



40 Jahre Mathematik und Unterricht

Schweizerischer Tag für Mathematik und Unterricht,

Luzern, 9. September 2026

Armin P. Barth

1. Akt: Berufsbild

40 Jahre und kein bisschen müde ... !?

1985 – 2025:

Unterricht am RG Rämibühl (10 Jahre) und an der Kantonsschule Baden (30 Jahre)

2008 – 2022:

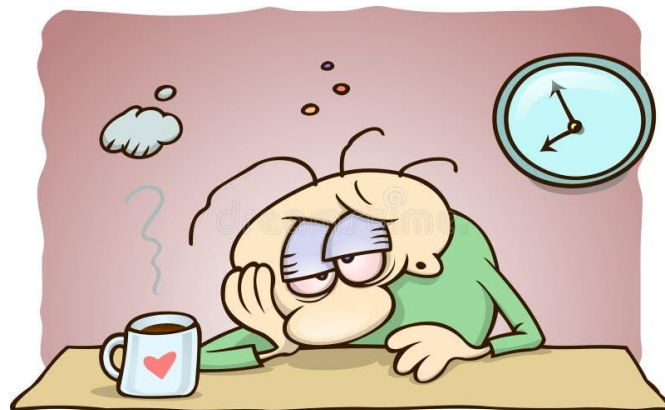
Forschung am MINT-Lernzentrum der ETH Zürich

2015 – 2026:

Dozent am Mathematik Departement der ETH

1988 – heute:

Ein Dutzend Bücher

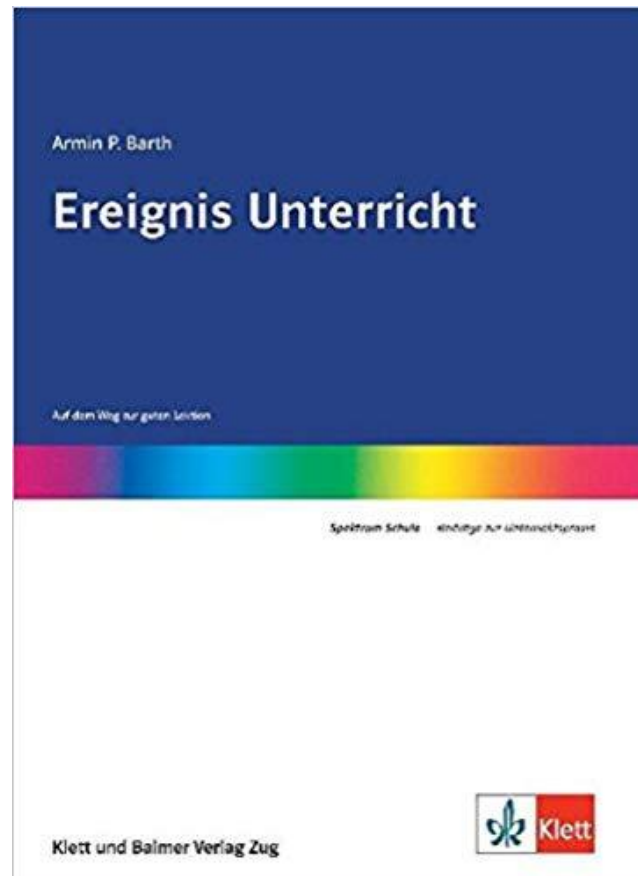


Viele klagen über anstrengende Klassen...



20 Gründe, **nicht** Lehrer/Lehrerin zu werden

Aus: Armin P. Barth, «Ereignis Unterricht», Klett und Balmer Verlag, Zug, 2007:



20 Gründe, **nicht** Lehrer/Lehrerin zu werden

1. Kaum Karrierechancen, genau definierter Lohn, keine *fringe benefits*
2. Feierabend um 17 Uhr? Vergessen Sie das!
3. Nicht frei in der Wahl des Zeitpunktes der Ferien
4. Eine Lehrperson ist immer auch Erzieherin, Clown, Schiedsrichterin, Entertainer, Arzt, Psychologin, Psychiater, Seelsorgerin, Pfarrer, Philosoph, Therapeutin, Moderator, Politikerin, Coach, Reisführerin, Rednerin, Zuhörer, Beraterin, Vorbild, Zielscheibe, Zauberin, Mutter, Vater, Tante, Onkel, Mutmacher, Teufelsadvokat und Universalgelehrte.
5. Lehrpersonen müssen mit einer makabren Machtdemonstration der Jugend fertig werden: Vor der ewigen Jugend und der grenzenlosen Kraft und Energie der SuS wird ihnen ihr eigenes Älterwerden und Ermüden dramatisch bewusst.

20 Gründe, **nicht** Lehrer/Lehrerin zu werden

6. Wenig Bewunderung! («Ach, Sie sind nur Lehrer geworden? Dafür haben Sie nun 12 Wochen Ferien und viele freie Nachmittage.»)
7. Je nach Verhalten der SuS ist es schwer, das nötige Verständnis für SuS aufzubringen.
8. Der Beruf ist sehr repetitiv.
9. Man ist dauernd «ausgestellt». 50 Augen und Ohren registrieren jede Regung, jeden Fehltritt, jedes Abweichen von gewohnten Mustern.
10. Konfliktsituationen sind unvermeidlich.

20 Gründe, **nicht** Lehrer/Lehrerin zu werden

11. Wir sind in absolut hoffnungsloser Konkurrenz zu Computer, Emails, Internet und Websites, Mobiles, WhatsApp, Digitalkameras und iPads; Coca Cola, Eistee, Redbull und Bier; Prag, Berlin, London und Paris; Paris Hilton, Taylor Swift, Penelope Cruz, Brad Pitt und Orlando Bloom; Hamburger, Pommes frites, Spaghetti und Schokolade; Comics, Tageszeitungen, Dan Brown und Kreuzworträtsel; TikTok, YouTube, Google und SnapChat, Rutschbahnen, Achterbahnen, Geisterbahnen und Bergbahnen, Kino, Computergames, Bars und Freibäder, Hosen, Jacken, T-Shirts und Sneakers, Katzen, Hunde, Pferde und Shawn Mendes, Klavier, Schlagzeug, Geige und Didgeridoos, Fussball, Handball, Judo und Karate, Tennis, Reiten, Segeln und Snowboard, Tanzen, Techno, Partys und Openairs, Piercings, Tattoos, Cremen und Lipgloss, Grossmutter, Grossvater, Bruder und Schwester, Mutter, Vater, Freund und Freundin, Seeufer, Flaniermeilen, Parkanlagen und Shoppingcenters, Bikes, Motorräder, Autos und Rollbretter und Legionen von täglich neu auferstehenden Medienhelden, -figuren, -wesen und -unwesen.

20 Gründe, **nicht** Lehrer/Lehrerin zu werden

- 12. Immer mehr Aufgaben ausserhalb des Kerngeschäfts: Feedbacks, Arbeit in Kommissionen, Sitzungen, ...
- 13. Vorgesetzte danken kaum je für die erbrachten Leistungen. Lehrpersonen sind auf eine nie versiegende Quelle intrinsischer Motivation angewiesen.
- 14. Oft gibt es mehr oder weniger versteckt vorgebrachte Vorwürfe an Elternsprechtagen.
- 15. Klassenlager und Maturereisen...
- 16. In Maturzeitungen darf man die eigenen Missgeschicke und Versprecher nachlesen, die man längst verdrängt hat.
- 17. Lehrpersonen sind oft mit Fragen konfrontiert, die sie nicht beantworten können.

20 Gründe, **nicht** Lehrer/Lehrerin zu werden

18. Lehrpersonen müssen SuS dazu anhalten, selber nachzudenken, zu analysieren, zu forschen, zu erschaffen – und das in einer Zeit, in der Menschen immer mehr in die Rolle von Kunden gedrängt werden, die sich immer und überall aus einer attraktiven Auswahl bedienen können.

19. Vor dem 25. Altersjahr ist an Geldverdienen kaum zu denken.

20. Lehrpersonen sind manchmal Zielscheibe für den Unmut der SuS. Und die SuS sind manchmal Zielscheibe für den Unmut der Lehrperson.

1 Grund, trotzdem Lehrer/Lehrerin zu werden

Der Lehrberuf ist der schönste Beruf, den man sich vorstellen kann. Die Zusammenarbeit mit Jugendlichen ist ebenso abwechslungsreich wie befruchtend, ebenso spannend wie witzig, ebenso herausfordernd wie motivierend. *It takes two to tango!* Aber wenn beide, Jugendliche und Lehrperson, dasselbe Gefühl für Rhythmus und Tempo, für Anstrengung und Entspannung, für Strenge und Improvisation, für Humor und Dramatik haben, dann wird Unterricht zu einem Prozess, der Energie *liefert*, statt zu rauben, der für beide Seiten zu einem lehrreichen und befriedigenden und unvergesslichen Ereignis wird.

Das gelingt nicht ohne Anstrengung, und es gelingt nicht immer. Aber es muss unter allen Umständen angestrebt werden. Jugendliche verdienen den besten Unterricht, zu dem wir fähig sind.

Der schönste Beruf der Welt



Kein Königsweg zu gutem Unterricht

«Was Didaktiker gerne verschweigen»
Gymnasium Helveticum 2/05

«Was Didaktiker ausserdem verschweigen»
Gymnasium Helveticum 4/05

Armin P. Barth

Was Didaktiker gerne verschweigen

Manchmal nützt die schönste Didaktik nichts. Armin P. Barth erklärt, woran das liegen kann und wie dem abzuwehren ist. Er ist überzeugt: Das Entscheidende passiert vor aller Didaktik.

Parfois, la meilleure didactique ne sert à rien. Armin P. Barth explique les raisons de ce phénomène, et comment il est possible de remédier à la situation. Il en est convaincu: ce qui est décisif précède l'utilisation de toute méthode didactique.



Armin P. Barth ist Gymnasiallehrer für Mathematik, Buchautor und Verfasser zahlreicher Artikel. Als Praktikumsleiter beider Zürcher Fachschulen hat er seine Erfahrung in der didaktischen Methodik an Auszubildenden vermittelt. Er wohnt in Zürich und hat zwei Kinder.

■ 1. Wahre Märchen: Von Meiereien und Mathezwerger

Die erste Geschichte handelt von einem Junglehrer, den wir hier «Meier 1» nennen wollen, obwohl er natürlich nicht «Meier 1» hiess; wer heisst schon «Meier 1»? Meier 1 betrat das Klassenzimmer in der Absicht fortzufahren, wo die letzte Lektion geendet hatte, nämlich bei der Definition des Logarithmus und den Logarithmusgesetzen. Der Didaktikprofessor der Hochschule, die Meier 1 besuchte, hatte ihm eingetrichtert, Lektionen mit einem so genannten «IU + Advance Organizer» zu beginnen, einem Informierenden Unterrichtseinstieg ge-

paart mit einem Vorausorganisator. Und so folgte Meier 1 dem geforderten Muster treu und nannte das Thema der Lektion und das Lernziel, äusserte sich kurz dazu, warum das neu zu Lernende brauchbar ist, und notierte die wesentlichen Arbeitsschritte der Lektion, drückte seine Sicherheit darüber aus, dass die Klasse das Neue gut verstehen werde, und repetierte schliesslich alle Begriffe und Formeln, die zum reibungslosen Einordnen des neuen Stoffes bekannt und verstanden sein müssen. Das alles tat er in ungefähr fünf Minuten, und damit waren, was von zahlreichen wissenschaftlichen Studien belegt wird, die Voraussetzungen geschaffen für eine gute Orientierung und eine optimale Leistung der Studierenden.

Bis dahin gereicht die Geschichte zur Freude. Der Unterrichtseinstieg ist hervorragend gelungen, wäre da nicht eine winzige

Einschränkung: Die Klasse bekam von diesem Einstieg kaum etwas mit. Während Meier 1 sprach, betrat eine zu spät kommende Schülerin den Raum und zog die Blicke aller auf sich, weil sie auf der Hand einen Kuchen balancierte. In der Minute danach wanderten noch letzte Einzugscheine durch die Reihen, da es wieder Zeit war für die periodische Speisung der Klassenkasse. Gleichzeitig stiess eine Schülerin mit ihrer Tasche eine Flasche Mineralwasser der Nachbarin um, was zu einer kurzen, aber heftigen Eruption von Zorn dieser (der Nachbarin, nicht der Flasche) führte. In einer anderen Ecke konnte sich ein Schüler nicht eher auf den Unterricht einstellen, als er seine Nachbarschaft über die Vorzüge irgendeiner CD informiert hatte. Als aber Meier 1 seinen Einstieg beendet hatte, war die ganze Klasse konzentriert und willens, dem Unterricht zu folgen, nur war da natürlich der «IU + Advance Organizer» nutzlos verpufft.

