

Fibonacci trifft Pascal – Kombinatorische Identitäten entdecken und visuell beweisen mit Pfeiljagd

TMU, Luzern

Regula Krapf

Universität Bonn

9. September 2026

- ➊ Das Pascalsche Dreieck und die Pfeiljagd
- ➋ Die Hockeyschlägerformel und Anwendungen
- ➌ Die Gewichtsregel und Anwendungen
- ➍ Blümchen und Girlanden im Pascalschen Dreieck
- ➎ Ausblick und didaktische Reflexion

1. Das Pascalsche Dreieck und Pfeiljagd

Binomialkoeffizienten

Verschiedene Zugänge zu Binomialkoeffizienten: $\binom{n}{k}$ ist...

- die Anzahl Möglichkeiten, k aus n Objekten ohne Wiederholung und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge auszuwählen;
- die Anzahl Möglichkeiten, k identische Objekte auf n Personen zu verteilen, wobei niemand mehr als ein Objekt erhält;
- der Koeffizient von $a^{n-k}b^k$ in der ausmultiplizierten Darstellung von $(a+b)^n$;
- der Term $\frac{n!}{k!(n-k)!}$;
- der k -te Eintrag der n -ten Zeile des Pascalschen Dreiecks:

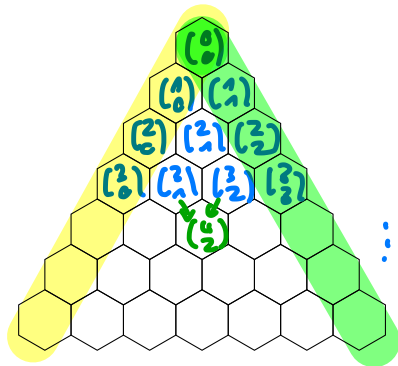
$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} := 1$$
$$\binom{n+1}{k} := \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Das Pascalsche Dreieck

Rekursiver Zugang zu den Binomialkoeffizienten: Die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ (für $n, k \in \mathbb{N}, k \leq n$) ergeben sich durch folgende Rekursion:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} := 1$$
$$\binom{n+1}{k} := \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

(Pascalsche Regel)



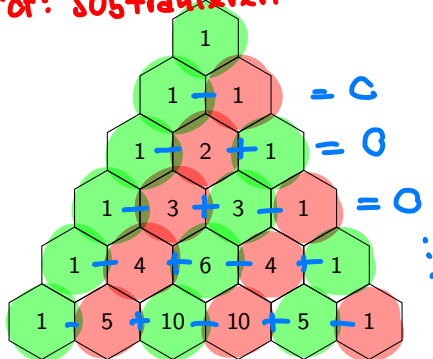
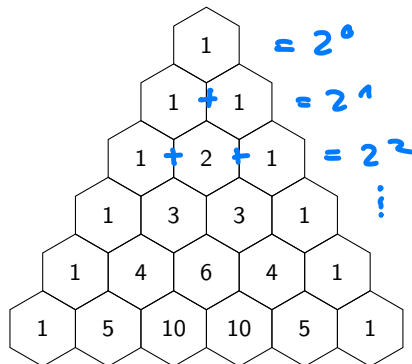
Daraus ergibt sich das *Pascalsche Dreieck*: Jeder Eintrag in der Mitte berechnet sich als Summe der beiden diagonal darüberliegenden Einträge.

Zeilensumme im Pascalschen Dreieck

Was erhält man, wenn man...

- 1 alle Zahlen in einer Zeile des Pascalschen Dreiecks addiert?
- 2 alle Zahlen in einer Zeile des Pascalschen Dreiecks abwechselnd addiert und subtrahiert?

