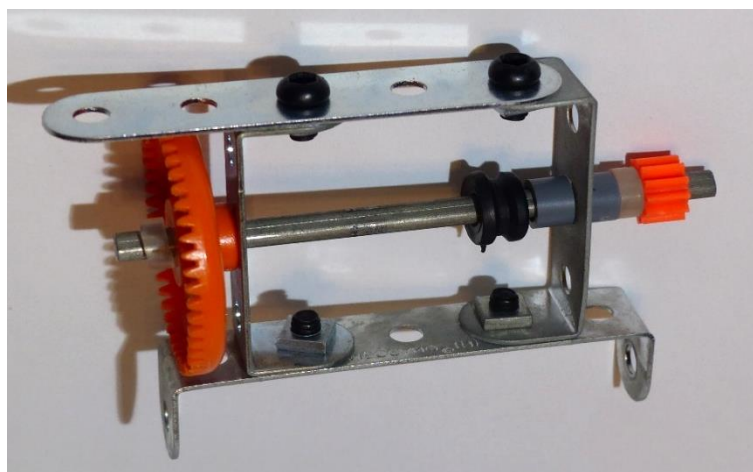


Abbildung 32: Konstrukt aus Abbildung 29 zusammengesetzt

Das letzte Zahnrad der Übersetzungskette hat wiederum eine eigene Radachse, diese wird mit Hilfe von Metallplatten parallel zur Radachse aus Abbildung 30 am Rahmengestell befestigt.

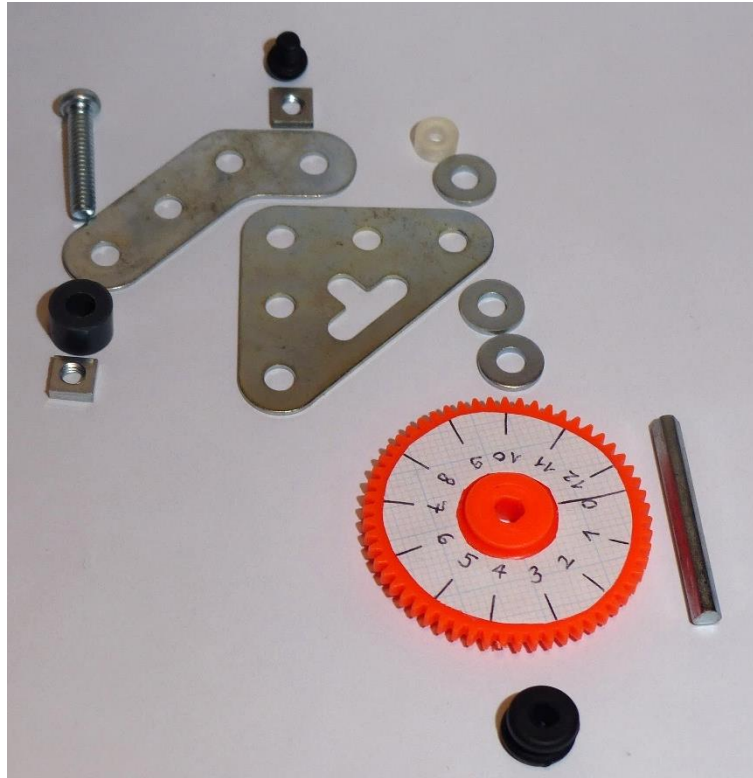


Abbildung 33: 1 platter und gebogener Metallstab mit 4 Löchern, 1 dreieckige Metallplatte, 1 Schraube aus Metall mit 1 schwarzen Spacerring aus Gummi und 1 Schraubenmutter aus Metall, 1 schwarze Schraube mit 1 Schraubenmutter aus Metall, 1 kurze Radachse, 1 weisser Spacerring, 3 Spacerringe aus Metall, 1 grosses Zahnrad, 1 schwarzer Spacerring aus Gummi