Auf taub geschaltet

Das Märchen von Meier 2 nimmt einen noch dramatischeren Verlauf. Meier 2 hat den Unterrichtseinstieg geschafft, und die Schülerinnen und Schüler waren ausserordentlich ruhig, obwohl das geübte Auge sah, dass viele von ihnen nicht bei der Sache waren. Nun führte Meier 2 den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ein, und sie tat dies nach der RBR-Methode, wie es der Didaktiker ihr aufgetragen hatte. Sie gab also eine detaillierte und genaue Übersicht über die Regel (das erste «R»), liess dann Illustrationen, Erklärungen und Beispiele («B») folgen und beendete den Vortrag mit einem Resümee und einer Zusammenfassung in neuen, nichttechnischen Worten (das zweite «R»).

Kein Königsweg zu gutem Unterricht

Die ideale Lehrperson gibt es nicht. Aber mit den folgenden Eigenschaften hat man intakte Chancen, den 1. Preis zu bekommen:

- hohe Fachkompetenz
- Lust auf Fortbildung:
 - Mathematik
 - pedagogical content knowledge, Lehr- und Lernforschung
 - aussermathematische Bereiche
- Lernen als einen aktiven, bedeutungsvollen Konstruktionsprozess verstehen, bei dem neues Wissen an bestehendes Vorwissen anschliesst (nicht Wissen abfüllen)
- eigene Begeisterung für das Fach, deutlich spürbares Engagement
- grosse Motivations-Wirkung
- Interesse am Lernerfolg der SuS, Hilfsbereitschaft
- Professionell gestaltete Lernumgebungen: Einsatz von nachhaltigen Lehr- und Lernmethoden, Förderung von intelligentem Wissen
- Klare Ziele, klare Strukturierung
- Sozialkompetenz (Fairness, Einfühlungsvermögen, Ehrlichkeit, Verlässlichkeit, Konsequenz, Transparenz)
- Humor und Unterhaltungswert



Am wichtigsten...

Und was ist am allerwichtigsten? Wenn Sie nur etwas behalten könnten, so müsste es dies sein:

Aussage einer Schülerin:

«I don't care how much you know until I know how much you care.»

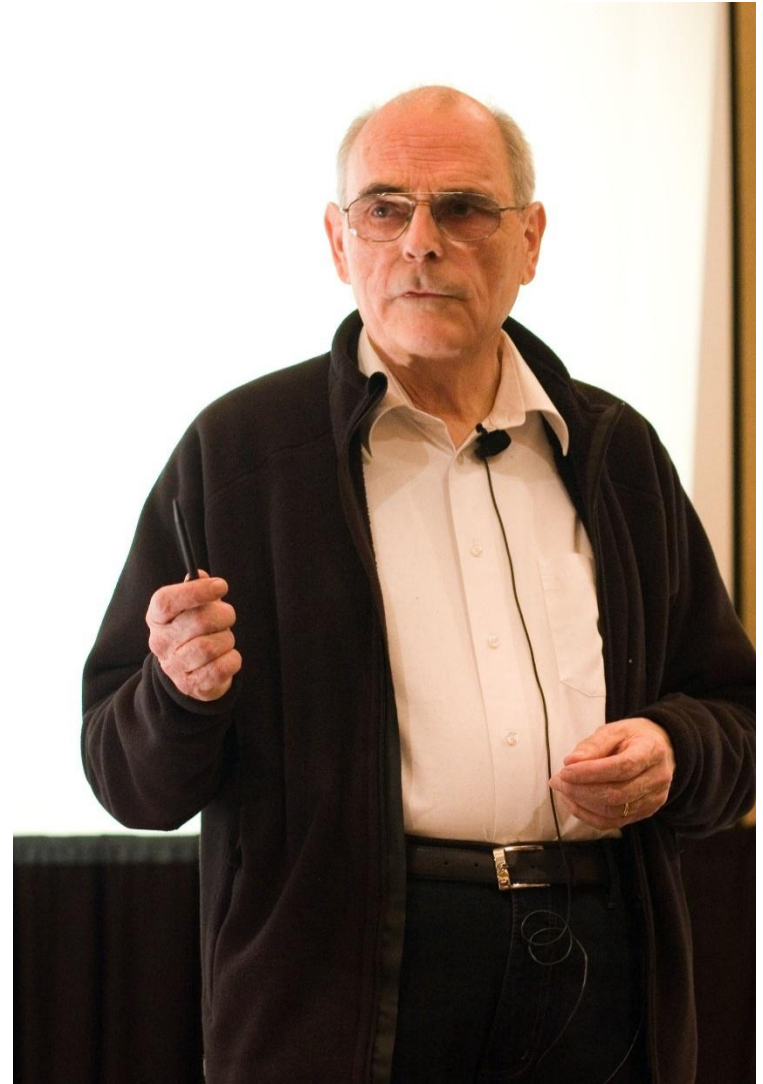
2. Akt

Ein Fallbeispiel:

Wie entsteht Begeisterung?

Volker Strassens Unterricht

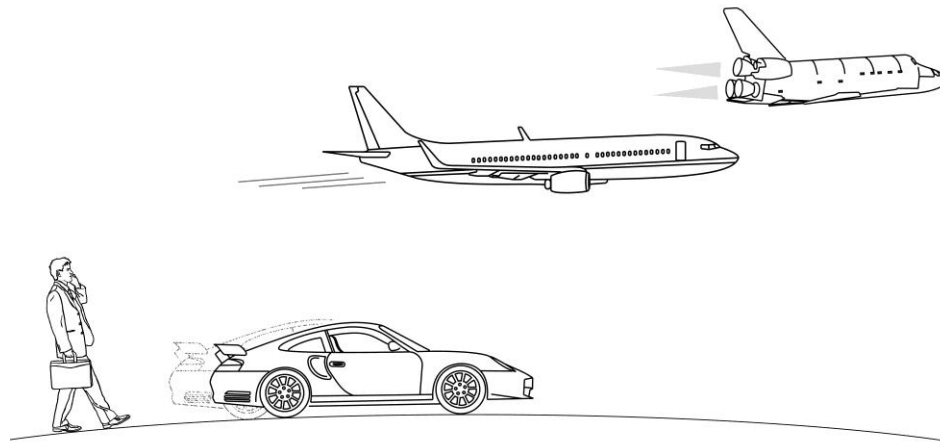
Volker Strassen (*1936)



Volker Strassens Unterricht

Die Landau-Notation:

$$S(n) = O(f(n)) \Leftrightarrow \exists n_0, c: S(n) \leq c \cdot f(n) \quad \forall n \geq n_0$$



Die klassische Matrixmultiplikation ist ein $O(n^3)$ -Algorithmus.
Ist das optimal?

Volker Strassens Unterricht

$A \cdot B = C$, alle vom Format $2^h \times 2^h$ ($h \in \mathbb{N}$)

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} \\ C_{2,1} & C_{2,2} \end{bmatrix}$$

Klassisch: **8 Multiplikationen**: $C_{i,j} = A_{i,1} \cdot B_{1,j} + A_{i,2} \cdot B_{2,j}$

Strassen 1969:

$$Z_1 := (A_{1,1} + A_{2,2}) \cdot (B_{1,1} + B_{2,2})$$

$$Z_2 := (A_{2,1} + A_{2,2}) \cdot B_{1,1}$$

$$Z_3 := A_{1,1} \cdot (B_{1,2} - B_{2,2})$$

$$Z_4 := A_{2,2} \cdot (B_{2,1} - B_{1,1})$$

$$Z_5 := (A_{1,1} + A_{1,2}) \cdot B_{2,2}$$

$$Z_6 := (A_{2,1} - A_{1,1}) \cdot (B_{1,1} + B_{1,2})$$

$$Z_7 := (A_{1,2} - A_{2,2}) \cdot (B_{2,1} + B_{2,2})$$

$$C_{1,1} = Z_1 + Z_4 - Z_5 + Z_7$$

$$C_{1,2} = Z_3 + Z_5$$

$$C_{2,1} = Z_2 + Z_4$$

$$C_{2,2} = Z_1 - Z_2 + Z_3 + Z_6$$

→ **7 Multiplikationen**

(geht nicht mit weniger, Winograd 1971)

Volker Strassens Unterricht

Also:

$$\text{Mult}(2^h) = 7^h$$

$$\text{Add}(2^h) = 18 \cdot (2^{h-1})^2 + 7 \cdot \text{Add}(2^{h-1}) \quad \Rightarrow \quad \text{Add}(2^h) = 6 \cdot (7^h - 4^h)$$

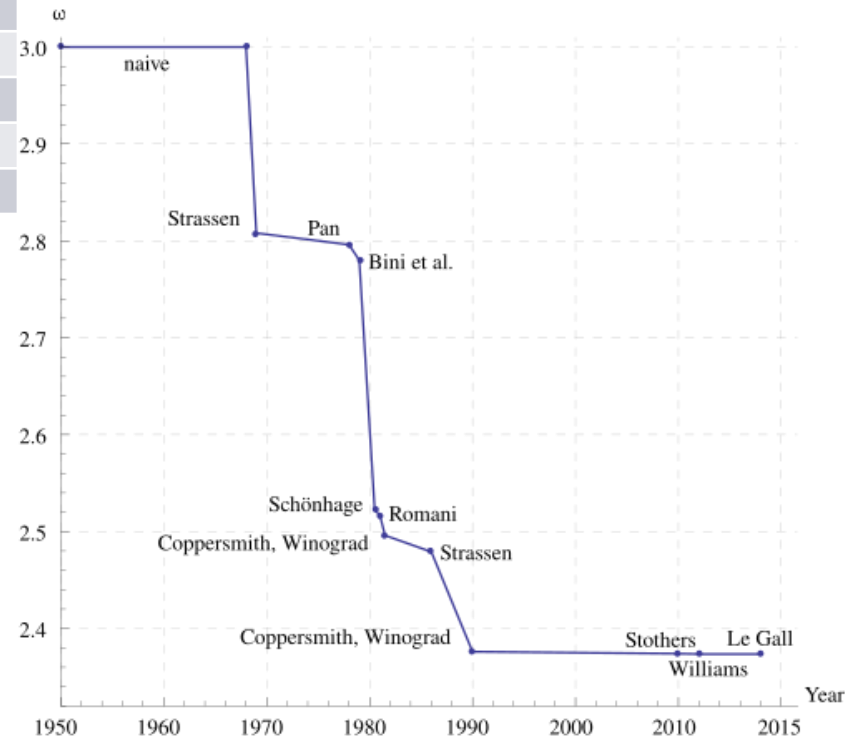
Somit:

$$\begin{aligned} \text{Add}(2^h) + \text{Mult}(2^h) &= 6 \cdot (7^h - 4^h) + 7^h \\ &= 7 \cdot 7^h - 6 \cdot 4^h \\ &< 7 \cdot 7^{\log_2(n)} \\ &= 7 \cdot n^{\log_2(7)} \\ &\approx 7 \cdot n^{2.807} \end{aligned}$$

Also: $O(n^{2.807})$

Volker Strassens Unterricht

Datum	Entdecker	Exponent von n
1969	Strassen	2.807
Oktober 1978	Pan	2.795
November 1978	Bini e.a.	2.78
Juni 1979	Schönhage	2.609
Oktober 1979	Pan	2.605
Oktober 1979	Schönhage	2.548
Oktober 1979	Pan und Winograd	2.522
März 1980	Pan	2.49
September 1986	Coppersmith und Winograd	2.376



Volker Strassens Unterricht

Primzahljagd in Monte-Carlo, Solovay-Strassen, 1977

Kleiner Fermat:

$$n \text{ prim} \quad \Rightarrow \quad a^{n-1} = 1 \pmod{n} \quad \forall a \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$$

Niemand testet eine gerade Zahl auf Primheit, also $n-1$ gerade, also $n-1 = m \cdot 2^r$

$$\text{Daher: } a^{n-1} \pmod{n} = \left(\left(\left((a^m)^2 \right)^2 \right)^{\dots} \right)^2 \pmod{n} \quad (m \text{ ungerade}, r > 0)$$

Lagrange:

$n \text{ prim} \Rightarrow$ Das Resultat vor der letzten Quadratur muss 1 oder $n-1$ sein.