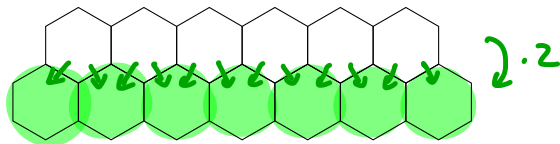
grün: addieren
rot: subtrahieren



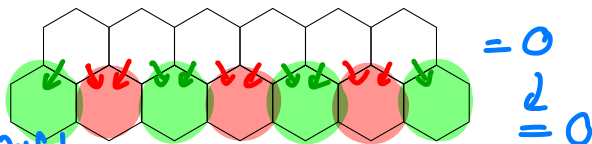
Zeilensummen im Pascalschen Dreieck

Es gilt:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n, \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \quad (n > 0)$$



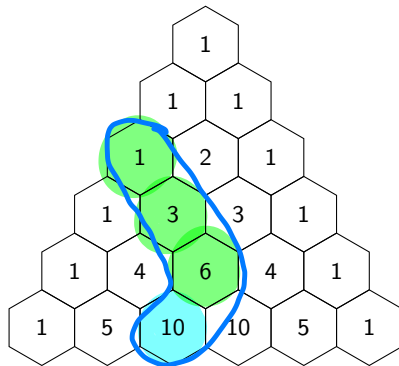
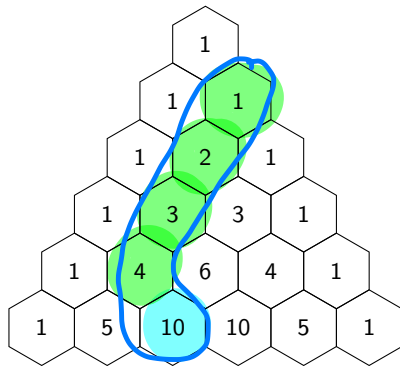
rote und
grüne
Pfeile
heben sich auf!



2. Die Hockeyschlägerformel und Anwendungen

Hockeyschlägerformel

Was erhalten wir, wenn wir aufeinanderfolgende Zahlen in einer Spalte des Pascalschen Dreiecks addieren?



Hockeyschlägerformel

Die *Hockeyschlägerformel* lautet:

$$\sum_{k=m}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

Beweis:

Siehe <https://youtu.be/qcgZZPcptJY>

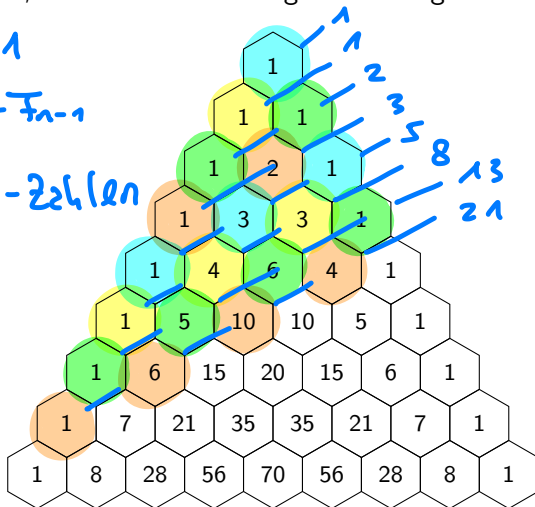
Diagonalsummen

Was erhalten wir, wenn wir alle Einträge einer Diagonalen addieren?

$$F_1 = F_2 = 1$$

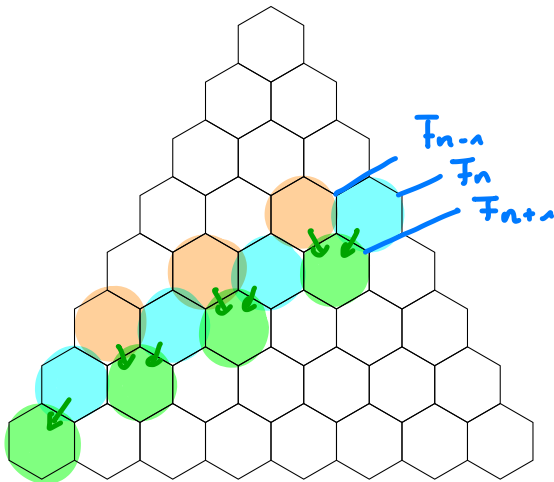
$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