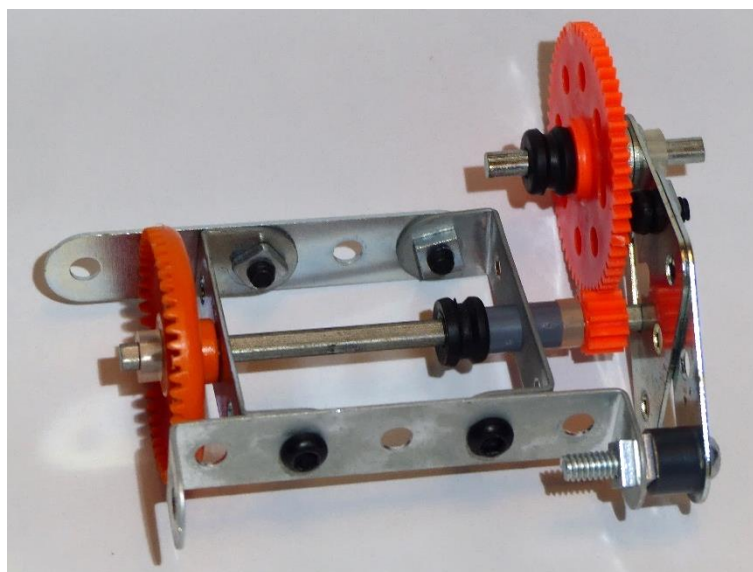


Abbildung 34: Konstrukt aus Abbildungen 30 und 31 zusammengesetzt

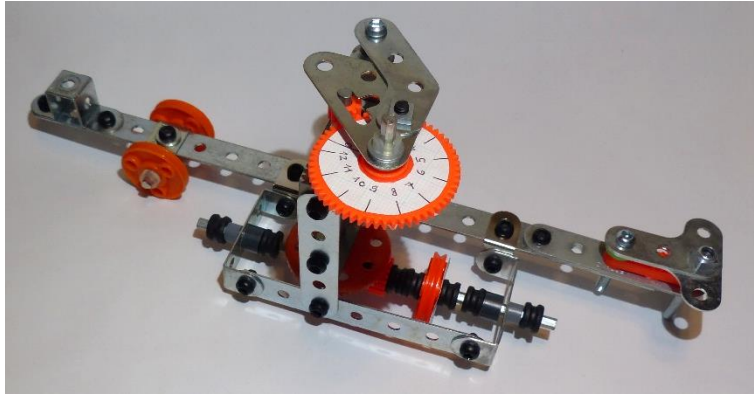


Abbildung 35: Tracerarm mit Zählwerk

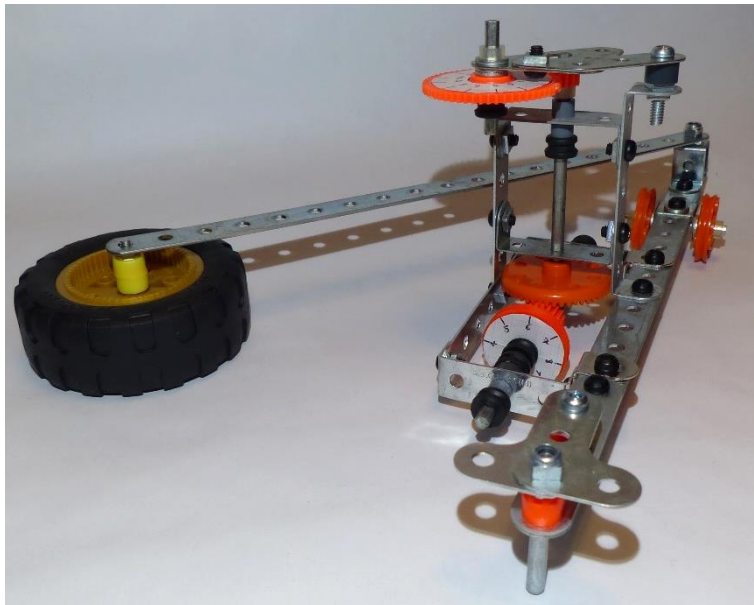


Abbildung 36: Pol, Polarm und Tracerarm als fertiges Polarplanimeter

Skalierung

Dieses Polarplanimeter hat im Gegensatz zu den industriell hergestellten Polarplanimetern eine reale Skala. Da das Messrad einen Umfang von genau 8 cm hat, geht die Skala des Messrads von 0 bis 8. Die Skala des grossen Zahnrads, das die Anzahl ganzer Umdrehungen des Messrades angibt, geht von 0 bis 12,5. Die folgende Tabelle stellt die Übersetzungskette dar, die erklärt, weshalb die Skala bis genau 12,5 geht.