Somit ergibt sich ein einfacher Primzahltest:

Volker Strassens Unterricht

Algorithmus Monte-Carlo

Var n, a, k, i // Integer-Variable n für die zu testende Zahl, a für die Zufallszahl, k für die Grösse der Stichprobe, i für den Schleifenzähler

Input «Zu testende Zahl?», n

Input «Grösse der Stichprobe?», k

For $i = 1$ to k do

Bestimme eine Zufallszahl $a \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$

Berechne $a^{n-1} \bmod n$

If $a^{n-1} \bmod n \neq 1$ or das Zwischenresultat vor der letzten Quadratur ist nicht 1
und nicht $n - 1$

Print «Die Zahl ist sicher nicht prim!»

Goto End

Endif

Endfor

Print «Die Zahl ist wahrscheinlich prim.»

End

Volker Strassens Unterricht

Solovay, Strassen, 1977:

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Test bei einer einzigen Zufallszahl versagt, ist kleiner als 0.5.

$$\Rightarrow P(\text{Test versagt bei 50 Zufallszahlen}) \leq 0.5^{50} \approx 8.9 \cdot 10^{-16}$$

- Noch heute wird dieser Test in der Praxis oft verwendet.
- Verbesserung: Miller-Rabin 1974, 1976, ebenfalls probabilistisch. Heute oft in Kryptographie-Software eingesetzt
- 2002: Agrawal, Kayal, Saxena, «PRIMES is in P», trotzdem bei sehr grossen Zahlen oft weniger effizient als Monte-Carlo.

→ Lehren?

Volker Strassens Unterricht

Lehren?

- Inhalte interessant machen
- Aktuelles einfließen lassen
- Laut denken
- Fragen stellen – nicht Antworten geben
- Voten willkommen heissen
- Gemeinsam forschen
- ...

Ein Beispiel

Wir können in der Schule nicht Mathematik auf Hochschulelevel betreiben, aber zum Beispiel:

Von Jacobi und seiner Vermutung erzählen...

Die Vermutung anhand des folgenden Beispiels überprüfen:

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y + x \\ x^2 + y - 3 \end{pmatrix}$$
$$\det(JF) = 1 \text{ (konst.)}$$

Die Inverse bestimmen. (Tipp: Setze $u := x^2 + y + x$ und $v := x^2 + y - 3$
Löse dann nach x, y auf.)

Auf Anraten meiner Professoren



**Association for the
Advancement of
Artificial Intelligence**

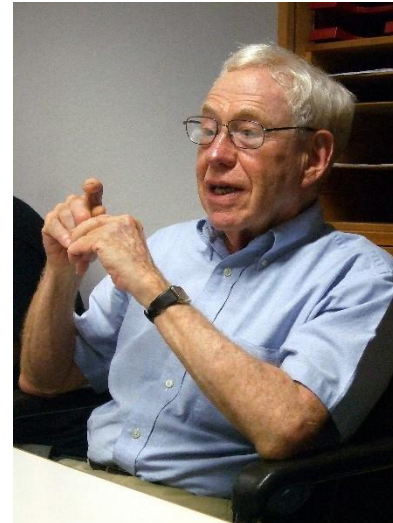
AAAI, früher: American Association of Artificial Intelligence
Gegründet: 1980

Hubert L. Dreyfus getroffen anlässlich der AAAI-Konferenz in Boston, 1985

*1929 – †2017, Prof. am MIT

Renommierter AI-Kritiker

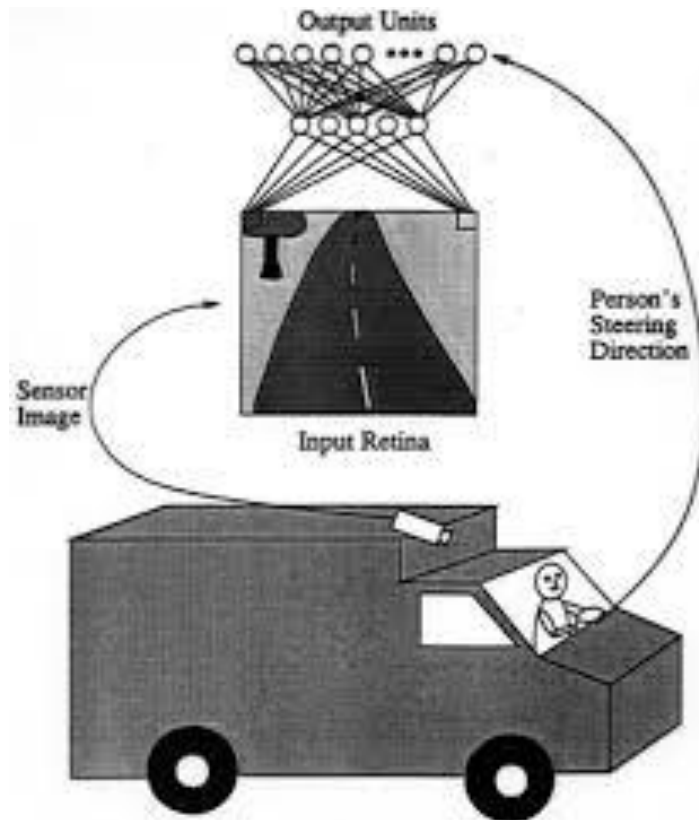
«What computers can't do»



Auf Anraten meiner Professoren

Mitarbeit am ALVINN

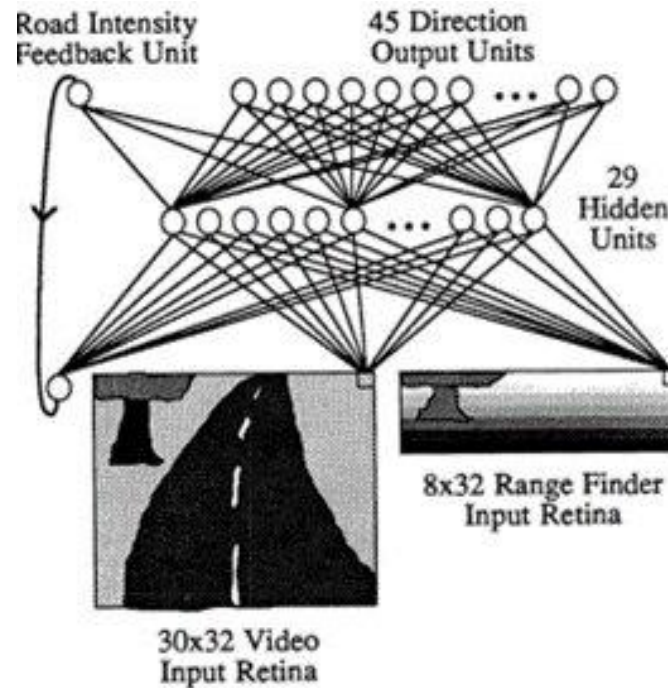
(Autonomous Land Vehicle In A Neural Network)



(ausgerüstet mit Kamera und Laser Range Finder,
Carnegie Mellon University, Pittsburgh)

Auf Anraten meiner Professoren

Neuronales Netzwerk mit Back Propagation Algorithmus



$$\frac{\delta E_{tot}}{\delta w_{lj}^{l-1,l}} = - \sum_{i_1=1}^{n_0} \left\{ \left(d_{i_1} - a_{i_1}^o \right) \cdot \sigma' \left(x_{i_1}^o \right) \cdot \sum_{i_2=1}^{n_{o-1}} \left\{ w_{i_2,i_1}^{o-1,o} \cdot \sigma' \left(x_{i_2}^{o-1} \right) \cdot \sum_{i_3=1}^{n_{o-2}} \left[w_{i_3,i_2}^{o-2,o-1} \cdot \sigma' \left(x_{i_3}^{o-2} \right) \cdot \frac{\delta x_{i_3}^{o-2}}{\delta w_{lj}^{l-1,l}} \right] \right\} \right\}$$

3. Akt

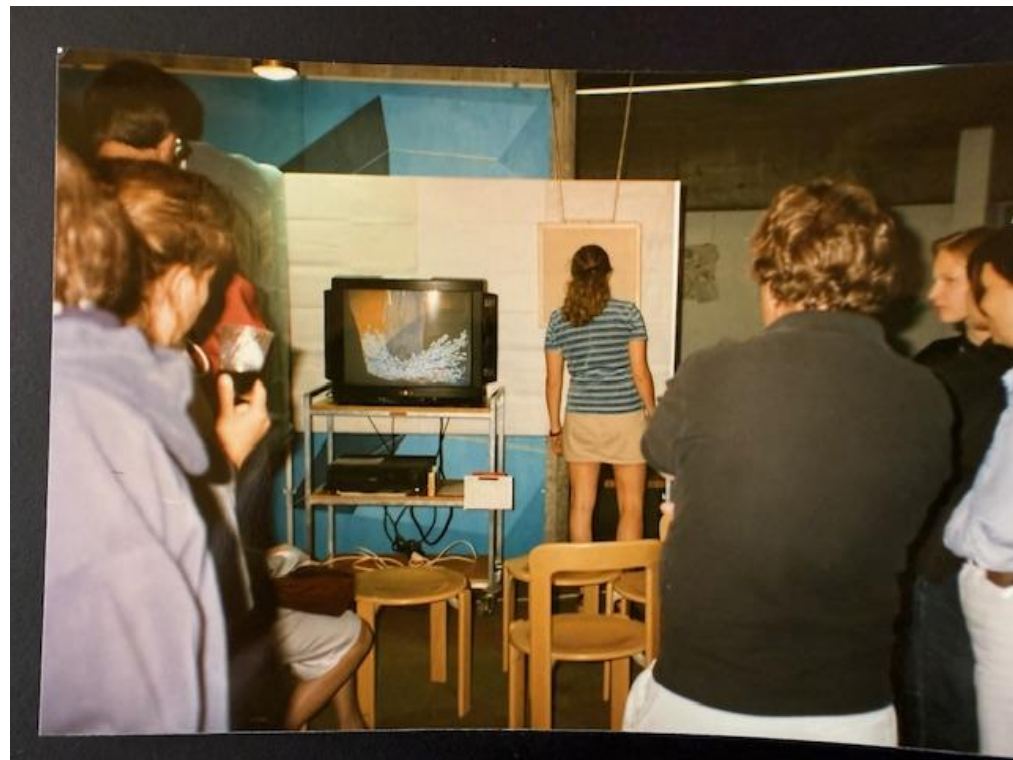
Hilfreiche «Beilagen»

«Beilagen» zum Unterricht

Beschäftigung mit Mathematik ausserhalb des Unterrichts kann bei den Jugendlichen Begeisterung wecken und meine eigene Begeisterung hoch halten...

«Beilagen»

Mathe-Ausstellungen im Schulhaus (z.B. Chaostheorie, Unendlichkeit,...)