Fibonacci-Zahlen



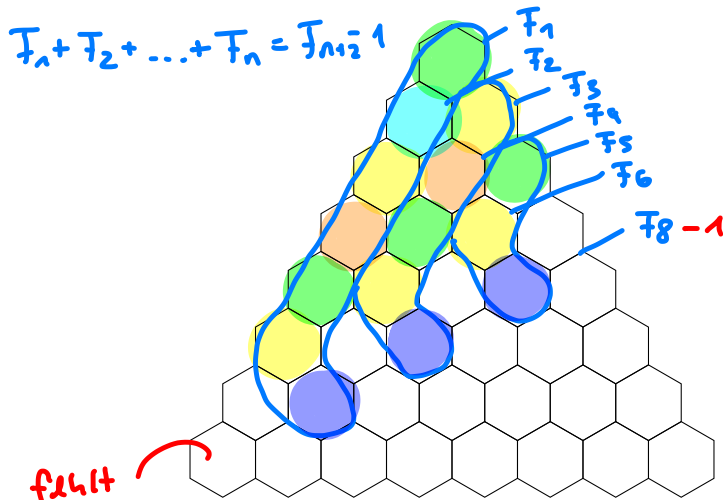
In den Diagonalen des Pascalschen Dreieck befinden sich die *Fibonacci-Zahlen*. Es gilt:

$$F_{n+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k}$$



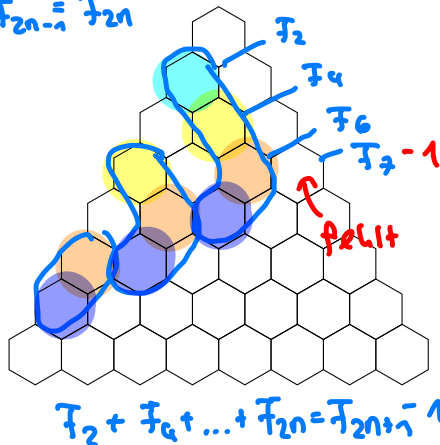
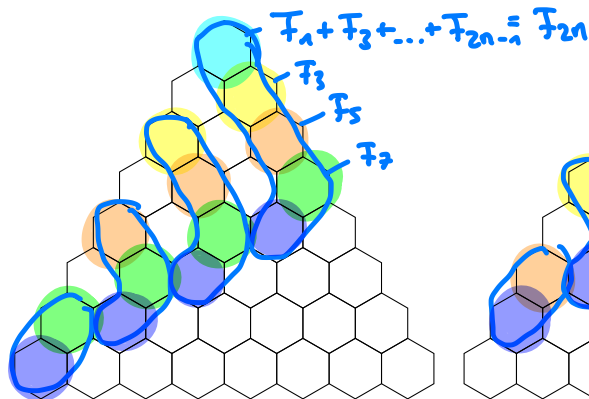
Summen von Fibonacci-Zahlen

Was erhalten wir, wenn wir die ersten paar Fibonacci-Zahlen addieren?



Summen von geraden/ungeraden Fibonacci-Zahlen

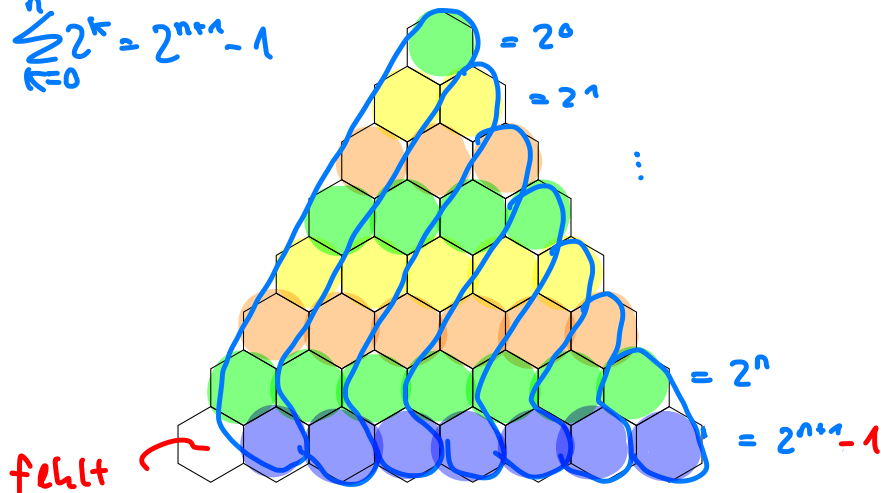
Was erhalten wir, wenn wir die ersten paar Fibonacci-Zahlen von geradem bzw. ungeradem Index addieren?