Übersetzungstabelle für eine volle Umdrehung des Messrades

Man beachte, dass der Drehanteil für diejenigen Zahnräder gleichbleibt, die sich auf derselben Radachse befinden.

<i>Zahnräder:</i>	<i>Mittelgrosses Zahnrad</i>	<i>Grosses Zahnrad mit nach unten gerichteten Zähnen</i>	<i>Kleines Zahnrad</i>	<i>Grosses Zahnrad mit Skala</i>
<i>Anzahl Zähne:</i>	19	50	12	57
<i>Drehanteil:</i>	100%	38% = 19/50	38%	8% = 12 · 0.38/57

Das grosse Zahnrad macht also nur $\frac{8}{100}$ einer vollen Umdrehung, während sich das Messrad einmal ganz herumdreht. Deswegen kann man das grosse Zahnrad in $\frac{100}{8} = 12.5$ Abschnitte unterteilen.

6.1 Messgenauigkeit und Messversuche

Die Messgenauigkeit meines Polarplanimeters hängt ab von Folgendem:

- Ablesegenauigkeit: Das Messrad ist auf 0,1 cm genau beschriftet, folglich kann der Messwert m nur auf 0,1 cm genau abgelesen werden.
- Konstruktionsbedingte Messungenauigkeit: Spielraum zwischen den Zahnrädern, Bewegungsfreiheiten des Gelenks und der Polhalterung und axiale und laterale Bewegungsfreiheit der Messradachse im Messradgestell beeinflussen die Messung.
- Relevanteste physikalische Rahmenbedingungen: Umfahrunsgenauigkeit, Gleitfähigkeit der Unterlage (für die folgenden Messversuche diente eine gängige Landkarte), Reibungsverhalten zwischen Messrad und Unterlage (für die folgenden Messversuche wurde das Messrad mit Klebepads umwickelt, um das bestmögliche Mass an Reibung zu erzielen).

Messversuche (16.10.2021)

Anhand einiger Messversuche für die grösstmögliche und kleinstmögliche Fläche, die mit einer Umfahung gemessen werden kann, kann ein Korrekturfaktor ermittelt werden. Je konstanter dieser ausfällt, umso besser.

Erster Messversuch mit einer echten Fläche von 900 cm^2 :

<i>Bemerkungen:</i>	<i>Gemessene Fläche $F=m \cdot t$, wobei $t=22.8 \text{ cm}$:</i>	<i>Korrekturfaktor: Echte Fläche / gemessene Fläche (gerundet)</i>
<i>Umfahrung im Gegenuhrzeigersinn</i>	<i>711.4 cm²</i>	<i>1.265</i>
	<i>727.3 cm²</i>	<i>1.237</i>
	<i>715.9 cm²</i>	<i>1.257</i>
	<i>741.0 cm²</i>	<i>1.215</i>
	<i>736.4 cm²</i>	<i>1.222</i>
<i>Kleine Ausbesserung am Gelenk (weniger Spiel)</i>	<i>754.7 cm²</i>	<i>1.193</i>
	<i>745.6 cm²</i>	<i>1.207</i>
	<i>706.8 cm²</i>	<i>1.273</i>
<i>Umfahrung im Uhrzeigersinn</i>	<i>855.0 cm²</i>	<i>1.053</i>
	<i>741.0 cm²</i>	<i>1.215</i>
	<i>743.3 cm²</i>	<i>1.211</i>
	<i>709.1 cm²</i>	<i>1.269</i>