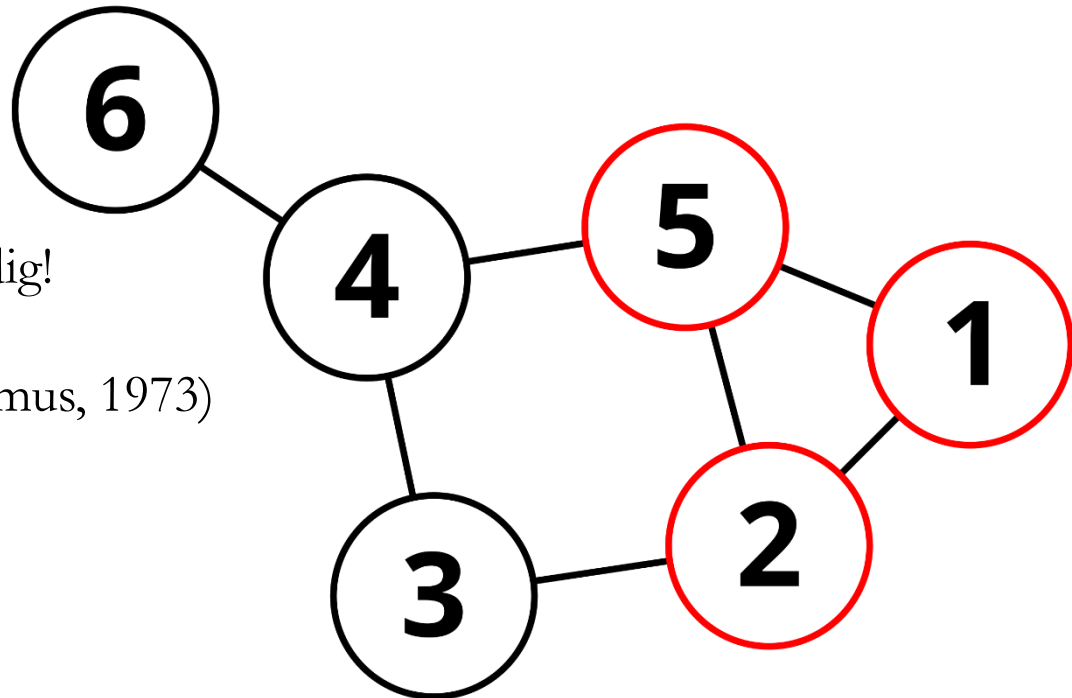
«Beilagen»

Stundenplanung (10 Jahre)

Problem: So viele Lektionen stapeln wie möglich

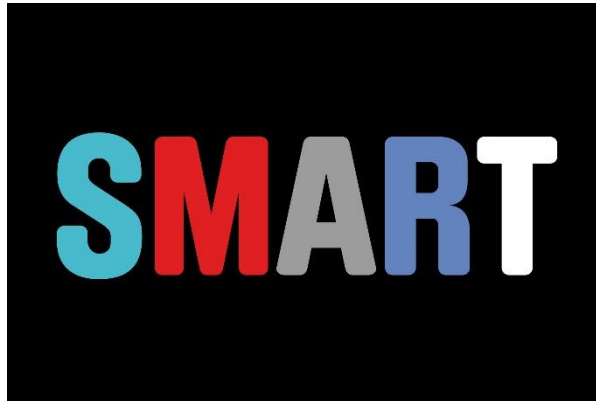
Richard Karp, 1972:
CLIQUE ist NP-vollständig!

(Bron-Kerbosch-Algorithmus, 1973)



«Beilagen»

- Aufbau des Begabtenförderungsinstruments S.M.A.R.T.

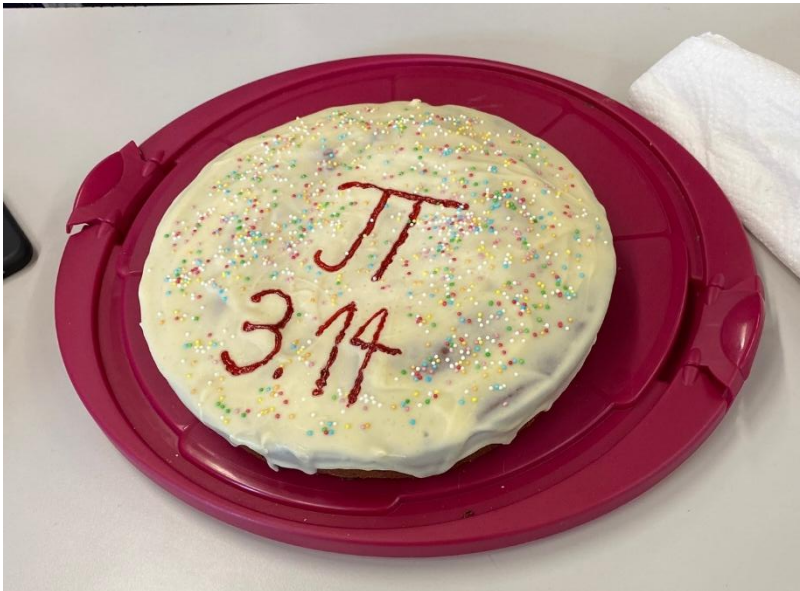


Students **M**otivated Achieve **R**eal Targets

- Gründung des Akzentfaches NAWIMATH
- Mitarbeit bei Lehrplänen
- Mitarbeit beim Schulfach Informatik

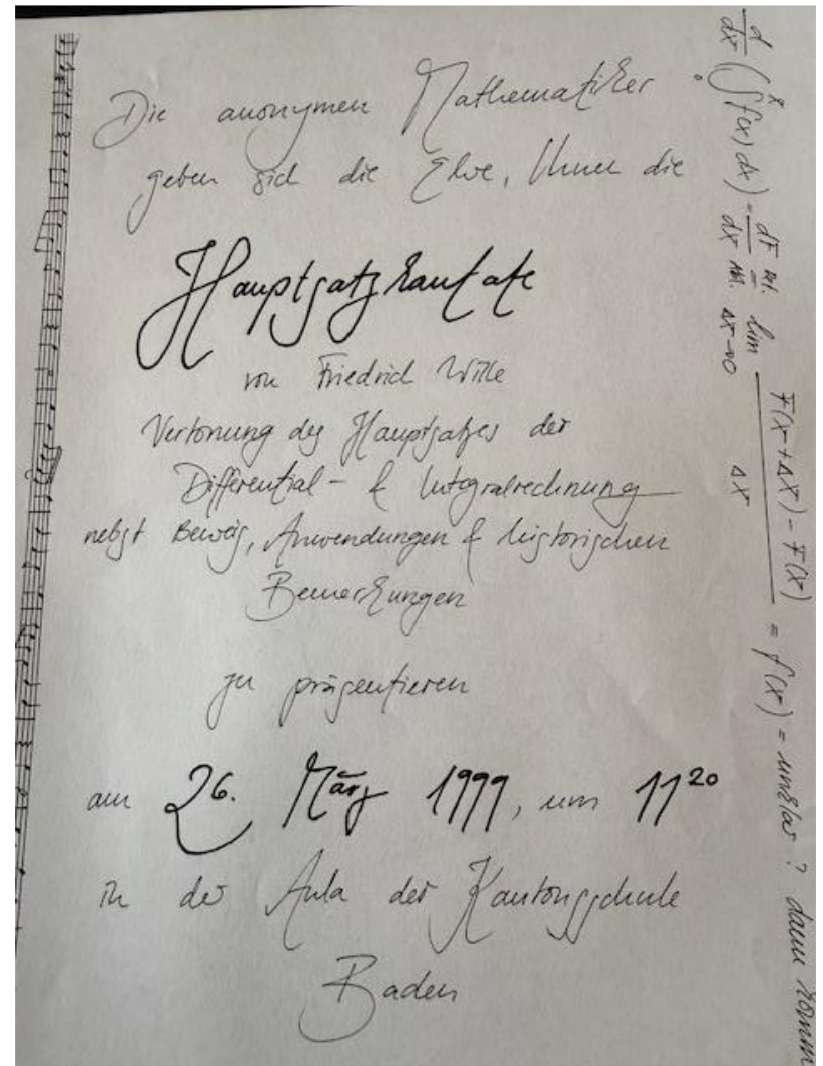
«Beilagen»

- 20 Jahre Känguru-Wettbewerb
- Jährliche Feier zum Pi-Day



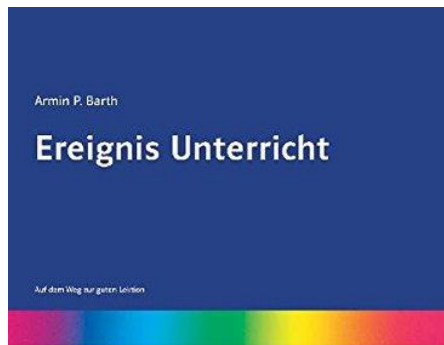
«Beilagen»

- Aufführung der Hauptsatzkantate

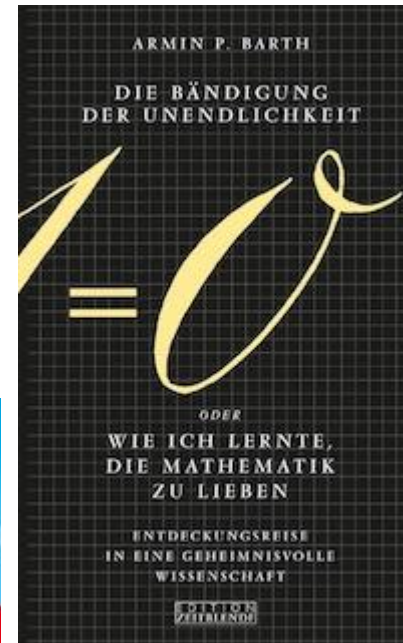


«Beilagen»

- Sabbaticals für Buchprojekte



Klett und Balmer Verlag Zug



«Beilagen»

- Mathe-Kolumne «Café Mathe» in mehreren Zeitungen... (2008 – 2018)

Café Mathe – Ein Stück Mathematik, zu einer Tasse Kaffee zu geniessen. Von Armin P. Barth

Mathematische Lügengeschichten haben lange Beine

IN DER MATHEMATIK ist es sehr schwierig, zu lügen, denn falsche Behauptungen können in der Regel durch Berechnung oder Argumentation widerlegt werden. Gleichwohl spielen Lügen auch in der Mathematik eine wichtige Rolle, in der Grundlagenforschung ebenso wie bei logischen Rätseln. Vor etwa 100 Jahren stürzte die Mathematik sogar in eine Krise, weil in ihren Grundlagen Widersprüche (Antinomien) auftauchten, die gut mit einer Lügengeschichte illustriert werden können.

Epimenides, ein Kreter, soll einmal gesagt haben: «Alle Kreter lügen.» Gemeint war sicher, dass sie immer lügen. Diese auf eine Bibelstelle (Brief des Paulus an Titus, 1:12) zurückgehende Aussage liefert zwar noch keinen Widerspruch, aber immerhin eine gute Gelegenheit zu einem ansprechenden logischen Argument.

Falls die Aussage wahr wäre, müsste es zutreffen, dass alle Kreter immer lügen; folglich müsste auch Epimenides lügen, und daher könnte die Aussage doch nicht wahr sein. Wenn wir dagegen annehmen, der Satz wäre falsch, dann entsteht kein Problem: Wenn es falsch ist, dass alle Kreter immer lügen, dann gibt es eben mindestens einen Kreter, der nicht immer lügt, und darin steckt keinerlei Widerspruch. Es ist dann einzig klar, dass Epimenides kein Kreter ist, der stets die Wahrheit sagt.

Ein Widerspruch entsteht erst dann, wenn wir die Aussage in einem Sinne verschärfen, wie es Bertrand Russell vorgeschlagen hat: Epimenides sagt: «Das, was ich gerade jetzt sage, ist eine Lüge.» Das ist in der Tat eine Antinomie, denn wenn der Satz wahr wäre,



müsste er eine Lüge sein, und wenn er eine Lüge wäre, so müsste er wahr sein. Tatsächlich tauchten in der mathematischen Grundlagenforschung vor et-

wa 100 Jahren Widersprüche genau dieser Art auf und verlangten Gegenmassnahmen. Russell etwa versuchte selbstreferenzielle Aussagen dadurch auszuschliessen, dass er sie hierarchisch anordnete und festlegte, dass man eine Aussage über die Wahrheit oder Falschheit eines Satzes nur auf einer höheren Stufe machen darf als der Stufe, auf der der Satz selber ausgesagt wird.

Eine anregende Einkleidung solcher Antinomien ist die Geschichte vom Reisenden, der Kannibalen in die Hände fällt. Der Chefkannibale stellt ihn vor folgende unappetitliche Wahl: «Mach irgendeine Aussage. Wenn sie wahr ist, wirst Du gekocht, und wenn sie falsch ist, wirst Du geröstet.» Der Reisende ist ein gewiefter Logiker und antwortet: «Das, was ich jetzt sage, ist falsch.»