Summen von Zweierpotenzen

Was erhalten wir, wenn wir die ersten paar Zweierpotenzen addieren?

$$\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$$



3. Die Gewichtsregel und Anwendungen

Formel von Lagrange

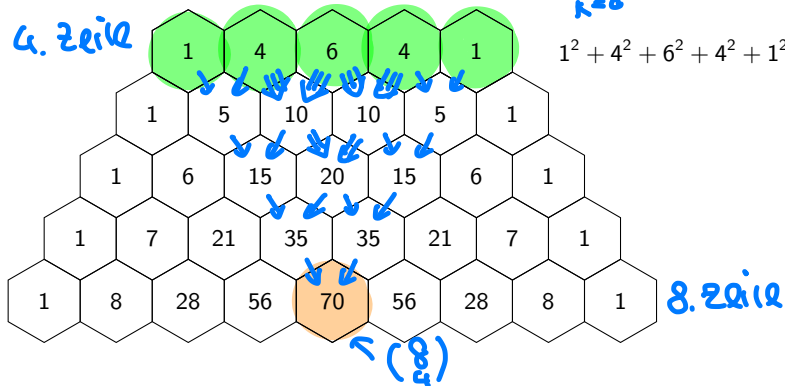
Was erhalten wir, wenn wir die Summe der quadrierten

Binomialkoeffizienten addieren, d.h. was erhalten wir für $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$?

Dafür verwenden wir *Multipfeile*:

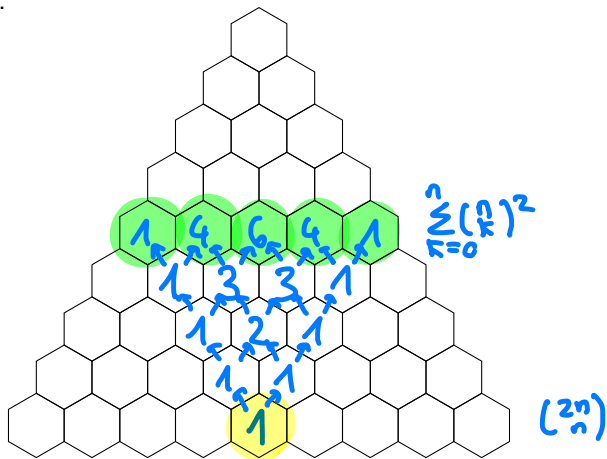
$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

$$1^2 + 4^2 + 6^2 + 4^2 + 1^2 = ?$$



Formel von Lagrange

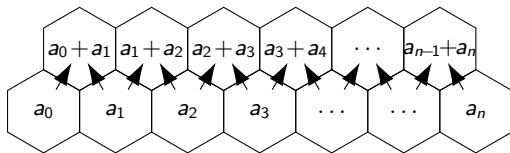
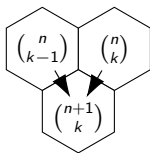
Die Werte der Binomialkoeffizienten spielen für das Argument keine Rolle! Stattdessen kann man die Stelligkeiten der Pfeile als *Gewichte* in die Zellen eintragen:



Pascalsche Regel und Gewichtregel

Die *Pascalsche Regel* besagt:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$



$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a_k$$

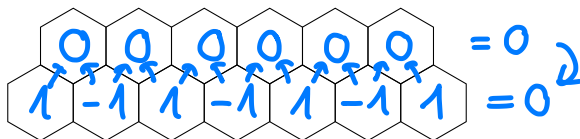
Daraus ergibt sich die *Gewichtregel*:

Wenn man zeilenweise jeweils die Gewichte zweier benachbarter Einträge addiert, so erhält man jeweils das Gewicht des darüberliegenden Eintrags. Die gewichtete Zeilensumme bleibt dabei gleich.