Zweiter Messversuch mit einer Fläche von 100 cm²:

<i>Bemerkungen:</i>	<i>Gemessene Fläche $F=mt$, wobei $t=22.8$ cm:</i>	<i>Korrekturfaktor: Echte Fläche/ gemessene Fläche (gerundet)</i>
<i>Umfahrung im Uhrzeigersinn (enge Startanordnung, Winkel beim Gelenk ca. 10°)</i>	<i>100.3 cm²</i>	<i>0.997</i>
	<i>114.0 cm²</i>	<i>0.877</i>
	<i>107.2 cm²</i>	<i>0.933</i>
	<i>111.7 cm²</i>	<i>0.895</i>
	<i>114.0 cm²</i>	<i>0.877</i>
<i>Umfahrung im Uhrzeigersinn (weite Startanordnung, Winkel beim Gelenk ca. 90°)</i>	<i>127.7 cm²</i>	<i>0.783</i>
	<i>114.0 cm²</i>	<i>0.877</i>
	<i>125.4 cm²</i>	<i>0.797</i>
<i>Umfahrung in gespiegelter An- ordnung</i>	<i>84.4 cm²</i>	<i>1.185</i>
	<i>84.4 cm²</i>	<i>1.185</i>

Fazit

Streicht man pro Tabelle die beiden Messungen, die am extremsten vom Durchschnitt abweichen, erhält man als durchschnittlichen Korrekturfaktor ungefähr 1.091. Der konstante Faktor, den es für die Flächenbestimmung benötigt, ist das Produkt von der Länge des Tracerarmes und eben diesem Korrekturfaktor. Denn der Korrekturfaktor berichtigt konstante Messungenauigkeiten. Im Falle meines Polarplanimeters handelt es sich insbesondere um die Messungenauigkeit, die dadurch entsteht, dass zwischen dem Messrad und der Unterlage zu wenig Reibung herrscht. Dies lässt sich leicht überprüfen, indem man mit dem Messrad eine Strecke misst. Das Messrad gibt dann nämlich einen etwas zu kleinen Messwert an.

Die Flächenformel für mein Polarplanimeter lautet daher folgendermassen (Fläche in cm²):

$$F = m \cdot 24.87$$

6.2 Experiment zur Messrad-Achsenneigung

Diese Messversuche wurden so gut es ging unter denselben Bedingungen gemacht wie am 16.10.2021. Der einzige Unterschied bestand darin, die Messradachse nicht parallel zum Tracerarm zu montieren. Es war zu erwarten, dass sich dadurch die gesuchte Fläche nicht korrekt berechnet. Die Frage war allerdings, inwiefern diese falschen Flächen regelmässig abweichen, d.h. ob der Messwert noch immer proportional zur Fläche ist, nur eben mit einer anderen Proportionalitätskonstanten.

Messversuche (03.02.2022)

Wichtige Bemerkungen zu allen folgenden Messungen:

- Alle Flächen wurden in der Richtung umfahren, sodass der Messwert positiv war.
- Die Startanordnung variierte zwischen weit und eng. Es hatte einen grossen Einfluss auf das Messergebnis, da je nach Startanordnung das Gerät besser oder schlechter ausbalanciert war. D.h. dass das Messrad teils fast über die Unterlage schwebte, teils hineingedrückt wurde.
- Es wurden abwechselnd Flächen verschiedener Formen, aber gleichen Flächeninhaltes gemessen. Dies hat insbesondere bei der letzten Tabelle zu grossen Messschwankungen geführt.
- Streichresultate sind gar nicht erst aufgeführt worden, z.B. wenn der Pol verrutscht ist.