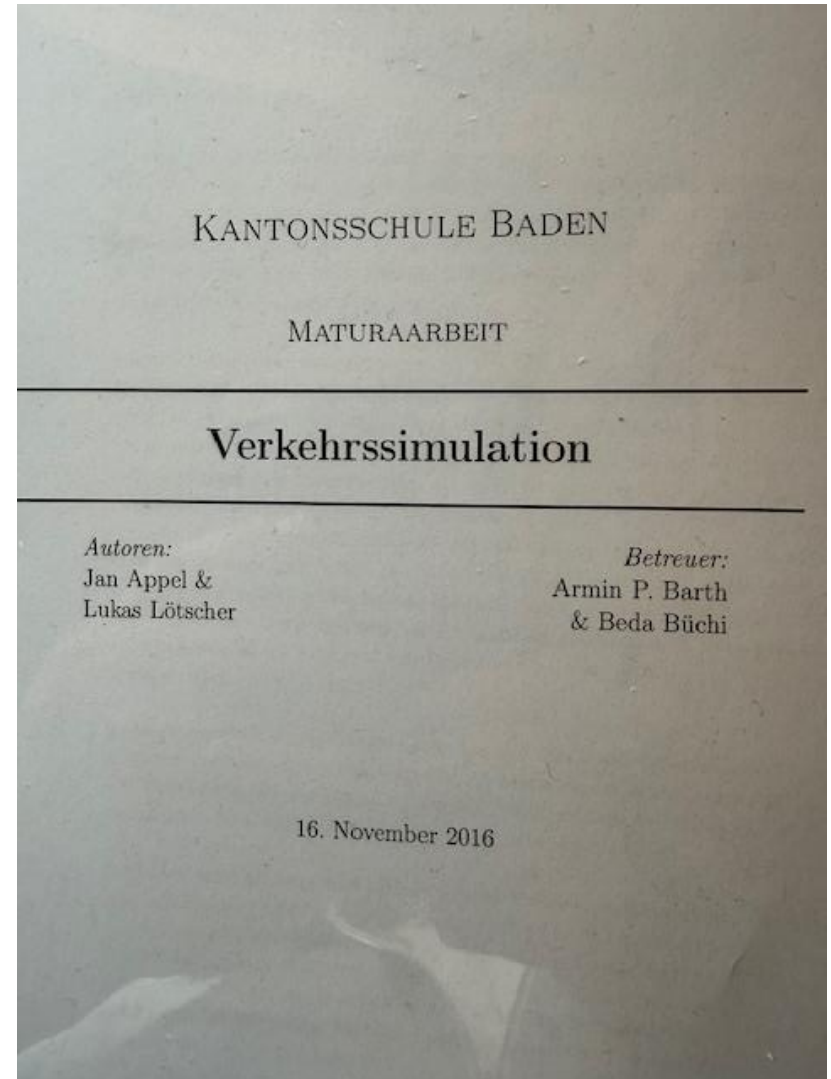
Darauf durften die Kannibalen den Reisenden weder kochen noch rösten.

Hier ist eine weitere Lügengeschichte: In der Stadt Russelltown begegnen Sie Alice, Bob und Cedric. Alice lügt immer am Montag, Dienstag, Mittwoch und Samstag. Bob lügt immer am Donnerstag, Freitag und Samstag. Cedric lügt immer am Dienstag, Mittwoch und Freitag. An den nicht genannten Tagen sagt aber jeder stets die Wahrheit. Nun hören Sie zufällig das folgende Gespräch mit Alice: «Gestern war einer meiner Lügentage.» Bob: «Witzig, bei mir auch.» Cedric: «So ein Zufall, auch bei mir.» An welchem Tag haben Sie dieses Gespräch gehört?

Armin P. Barth ist Gymnasiallehrer an der Kantonsschule Baden und Autor. Die Lösung erscheint auf der Lesebriefseite am Montag, dem 7. Oktober.

«Beilagen»

Viele erfreuliche Maturarbeiten...



«Beilagen»

Viele erfreuliche Maturarbeiten...



AUSWERTUNG "PRÜFUNG SCHWEIZER ZAHLENBUCH"

DATUM DER TESTDURCHFÜHRUNG:
24.09.2014

ANZAHL SCHÜLERINNEN:
157, davon 79 mit Theorieheft und 78 ohne Theorieheft

SCHULEN MIT THEORIEHEFT:
Habsburg, Tannegg Baden, Dättwil, Kappelerhof, Freienwil

SCHULEN OHNE THEORIEHEFT:
Windisch Dorf, Halde Wohlen, Hendschiken, Villnachern, Bözberg

MAXIMALPUNKTZAHL:
31 Punkte

I. MITTELWERTE

Report

Punkte Total

Theorieheft	Mean	N	Std. Deviation
mit Theorieheft	23.65	79	4.504
ohne Theorieheft	21.32	78	5.497
Total	22.49	157	5.140

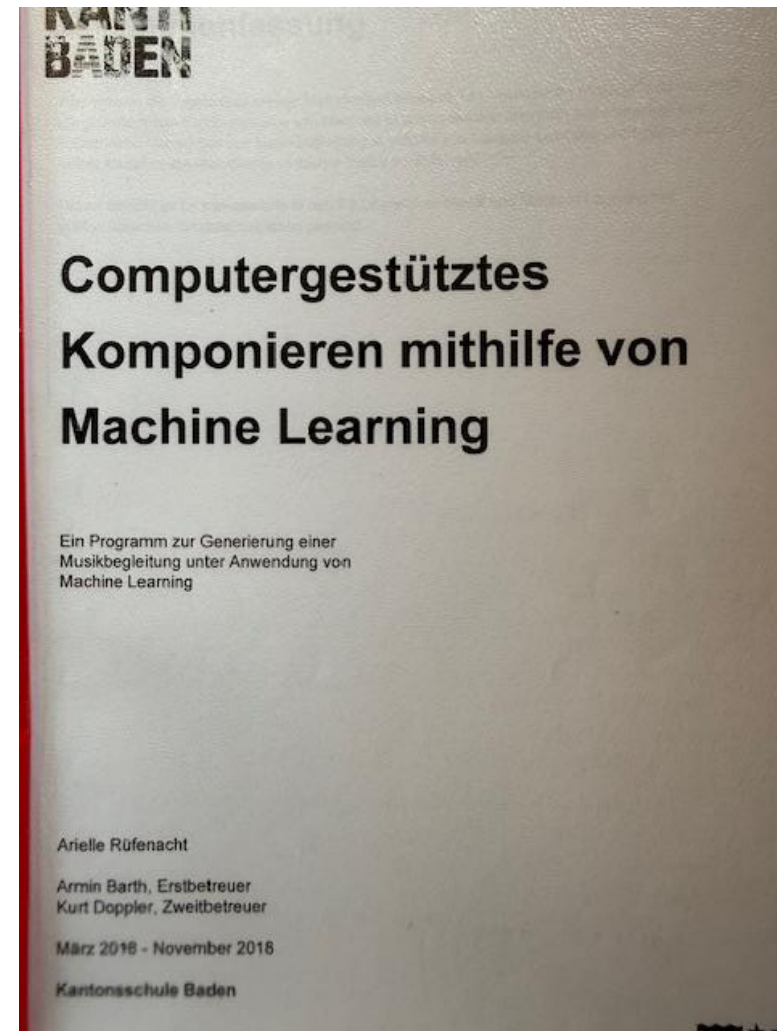
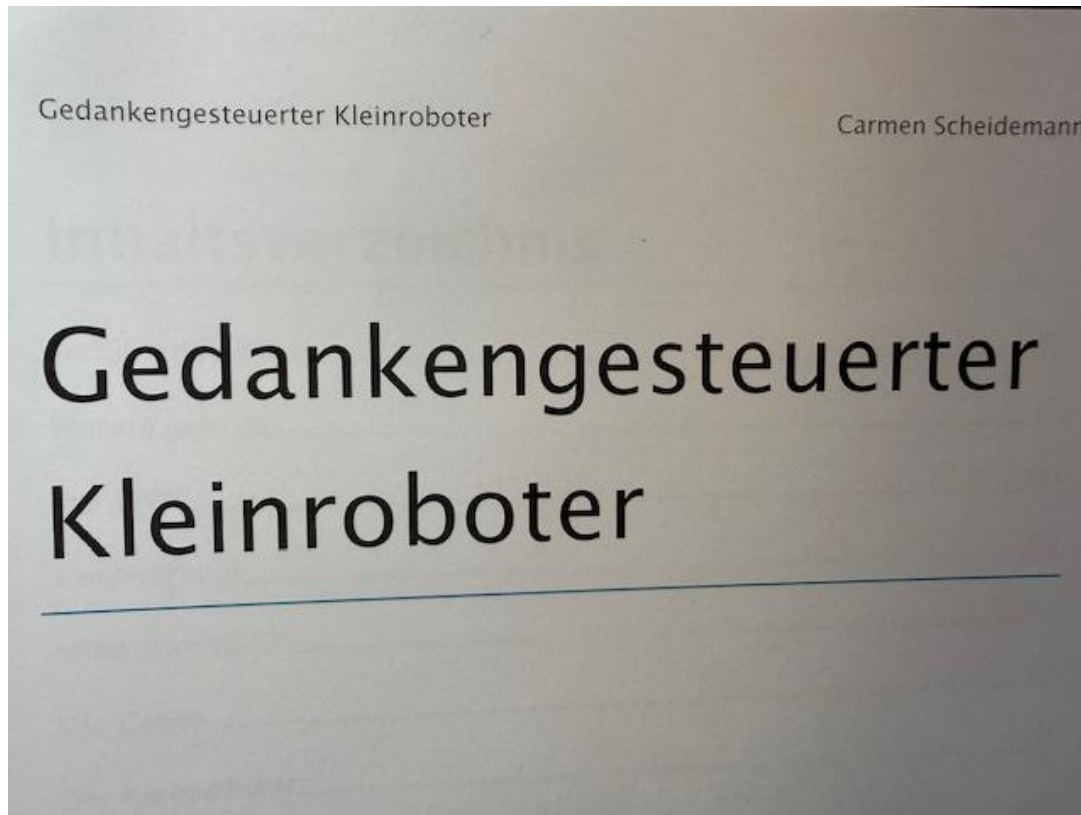
Independent Samples Test

	Levene's Test for Equality of Variances	t-test for Equality of Means						
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference
Punkte Total	Equal variances assumed	1.967	.163	2.901	155	.004	2.325	.802
	Equal variances not assumed			2.897	148.493	.004	2.325	.803
							95% Confidence Interval of the Difference	
							Lower	Upper
							.742	3.909
							.739	3.911

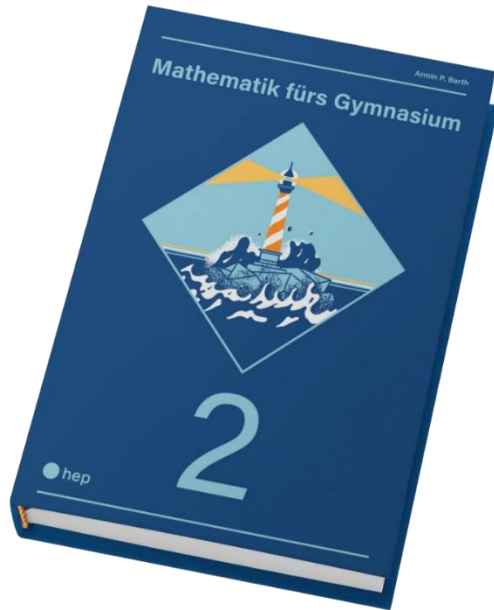
-> Die Gruppen unterscheiden sich signifikant in ihren Mittelwerten.

«Beilagen»

Viele erfreuliche Maturarbeiten...



«Beilagen»



«Beilagen»

Neuste «Beilage»:

YouTube-Kanal: Café Mathe by Armin P. Barth



4. Akt

Lehr- und Lernforschung

Lehr- und Lernforschung

14 Jahre ETH-Lernzentrum



Post von Elsbeth...

Zentrale Erkenntnisse der modernen LLF

- Das **Vorwissen** ist ein sehr wichtiger Prädiktor schulischen Erfolgs.
Lernen ist ein schrittweiser Wissens- und Verstehens-Aufbau auf einer Basis von Vorwissen.

Beispiel: Kürzen ist das «Wegstreichen gleicher Dinge» in Zähler und Nenner.

$$\frac{a \cdot b - c}{a \cdot d} = \frac{b - c}{d}$$

→ Wir müssen lernen, diese Misskonzepte zu kennen, zu antizipieren, um ihnen gezielt begegnen zu können.

Zentrale Erkenntnisse der modernen LLF

- Eine der Instruktion vorgelagerte **Erkundungsphase** verbessert das Lernen signifikant (Kognitive Aktivierung).

Beispiel: M. Kapur, *Productive failure in learning math*.
In: Cognitive Science 2014, 1 - 15



- Who is the most consistent Basketball player?
- Mike and Dave are the top two players in a Basketball league. The table shows the number of points scored by Mike and Dave over the course of 20 games in the league. An award has to be given to the more consistent player of the two. The decision has to be made mathematically. Design as many measures of consistency as you can to determine the more consistent player.