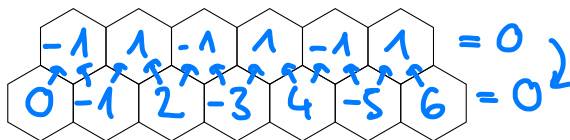
Alternierende Zeilensummen

Wir haben bereits gesehen: $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \ (n > 0)$

Dies lässt sich leicht mit der Gewichtsregel beweisen:



Damit lässt sich auch zeigen: $\sum_{k=1}^n (-1)^k k \binom{n}{k} = 0 \ (n > 1)$

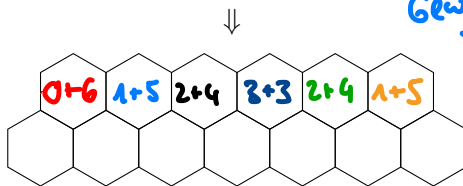


Gewichte variieren

Mit der Gewichtsregel kann man auch gut Summenformeln *entdecken*.

Beispiel 1: Was ist der Wert der Summe $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$?

$$\sum_{k=0}^n k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$



Gewicht $\downarrow$ $6 \cdot 2^5$

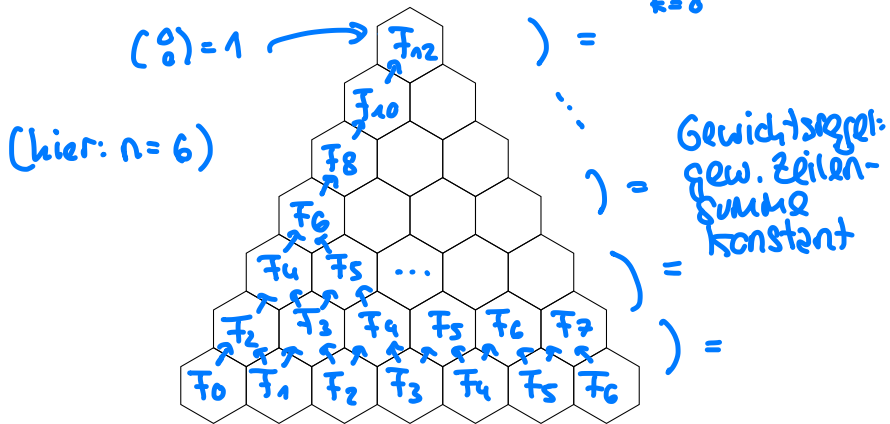
Zeilen-Summe $\downarrow$

Gewichte variieren

Mit der Gewichtsregel kann man auch gut Summenformeln *entdecken*.

Beispiel 2: Was ist der Wert der Summe $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k$?

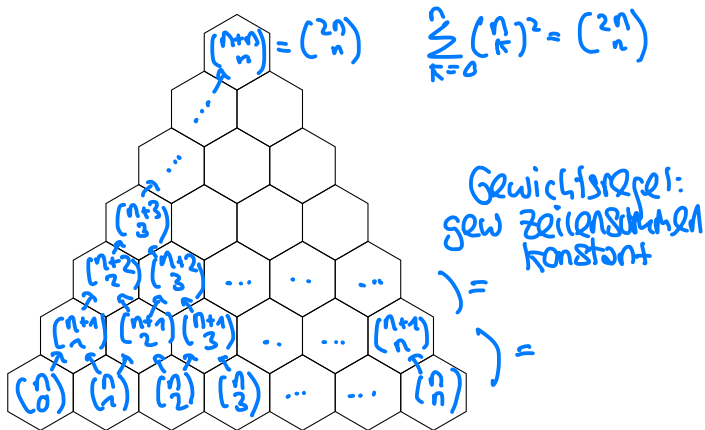
$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k = F_{2n}$$



Gewichte variieren

Mit der Gewichtsregel kann man auch gut Summenformeln *entdecken*.