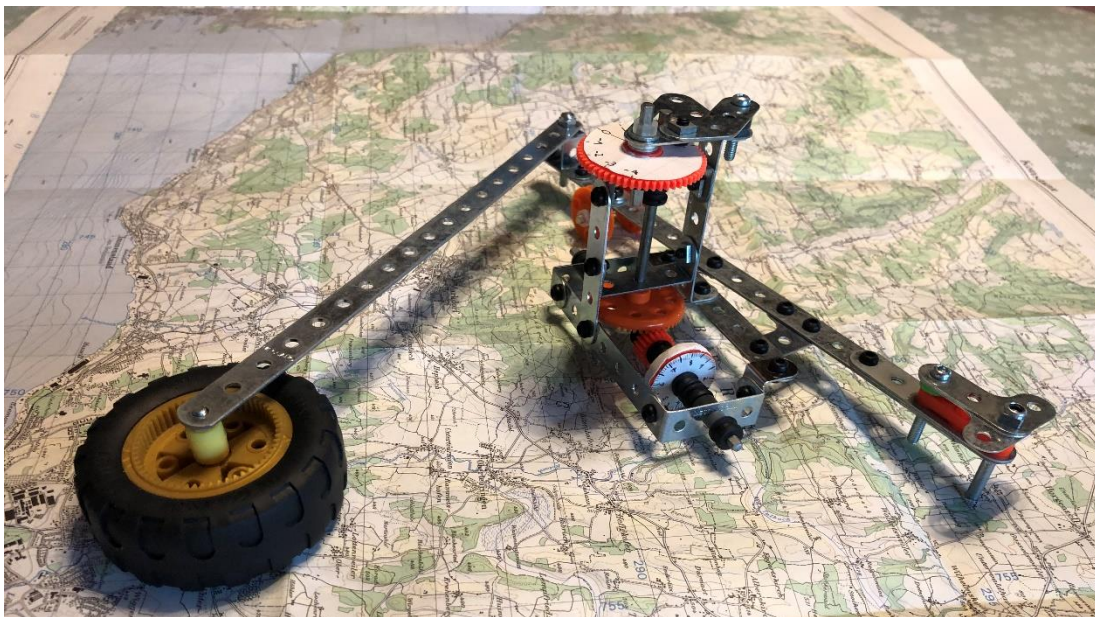


Abbildung 37: Polarplanimeter mit schiefer Messradachse, wobei sich das Messrad «innerhalb» befindet.

Erster Messversuch mit einer echten Fläche von 100 cm^2 . Messradachse steht in einem Winkel von ca. 12° auf dem Tracerarm.

<i>Bemerkungen:</i>	<i>Absichtlich falsch gemessene Fläche $F=m \cdot t$, wobei $t=22.8 \text{ cm}$:</i>	<i>Korrekturfaktor: Echte Fläche/ gemessene Fläche (gerundet)</i>
<i>Messrad «innerhalb»</i>	95.7 cm^2	1.045
	95.8 cm^2	1.044
	93.5 cm^2	1.070
	68.4 cm^2	1.46
	93.5 cm^2	1.070
	98.0 cm^2	1.020
	91.2 cm^2	1.096
	79.8 cm^2	1.253
	77.5 cm^2	1.290
<i>Messrad «ausserhalb»</i>	73.0 cm^2	1.379
	68.6 cm^2	1.155
	68.4 cm^2	1.146
	77.5 cm^2	1.290
	82.1 cm^2	1.218
	79.8 cm^2	1.253
	77.5 cm^2	1.290

Zweiter Messversuch mit einer echten Fläche von 100 cm^2 . Messradachse steht in einem Winkel von ca. 12° auf dem Tracerarm, jedoch gespiegelt zum ersten Messversuch.

<i>Bemerkungen:</i>	<i>Absichtlich falsch gemessene Fläche $F=m \cdot t$, wobei $t=22.8 \text{ cm}$:</i>	<i>Korrekturfaktor: Echte Fläche/ gemessene Fläche (gerundet)</i>
<i>Messrad «innerhalb»</i>	45.6 cm^2	2.193
	41.0 cm^2	2.439
	50.2 cm^2	1.992
	50.2 cm^2	1.992
	43.3 cm^2	2.309
<i>Messrad «innerhalb»</i>	79.8 cm^2	1.253
	61.6 cm^2	1.623
	66.1 cm^2	1.513
	63.8 cm^2	1.567
	73.0 cm^2	1.370
	61.6 cm^2	1.623
	57.0 cm^2	1.754

Dritter Messversuch mit einer echten Fläche von 100 cm^2 . Die Messradachse steht in einem 90° Winkel zum Tracerarm.