Zentrale Erkenntnisse der modernen LLF

Game	Mike	Dave
1	24	23
2	19	19
3	24	26
4	20	24
5	25	20
6	21	21
7	25	23
8	21	24
9	26	25
10	22	29
11	26	24
12	22	22
13	27	25
14	23	24
15	27	27
16	23	23
17	28	24
18	24	28
19	29	24
20	24	25

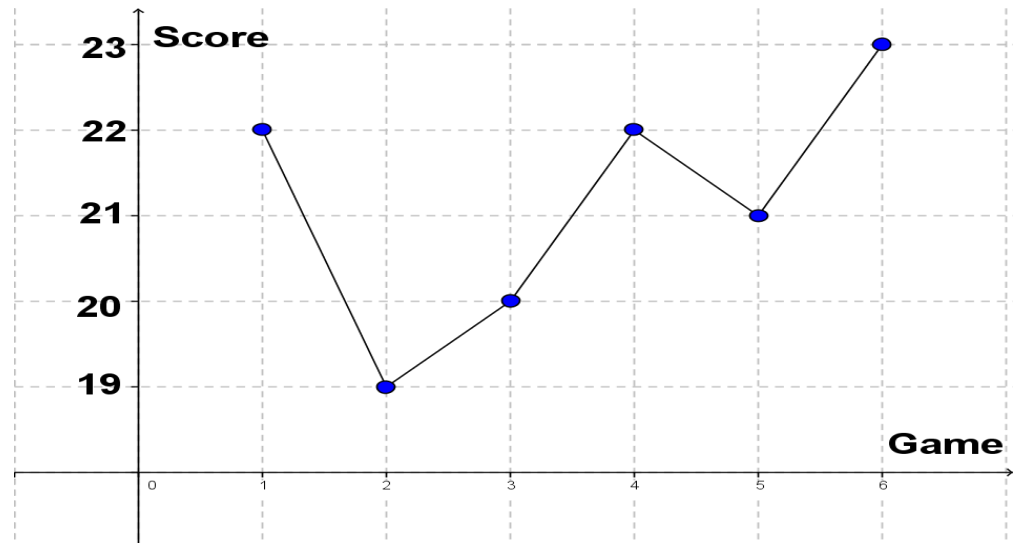
Zentrale Erkenntnisse der modernen LLF

Typische Schülerantworten:

- Extrema suchen, evtl. Differenz bilden
- Differenzen aufeinanderfolgender Werte, davon Durchschnitt
- Arithmetisches Mittel und Median bilden
- Summe der Differenzen $x_i - \bar{x}$ bilden (→ Enttäuschung ☹)
- Vorzeichen der Summanden ignorieren: $\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|$

- Graphenlänge berechnen:

- ...



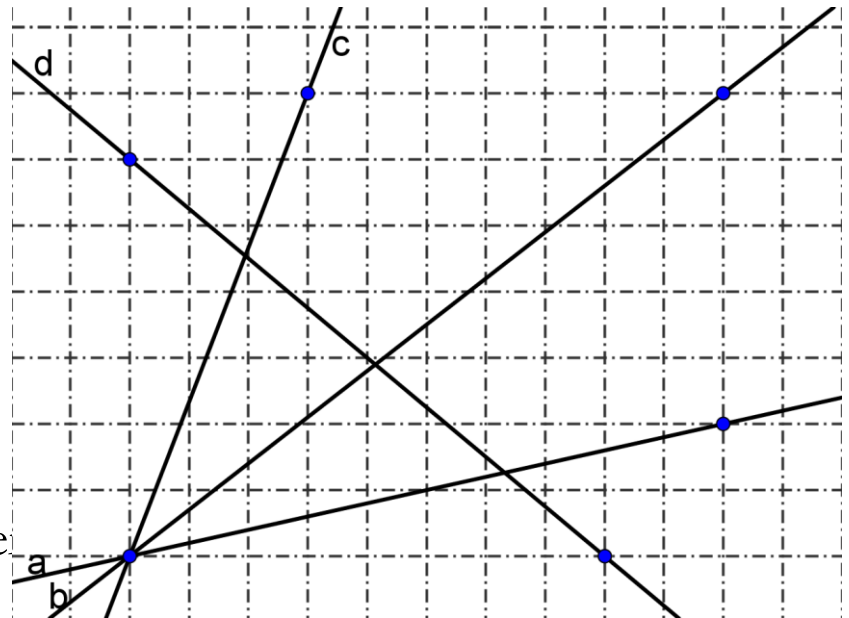
Zentrale Erkenntnisse der modernen LLF

Beispiel:

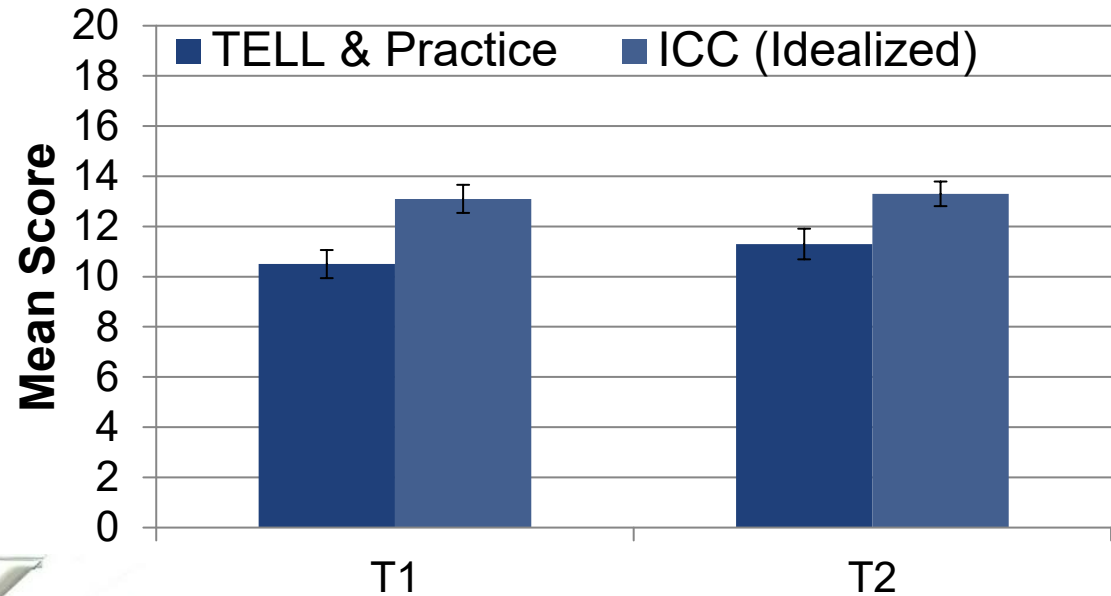
L. Schalk, R. Schumacher, A. P. Barth, E. Stern, *When problem-solving followed by instruction is superior to the traditional tell-and-practice sequence*, in: Journal of Educational Psychology (2018)

Alice hat die folgende Abbildung einiger Geraden vor sich. Sie ruft gleich Bob an, der die Graphik nicht sieht, und möchte ihm erzählen, wie die Geraden aussehen und insbesondere, wie steil sie sind.

Erfinden Sie eine Masszahl für die Steilheit



Zentrale Erkenntnisse der modernen LLF



Zentrale Erkenntnisse der modernen LLF

- Eine frühere naive Theorie wird durch guten Unterricht nicht „überschrieben“, sondern bestenfalls unterdrückt. → Unterricht ist auch ein ständiger Kampf gegen (dieselben)

Misskonzepte.

- Ergebnisse aus Studien zeigen, dass die Auseinandersetzung mit typischen Fehlern Schülerinnen und Schüler zu einer vertieften Auseinandersetzung mit dem Stoff anregt – und nicht, wie befürchtet werden könnte, leicht zu falschem Denken verleitet.

→ Positive **Fehler-Kultur** pflegen

Zentrale Erkenntnisse der modernen LLF

- **Mental tools** erleichtern das Verständnis theoretischer Zusammenhänge, indem sie die Aufmerksamkeit auf abstrakte Merkmale lenken. Und sie spielen beim Transfer von Wissen eine zentrale Rolle
- Massnahmen zur **Konzeptsicherung** (gefolgt von Üben&Anwenden) führen eher zu intelligentem und nachhaltigem Wissen als blosses Üben&Anwenden.
- Zahlreiche Studien belegen die sehr positiven Effekte von **Selbsterklärungen** in allen möglichen Kontexten.
- Zur Vertiefung des Wissens haben sich in der Lehr- und Lernforschung auch Aufträge für **metakognitive Fragen** besonders bewährt. Während es bei Selbsterklärungs-Aufträgen und Modellvergleichen darum geht, dass die Schülerinnen und Schüler das Gelernte richtig wiedergeben und von Falschem abgrenzen, dienen metakognitive Fragen vor allem dazu, sie zu einer präzisen Bestandsaufnahme ihres eigenen Kenntnisstandes anzuleiten – wozu unter Umständen auch eine genaue Analyse des eigenen Nichtwissens zählen kann.

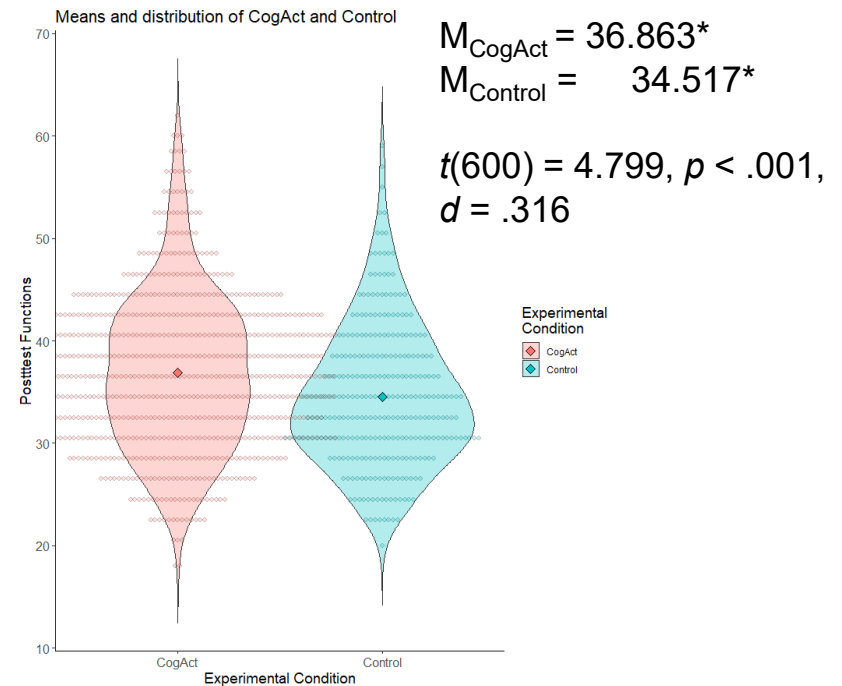
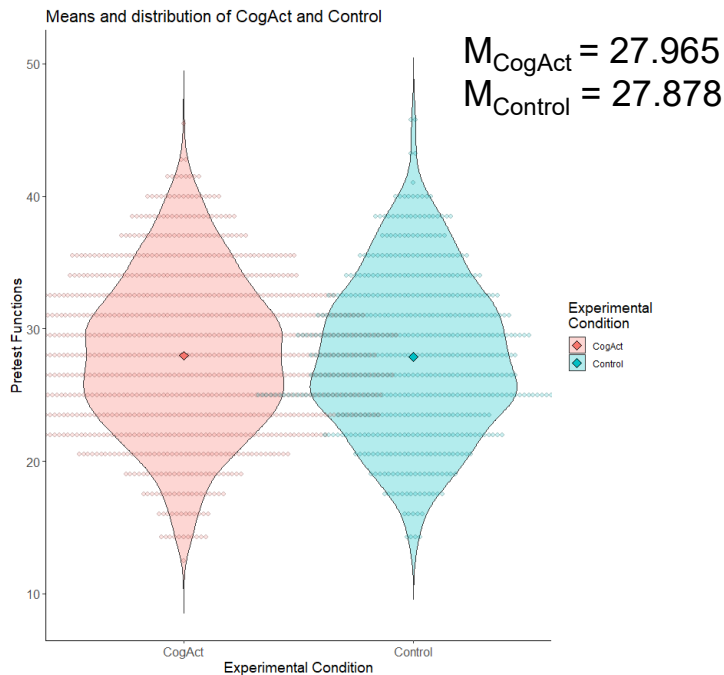
Zentrale Erkenntnisse der modernen LLF

- **Formative Assessments** fördern intelligentes und nachhaltiges Lernen.
- Die Transfer-Forschung der vergangenen Jahrzehnte hat gezeigt, dass menschliche Kognition weitaus situations- und anforderungsspezifischer ist, als dies lange Zeit in Theorien der Informationsverarbeitung angenommen wurde (**Situiertes Lernen**). Aufgaben aus unterschiedlichen Inhaltsgebieten können sich trotz isomorpher Struktur deutlich in ihrer Schwierigkeit unterscheiden, und die beim Lösen bestimmter Aufgaben erworbenen Strategien werden nur selten spontan auf neue Aufgaben ähnlicher oder gleicher Struktur übertragen. Die Ergebnisse der Forschung zur Expertise gehen in eine ähnliche Richtung: Menschen, die in einem bestimmten Bereich Höchstleistungen erbringen, erweisen sich in anderen - teilweise sogar angrenzenden - Bereichen als lediglich durchschnittlich.

→ Resultate der TRAM-Studie (2023):

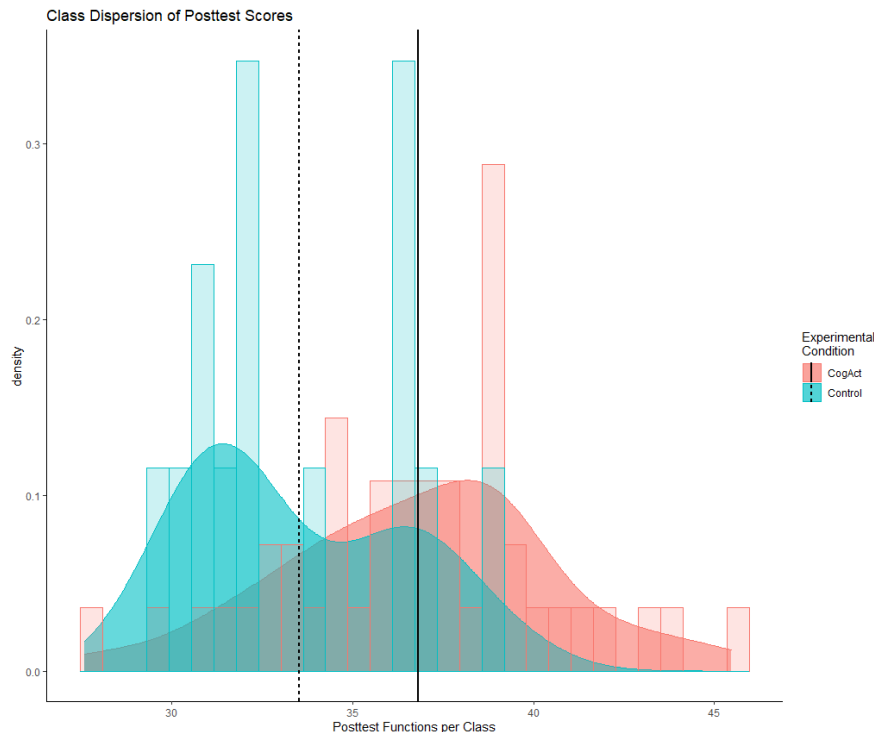
Functions Pretest and Posttest

Means and distribution per condition



Functions Pretest and Posttest:

Class level dispersion Posttest Functions



Large variation, due to lower number of classes with completed posttests

45 CogAct classes

14 Control classes

Total number of **1026 students**

$$M_{\text{CogAct}} = 36.817^*$$

$$M_{\text{Control}} = 33.528^*$$

$$t(26) = 3.36, p = .002$$

Thus, similar to the difference on individual level, we see a significant mean difference between classes in CogAct condition and control condition

5. Akt

I ♥ Math

Danke an die Mathematik...

...für Schönheiten, die mich 40 Jahre lang fasziniert haben:

Fantastische Idee: **Programme sind Daten**. Also kann man einer Maschine ein Programm eingeben und sie somit universell machen!

$$\text{Code}(q_u, Z_v, \text{Bew.}) = 2^u \cdot 3^v \cdot 5^{\text{Code der Bewegung}}$$

Sind $C_1, C_2, \dots, C_s$ die Codes der einzelnen Konklusionen in der standardisierten Reihenfolge des TM-Programms, so wählen wir als Code des ganzen Programms die Zahl

$$p_1^{C_1} \cdot p_2^{C_2} \cdot \dots \cdot p_s^{C_s}$$

wobei p_i die aufeinanderfolgenden Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, ... sind. Wir nennen diesen Code auch *Gödelnummer* (GN) der Turing-Maschine.

→ **Universalmaschine**

Danke an die Mathematik...

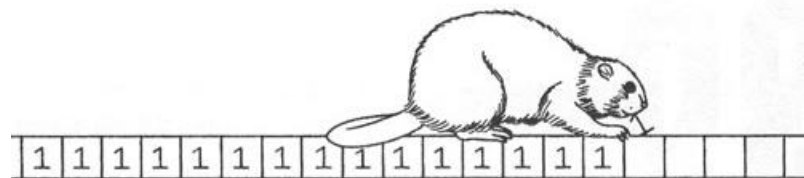
...für Schönheiten, die mich 40 Jahre lang fasziniert haben:

Es gibt nicht-berechenbare Funktionen: Die busy-beaver-Funktion $bb : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$bb(n)$ ist definiert als die maximale Anzahl von zusammenhängenden Einsen, die eine terminierende Turing-Maschine mit n Zuständen und genau 2 Zeichen ($\mathcal{A} = \{0,1\}$) auf ein leeres Band schreiben kann.

$$bb(1)=1, \quad bb(2)=4, \quad bb(3)=6, \quad bb(4)=13, \dots$$

$$bb(12) \geq 6 \cdot 4096^{\left(4096^{4096} \dots (4096^4)\right)}, \text{ wobei die Zahl 4096 insgesamt 166mal erscheint}$$



Satz: Die Funktion bb ist nicht TM-berechenbar.

(Rado, 1962, Dunham, 1965)

Danke an die Mathematik...

...für Schönheiten, die mich 40 Jahre lang fasziniert haben:

Es gibt algorithmisch unentscheidbare Probleme: Halteproblem (Turing, 1936)

Die Sprache

$$HP := \{(n, x) \mid \text{TM mit GN } n \text{ und Input } x \text{ hält an}\}$$

ist algorithmisch unentscheidbar,

d.h. es gibt keine TM, die genau für jedes Tupel aus HP nach endlich vielen Schritten in den akzeptierenden Zustand übergeht.

(Widerspruchsbeweis)

Ein Problem B heisst *auf das Halteproblem reduzierbar*, $HP \leq B$, wenn eine TM-berechenbare Reduktionsfunktion r existiert, so dass $(n, x) \in HP \Leftrightarrow r(n, x) \in B$.

Viele Beweise von Unentscheidbarkeit lassen sich durch Reduktion führen.

Danke an die Mathematik...

...für Schönheiten, die mich 40 Jahre lang fasziniert haben:

Die **unbeschränkte Konkatentationstheorie UKTh** – eine kleine «mathesis universalis»

Alphabet: $\{0, 1,), (, ,, ;\}$

Zeichen für leeres Wort: e

Wörter: endliche Ketten von Zeichen aus dem Alphabet

Grundsymbole der Logik: $\forall, \exists, =, \neq, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow$

Buchstaben, $u, v, w, x, y, \dots$ (auch indiziert) als Variablen für Wörter

Operation «Konkatentation»: $*$

Beispiele von Aussagen:

$$\begin{aligned} &\exists y \left(\forall x (y * x = x) \right) \\ &\forall x \left((x \neq e) \rightarrow \exists y, z (x = y * 1 * z) \right) \end{aligned}$$

Leibniz weint, denn: **Die UKTh ist algorithmisch unentscheidbar.**

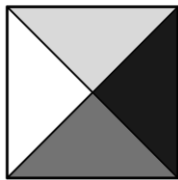
(Beweis durch Reduktion auf das HP)

Danke an die Mathematik...

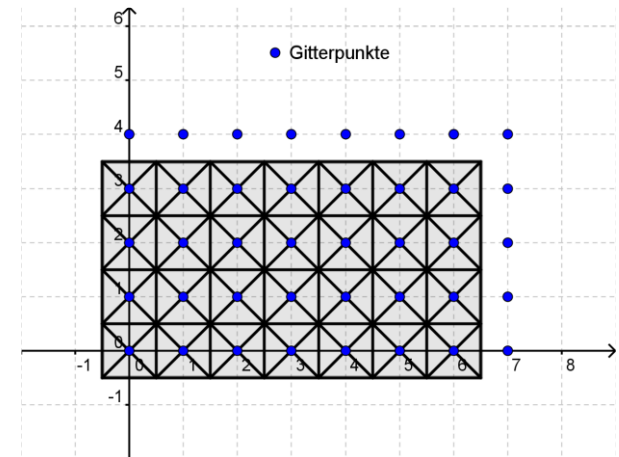
...für Schönheiten, die mich 40 Jahre lang fasziniert haben:

Das Fliesenproblem von Hao Wang (1961, 1965)

Eine Fliese:



Gegeben: Endlicher Satz F von Fliesen (o, r, u, l) sowie Eckfliese
 Ziel: 1. Quadranten (nach oben und rechts unbeschränkt) fliesen
 unter Einhaltung der Farbbedingung



Die Sprache $FP := \{(F, c) \mid \exists f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow F \text{ mit } f(0,0) = c \text{ und erfüllter Farb-Bedingung}\}$
 ist algorithmisch unentscheidbar.

(Winfree 1998: Das hat Konsequenzen auf die Konstruktion von «molekularen Fliesen» aus DNA.)

Danke an die Mathematik...

...für Schönheiten, die mich 40 Jahre lang fasziniert haben:
Viele weitere unentscheidbare Probleme

- **Korrespondenzproblem von Post (1947)**

Gibt es eine Folge von Dominosteinen, so dass die Wörter auf der oberen Hälfte der Dominosteine (von links nach rechts gelesen) dasselbe Wort ergeben wie die (von links nach rechts gelesenen) Wörter aus der unteren Hälfte der zusammengelegten Dominosteine?

- **Satz von Dowling, 1989: There are no safe virus tests**

- **Sätze von Richardson, 1968** (über die Beschränkungen von Taschenrechnern)

(Die Menge F enthalte auf allen reellen Zahlen definierte reellwertige Funktionen in einer Unbekannten x , und zwar $id(x)=x$, $r(x)=r$ für alle rationalen Zahlen r , ferner sei sie abgeschlossen unter Add., Mult. und Komposition.

Enthält F zudem $\log(2)$, π , e^x und $\sin(x)$, so ist das Negativitätsproblem unlösbar.

Enthält F auch noch die Betragsfunktion, so ist das Identitätsproblem unlösbar.

Usw.)

- **Hilbert, Nr. 10** (Hilbert, 1900, Matijassewitsch, 1970)

Danke an die Mathematik...

...für Schönheiten, die mich 40 Jahre lang fasziniert haben:

Und wenn eine Theorie entscheidbar ist, ist dann alles gut?

Beispiel **Presburger-Arithmetik (PA)**:

- Natürliche Zahlen
- Einzige Operation: + $\forall a \exists b (a + 1 = b)$ $\forall a \forall b ((a < b) \rightarrow (a + 1 < b + 1))$
- Ordnungsrelation: <

Die Theorie ist nicht sehr reichhaltig! Aber wenigstens gilt:

PA ist entscheidbar! (Presburger, 1929)

M. Presburger: „Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik der ganzen Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt“

Compte-Rendus du 1. Congrès des Mathématiciens des pays Slav., Warsaw, 1929, pp. 92-101.

Danke an die Mathematik...

...für Schönheiten, die mich 40 Jahre lang fasziniert haben:

Entscheidbarkeit heisst noch lange nicht, dass das Problem *tractable** ist:

Zu jedem Entscheidungsalgorithmus von PA gibt es eine Zahl n_0 , so dass zu jedem $n > n_0$ eine Formel F der Länge n existiert, so dass der Algorithmus mehr als

$$2^{2^{c \cdot n}}$$

Schritte benötigt, um zu entscheiden, ob F gilt oder nicht.

Die Zeit-Komplexität von PA ist also super-exponentiell! ☹

(Die Raum-Komplexität übrigens auch!)