Beispiel 3 (erneut): Was ist der Wert der Summe $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$?



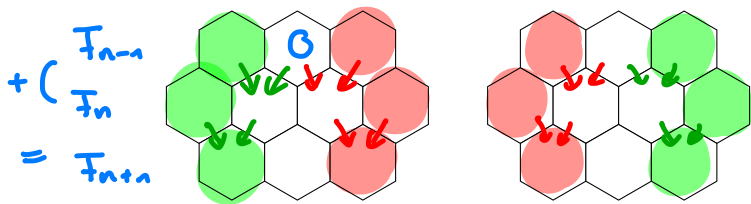
4. Blümchen und Girlanden im Pascalschen Dreieck

Blümchen im Pascalschen Dreieck

Die *Fibonacci-Folge* ist die Zahlenfolge gegeben durch

$$F_1 = F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Um zu begründen, dass das Muster tatsächlich die Fibonacci-Folge ergibt, müssen wir zeigen, dass zwei aufeinanderfolgende gewichtete Zeilensummen die nächste ergibt. Da das Muster periodisch ist, reicht es, einzelne *Blüten* anzuschauen:



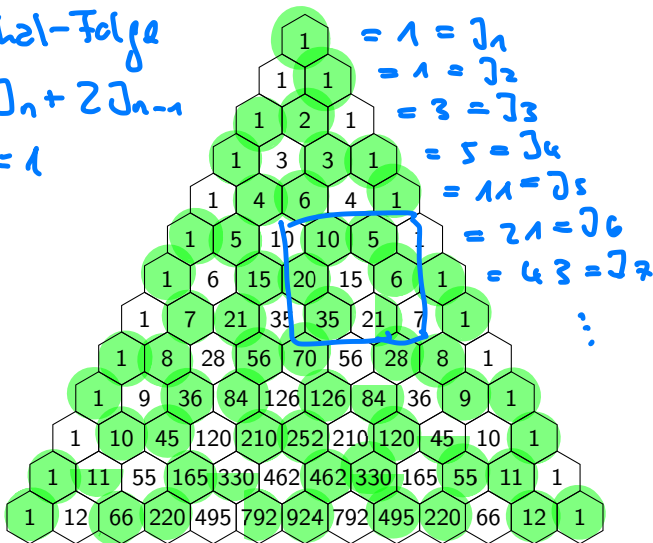
Das gilt auch am Rand, wenn man dort Nullen ergänzt.

Es gibt auch weitere Girlandenmuster:

Jacobsthal-Folge

$$J_{n+1} = J_n + 2J_{n-1}$$

$$J_1 = J_2 = 1$$

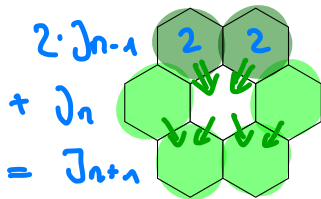


Jacobsthal-Zahlen

Die *Jacobsthal-Folge* ist definiert durch:

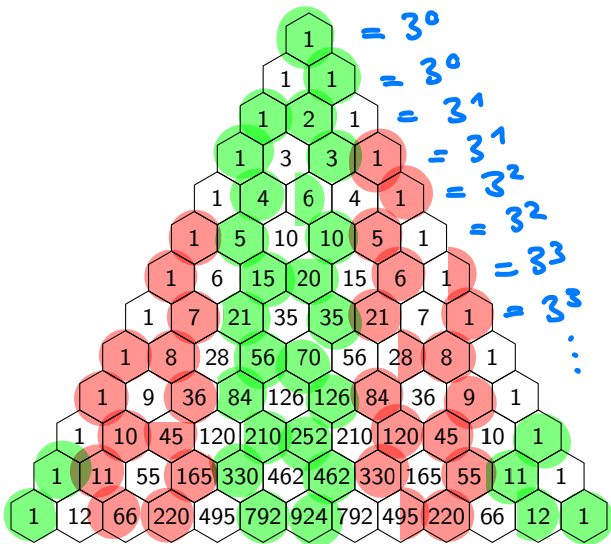
$$J_1 = J_2 = 1, J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$$