<i>Bemerkungen:</i>	<i>Absichtlich falsch gemessene Fläche $F=m \cdot t$, wobei $t=22.8 \text{ cm}$:</i>	<i>Korrekturfaktor: Echte Fläche/ gemessene Fläche (gerundet)</i>
<i>Messrad «innerhalb»</i>	63.8 cm^2	1.567
	63.8 cm^2	1.567
	66.1 cm^2	1.513
	79.8 cm^2	1.253
	88.9 cm^2	1.125
<i>Messrad «ausserhalb»</i>	114.0 cm^2	0.877
	148.2 cm^2	0.675
	158.9 cm^2	0.629
<i>Gespiegelte Anordnung, Messrad «innerhalb»</i>	34.2 cm^2	2.924
	36.5 cm^2	2.740
	38.8 cm^2	2.577
	84.4 cm^2	1.185
	50.2 cm^2	1.992
	43.3 cm^2	2.309
	16.0 cm^2	6.250

Auswertung der Tabellen und Erklärung

- Zunächst einmal ist festzustellen, dass diese Messungen nicht gleich denen sind, bei denen mit zum Tracerarm paralleler Messradachse gemessen wurde. Denn dort betrug der durchschnittliche Korrekturfaktor für die 100 cm^2 Testfläche ungefähr 0.893. Bei den ersten beiden Tabellen war der Korrekturfaktor immer >1 .
- Die letzte Tabelle lässt einem stark vermuten, dass keine Proportionalität zwischen Flächeninhalt und Messwert besteht. Der Grund kann mit Hilfe von der geometrischen Erklärung aus Kapitel 3 gegeben werden: Bei allen Rotationsbewegungen wird nichts gemessen, was jedoch keinen falschen Einfluss auf den Messwert hat, da sich auch bei paralleler Achse alle Rotationsanteile ausnivellieren. Bei den Translationsbewegungen allerdings werden statt der senkrechten Bewegungsanteile, alle waagerechten gemessen. Die Summe all dieser waagerechten Messanteile haben scheinbar keinen Zusammenhang zur umfahrenen Fläche, d.h. sie variieren je nach Anordnung des Polarplanimeters.

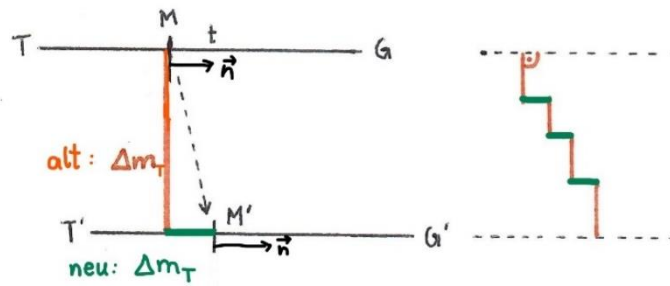


Abbildung 38: Translationsbewegung mit senkrecht zum Tracerarm stehende Messradachse. Die dadurch aufgezeichneten horizontalen Messanteile haben keinen konstanten Zusammenhang zur umfahrenen Fläche.

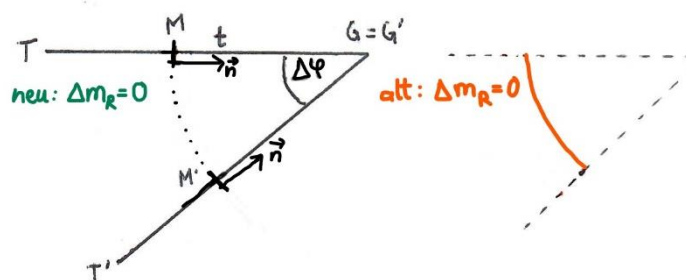


Abbildung 39: Die Summe aller rotatorischen Messanteile ist im sowohl beim normalen Planimeter, als auch in diesem Extremfall gleich 0.