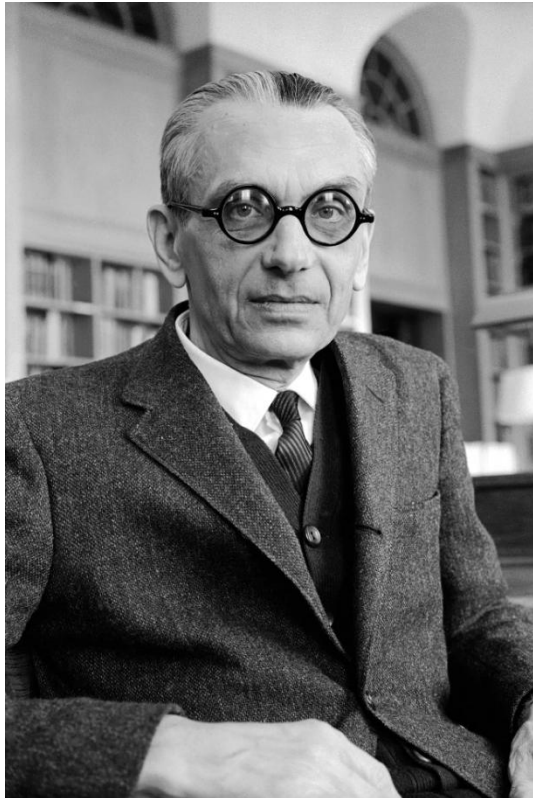
(Fischer-Rabin, 1974)

* gefügig

Danke an die Mathematik...

...für Schönheiten, die mich 40 Jahre lang fasziniert haben:

Und natürlich Gödel und seine Unvollständigkeitssätze
Beweisbarkeit und Wahrheit ist nicht dasselbe.



Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I¹⁾.

Von Kurt Gödel in Wien.

1.

Die Entwicklung der Mathematik in der Richtung zu größerer Exaktheit hat bekanntlich dazu geführt, daß weite Gebiete von ihr formuliert wurden, in der Art, daß das Beweisen nach einigen wenigen mechanischen Regeln vollzogen werden kann. Die umfassendsten derzeit aufgestellten formalen Systeme sind das System der Principia Mathematica (PM)²⁾ einerseits, das Zermelo-Fraenkel'sche (von J. v. Neumann weiter ausgebildete) Axiomensystem der Mengenlehre³⁾ andererseits. Diese beiden Systeme sind so weit, daß alle heute in der Mathematik angewendeten Beweismethoden in ihnen formalisiert, d. h. auf einige wenige Axiome und Schlußregeln zurückgeführt sind. Es liegt daher die Vermutung nahe, daß diese Axiome und Schlußregeln dazu ausreichen, alle mathematischen Fragen, die sich in den betreffenden Systemen überhaupt formal ausdrücken lassen, auch zu entscheiden. Im folgenden wird gezeigt, daß dies nicht der Fall ist, sondern daß es in den beiden angeführten Systemen sogar relativ einfache Probleme aus der Theorie der gewöhnlichen ganzen Zahlen gibt⁴⁾, die sich aus den Axiomen nicht

¹⁾ Vgl. die im Anzeiger der Akad. d. Wiss. in Wien (math.-naturw. Kl.) 1930, Nr. 19 erschienene Zusammenfassung der Resultate dieser Arbeit.

²⁾ A. Whitehead und B. Russell, Principia Mathematica, 2. Aufl., Cambridge 1925. Zu den Axiomen des Systems PM rechnen wir insbesondere auch: Das Unendlichkeitsaxiom (in der Form: es gibt genau abzählbar viele Individuen), das Reduzibilitäts- und das Auswahlaxiom (für alle Typen).

³⁾ Vgl. A. Fraenkel, Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre, Wissensch. u. Hyp. Bd. XXXI. J. v. Neumann, Die Axiomatisierung der Mengenlehre, Math. Zeitschr. 27, 1928. Journ. f. reine u. angew. Math. 154 (1925), 160 (1929). Wir bemerken, daß man zu den in der angeführten Literatur gegebenen mengentheoretischen Axiomen noch die Axiome und Schlußregeln des Logikkalküls hinzufügen muß, um die Formalisierung zu vollenden. — Die nachfolgenden Überlegungen gelten auch für die in den letzten Jahren von D. Hilbert und seinen Mitarbeitern aufgestellten formalen Systeme (soweit diese bisher vorliegen). Vgl. D. Hilbert, Math. Ann. 88, Abt. aus d. math. Sem. der Univ. Hamburg I (1922), VI (1928). P. Bernays, Math. Ann. 90. J. v. Neumann, Math. Zeitschr. 26 (1927). W. Ackermann, Math. Ann. 93.

⁴⁾ D. h. genauer, es gibt unentscheidbare Sätze, in denen außer den logischen Konstanten: — (nicht), $\vee$ (oder), $\wedge$ (für alle), $=$ (identisch mit) keine anderen Begriffe vorkommen als + (Addition), $\cdot$ (Multiplikation), beide bezogen auf natürliche Zahlen, wobei auch die Präfixe α sich nur auf natürliche Zahlen beziehen dürfen.

Danke an die Mathematik...

...für Schönheiten, die mich 40 Jahre lang fasziniert haben:

Wahrheit kann nicht innerhalb einer Theorie ausgedrückt werden.

Das Lemma von Tarski (1936) (Gödel, 1931):

Der Begriff der Wahrheit kann nicht mit den Ausdrucksmitteln einer Sprache selbst definiert werden.

Die Gödelsche Arithmetisierung kann nicht für semantische Begriffe wie *Wahrheit* durchgeführt werden. Stets ist eine ausdrucksmächtigere Metasprache nötig, um die Semantik der Objektsprache auszudrücken.



6. Akt: KI

Eine Sorge – KI

Jacobi-Vermutung (1939):

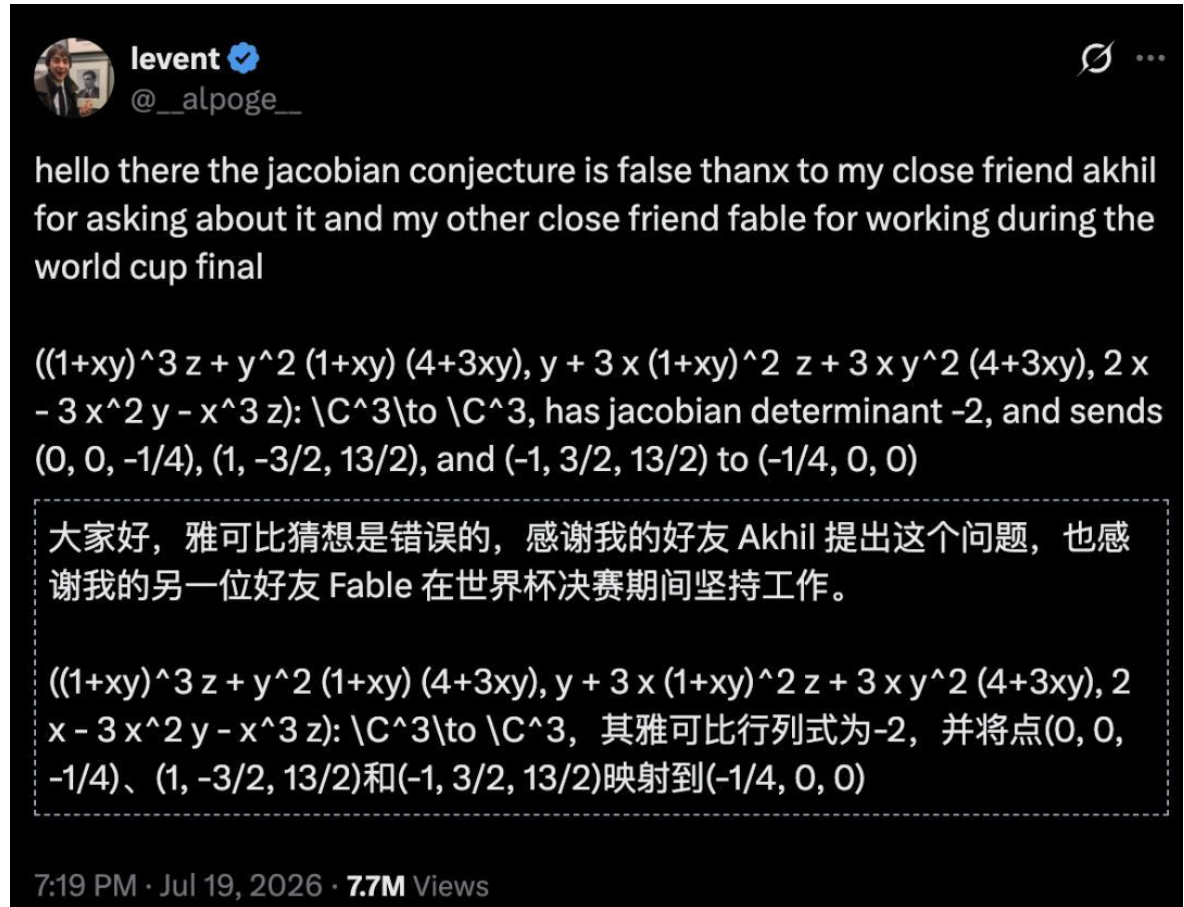
Eine polynomiale Abbildung ist global umkehrbar, wenn ihre Jacobi-Determinante eine konstante Zahl ungleich 0 ist.

Eine Sorge – KI

Levent Alpöge:
Mitarbeiter von Anthropic

Akhil Mathew (Uni Chicago)

Claude Fable:
KI von Anthropic



Eine Sorge – KI

[illegible]

Eine Sorge – KI

1. August 2026: KI von OpenAI löst 10 Matheprobleme

The results

- **High-dimensional sphere packing:** Improved asymptotic upper bounds on sphere-packing density, reaching the Cohn–Elkies threshold. ([SpherePacking.lean](#))
- **Binary and spherical codes:** Exponentially stronger upper bounds for binary codes at every minimum distance, together with corresponding bounds for spherical codes. ([MetricCodes.lean](#))
- **Non-sofic groups:** A construction of a non-sofic group, resolving whether every group admits finite permutation approximations. ([NonSoficGroup.lean](#))
- **Connes’s rigidity conjecture:** A counterexample to the conjecture that certain groups are determined by their group von Neumann algebras. ([ConnesRigidity.lean](#))
- **Arithmetic circuit complexity:** New lower bounds for computing the permanent with arithmetic circuits and formulas, including an $n^4 / \log n$ formula lower bound. ([Permanent.lean](#))
- **Quantum parallel repetition:** Exponential parallel repetition for arbitrary finite, two-player quantum games. ([QuantumParallelRepetition.lean](#))
- **Closest vector problem:** Polynomial-factor hardness of approximation for the closest vector problem, with related consequences for decoding and lattice problems. ([GapCVP.lean](#))
- **Ehrhart’s volume conjecture:** The sharp maximum volume in every dimension for a convex body whose centroid is its only interior lattice point. ([EhrhartVolumeInequality.lean](#))
- **Multicolor Ramsey numbers:** A superexponential lower bound for multicolor triangle Ramsey numbers, resolving Erdős problem 183. ([MulticolorTriangleRamsey.lean](#))
- **Extremal number conjectures:** Counterexamples to the compactness and degeneracy conjectures in extremal graph theory, resolving Erdős problems 146 and 180. ([CompactnessAndDegeneracy.lean](#))

Originalquellen: <https://github.com/openai/ten-proofs>

Eine Sorge – KI

Andreas Thom (*1977), deutscher Mathematiker,
TU Dresden



«Die KI setzt riesige Ressourcen ein, um alle Fälle durchzuprobieren. Das **erscheint** kreativ.»

«KI durchforstet die konvexe Hülle des aktuellen mathematischen Wissens, dringt aber **noch** nicht in ganz neue Welten vor.»

Sind die aktuellen (und zukünftigen) mathematischen Erfolge der KI ein Skandal für die Mathematik? Eine Abwertung? Überspitzt: Soll man noch Mathe studieren?

Schluss

Ich wünsche Ihnen allen:

- ein mehrheitlich positives Berufsbild
- nie versiegende Quellen der Begeisterung und Vorbilder
- möglichst viele anregende «Beilagen»
- Hilfreiche Unterstützung durch die LLF
- Liebe zur Mathematik
- einen weisen Umgang mit KI

Danke für Ihre Aufmerksamkeit!
Fragen / Bemerkungen?