Auch hier kann man die Gültigkeit des Musters mit passenden *Blüten* überprüfen:



Jacobsthal-
Blüte

Und noch ein Muster:

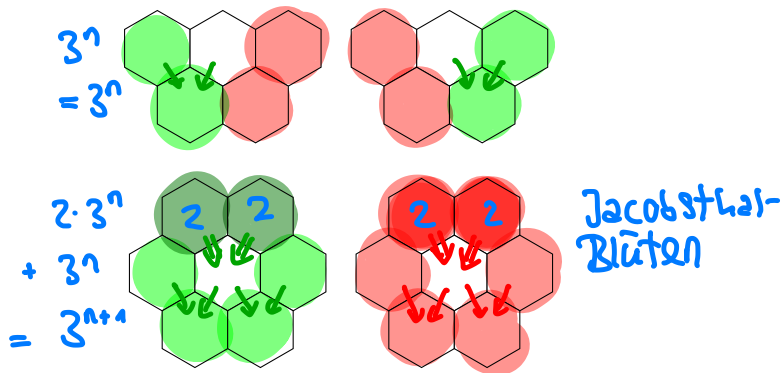


Dreierpotenzen im Pascalschen Dreieck

Auch die Dreierpotenzen finden sich im Pascalschen Dreieck:

$$3^0, 3^0, 3^1, 3^1, 3^2, 3^2, \dots$$

Auch dazu betrachtet man Blüten:



5. Ausblick und didaktische Reflexion

Pfeiljagd...

- ...kann Beweise über Identitäten von rekursiven Zahlenfolgen deutlich vereinfachen (v.a. von alternierenden Summenformeln).
- ...ermöglicht einen visuellen Zugang zu Identitäten über Binomialkoeffizienten und kommt ohne Kenntnisse der Hochschulmathematik aus.
- ... ermöglicht Argumentieren auf verschiedenen Abstraktionsniveaux, beispielsweise auch mit „generischen Beispielen“
- ...eignet sich für eine große Menge an rekursiv definierten Zahlenfolgen (z.B. Stirling-Zahlen, Catalan-Zahlen, Bell-Zahlen).
- ... funktioniert in vielen verschiedenen rekursiv definierten Dreiecken (z.B. Hosoya-Dreieck, harmonisches Dreieck, Stirling-Dreiecke)

Pfeiljagd...

- ...zeigt die Stärke von rekursiven Definitionen im Gegensatz zu expliziten auf.
- ... ermöglicht das Entdecken neuer kombinatorischer Identitäten, z.B. wurde folgende neue Identität mittels Pfeiljagd entdeckt:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{(s+1)(n-k)} L_{r-s}^{n-k} L_s^k L_{kr} = \begin{cases} 5^{n/2} F_r^n L_{ns}, & n \text{ gerade} \\ 5^{(n+1)/2} F_r^n F_{ns}, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

(L_n : Lucas-Zahlen)

Pfeiljagd wurde bereits vielfältig erprobt:

- Begabtenförderung: z.B. Bonner Matheclub, Kölner Mathe-AG
- Schüler*innenforschungsprojekt an der Universität Bonn
- Lehramtsausbildung

Potentiale für den Mathematikunterricht:

- Formeln werden gleichzeitig *entdeckt* und *bewiesen*.
- Pfeiljagd ermöglicht einen Einblick in mathematische Forschungsprozesse für Lernende mit geringen Vorkenntnissen.
- Pfeiljagd zeigt, dass Beweise auch rein *visuell* funktionieren können (Beweise ohne Worte).
- Förderung mathematischer Kreativität.

**Vielen Dank für Ihre
Aufmerksamkeit!**