- Bei schiefer Achse wird das Messergebnis tendenziell zu klein. Aufgrund der ersten beiden Tabellen eine Aussage zu treffen, ob es einen Zusammenhang zur umfahrenen Fläche gibt, ist aber heikel, da neben der Achsenschiefe auch noch ganz andere Faktoren Messungenauigkeit herbeiführen. Man sieht aber, dass die Messschwankungen aber eher grösser sind als bei den 100 cm^2 Messungen vom 16.10.2022.

7. Schlusswort und Dank

Ich hoffe nun, Ihnen die Thematik des Polarplanimeters auf verständliche Weise nähergebracht zu haben, und dass ich Sie mit meiner Faszination für dieses Gerät anstecken konnte.

Abschliessend möchte ich mich bei meiner Betreuungsperson, Dr. David Stotz, herzlich bedanken. Herr Stotz hat mir nicht nur alle für diese Arbeit nötige Mathematik beigebracht, sondern hat auch das Thema des Polarplanimeters vorgeschlagen. Ich fand das Thema von Beginn an genial, insbesondere weil es einen praktischen Teil beinhaltet. Mir machte die ganze «Phase des Erlernens» Spass. Solange ich mir ein neues Thema aneignete, einen Beweis nachvollzog oder an meinem eigenen Polarplanimeter bastelte, fand ich es nicht einmal schlimm, wenn ich irgendetwas nicht begreifen konnte. Jedoch hatte ich danach Mühe, das angesammelte Wissen zu Papier zu bringen. Es war nicht nur eine Menge ungeordnetes Material, sondern ich hatte auch den Anspruch, eine verständliche Arbeit zu schreiben, sodass beispielsweise ein/e Mitschüler/in sie verstehen kann.

Aus diesem Grund möchte ich mich auch bei meinem Mitschüler Felix Spengler bedanken, der die chaotischsten Kapitel bereitwillig durchlas und mich freundlich auf Unverständlichkeiten aufmerksam machte.

8. Quellen- und Abbildungsverzeichnis

Amsler, Robert und Erismann, Theodor, Pioniere der Prüfung und Präzision, Verein für wirtschaftshistorische Studien, Meilen 1993

Dubois, Fr., Die Schöpfungen Jakob und Alfred Amslers, AG Fachschriften-Verlag & Buchdruckerei, Zürich 1944

Gebrauchsanleitung für das Ott-Polarplanimeter, <http://anklick-bar.de/matheprojekt/planimeter-ott.pdf>, 23.10.2021

Gollnick, Martin, Funktionsprinzip von Planimetern, Vortragsskript zur Modulprüfung «Seminar Angewandte Mathematik 1», Deutschland 2015

Isoperimetrische Ungleichung der Ebene, https://de.wikipedia.org/wiki/Isoperimetrische_Ungleichung#Figuren_in_der_Ebene, 23.11.2021

Meccano, <https://de.wikipedia.org/wiki/Meccano>, 15.11.2021

Planimeter und isoperimetrische Ungleichung, <http://persweb.wabash.edu/facstaff/footer/Planimeter/Isoperem/pln&isop.htm>, 23.11.2021

Stotz, David, Dossier mit zum Schulunterricht ergänzenden Informationen über Integralrechnung, Schaffhausen 2021

Abbildung 1: https://www.mathinstruments.ch/images/amsler/jakob_amsler.jpg, 23.10.2021

Abbildung 2: https://www.mathinstruments.ch/images/amsler/amsler_ebnat.jpg, 23.10.2021

Abbildungen 3 bis 39 inkl. Titelbild: von der Verfasserin erstellt in den Jahren 2021 und 2022

9. Redlichkeitserklärung

Ich, Simona Styger, bestätige hiermit, dass ich den Inhalt der Maturaarbeit selbstständig erarbeitet und keine Inhalte ohne entsprechende Quellenangabe übernommen habe.

Datum, Unterschrift: