

Mathematische Modelle in Zeit, Ebene und Raum

Diskret vs. kontinuierlich, ein- vs. mehrdimensional, linear vs. nichtlinear

A. Caspar

TMU Luzern, 2026

Worum es geht?

Wenige gleiche Werkzeuge für viele unterschiedliche Phänomene

- ▶ Entwicklung Bakterienstamm, Wachstum von Krebszellen
- ▶ Verschmutzung eines Sees, Medikamenten-Konzentration im Körper
- ▶ Ausbreitung eines Gerüchts, einer Krankheit, einer Erfindung

Leitfragen sind u.a.

Wie entwickelt sich eine Grösse im Lauf der Zeit: Stirbt eine Population aus, wird sie zu gross, pendelt sie sich ein, gibt es eine periodisches Verhalten ...?

Modelle haben einen universellen Charakter

Die gleiche Mathematik trägt durch Medizin, Biologie, Epidemiologie etc.

Wie machen wir das? Diskret

Wähle eine Zeiteinheit (ZE): 1 Jahr, 1 Stunde oder noch kleiner.

Eindimensional (1D)

Seien $a_0 =$ Anfangswert (zum Beispiel die Enzymkonzentration im metabolischen Netzwerk eine Zelle) und weiter

$a_1 =$ Wert nach 1 ZE $a_2 =$ Wert nach 2 ZE ... $a_n =$ Wert nach n ZE ...

Formal $n \mapsto a_n$

Bei Anwendung sind Zeitschritte $n = 1, 2, \dots, N$ beschränkt.

Wenn Index n nicht abbricht $\rightsquigarrow$ Folge $n \mapsto a_n$ reeller Zahlen mit $(a_n)_n$.

Mehrdimensional (kD)

Diskretes $k = 3$ -dim. Modell $n \mapsto \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ mit 3 Messwerten (Raum, $k = 2$: Ebene).

Allgemeiner $n \mapsto \begin{pmatrix} x_{n,1} \\ x_{n,2} \\ \vdots \\ x_{n,k} \end{pmatrix}$ ein diskretes k -dimensionales Modell.

Wie machen wir das? Kontinuierlich

Messwert als Funktionswert

Funktion f mit $t \mapsto f(t)$ gibt Wert zur Zeit t : Variable t variiert kontinuierlich.

$\rightsquigarrow$ Diff- und Int-Rechnung (auch mehrdimensional),

Gewöhnliche Differentialgleichungen (DGL)

Veränderung der Entwicklung durch Ableitung f'

Wert $f'(t_0)$ gibt momentane Veränderungsgeschwindigkeit zur Zeit t_0 .

Beschreibung der Veränderung durch **DGL** $y' = F(y)$ mit Lösung f .

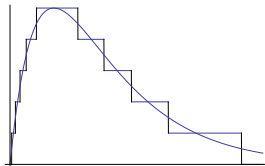
Beispiel **stationär** mit $y'_\infty = F(y_\infty) = 0$.

Approximation der Entwicklung durch $t \mapsto f(t)$

Minimal Änderungen in Zeit t führen allenfalls zu grossen Änderungen des Funktionswertes $f(t)$. Beispiel: Bei Zellteilung springt der Wert $f(t)$.

Der Fehler gleicht sich dabei einigermaßen aus.

Für $t = n$ ganz kontinuierlich $\rightsquigarrow$ diskret mit $n \mapsto f(n) = a_n$.



Modell-Würfel: Ordne entlang **dreier Achsen** ein

► **diskret** $\longleftrightarrow$ **kontinuierlich**

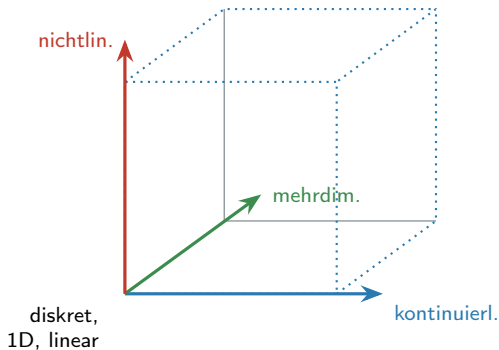
Folge a_n vs. Funktion $t \mapsto f(t)$

► **eindimensional** $\longleftrightarrow$ **mehrdimensional**

Zahl a_n vs. Vektor $v_n \in \mathbb{R}^k$

► **linear** $\longleftrightarrow$ **nichtlinear**

keine vs. Produkte



Oktant

Beispiel

diskret + 1D

$a_{n+1} = f(a_n) \in \mathbb{R}$ mit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

diskret + k D + linear

$v_{n+1} = Av_n \in \mathbb{R}^k$ mit $k \times k$ -Matrix A

kont. + 1D

$y' = F(y)$ mit $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

kont. + n D + nichtlin.

$y' = F(y)$ mit $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

kont. + n D + lin.

$F(y) = Ay$ mit $n \times n$ -Matrix A

Verständnis und Beschreibung qualitativ

Suche (gesicherte) Aussagen über **Langzeitverhalten**

Ohne explizite Lösung zu kennen, durch Untersuchung von

Fixpunkt oder Gleichgewicht mit $f(\tilde{x}) = \tilde{x}$ oder $y'_\infty = 0$

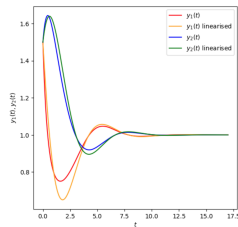
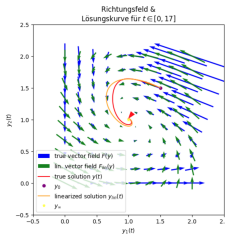
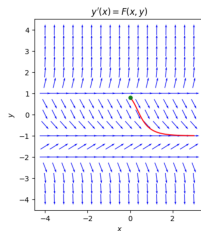
Ableitung $|f'(\tilde{x})|$ oder $F'(y_\infty)$

Eigenwert $|\lambda|$ auch komplex

Verifizierung mit Numerischen Anwendung¹ für Bestätigung der Analyse

```
compute_all_iterates(A, v, 10)
```

```
[array([4, 3]),  
 array([2. , 1.5]),  
 array([1. , 0.75]),  
 array([0.5 , 0.375]),  
 array([0.25 , 0.1875]),  
 array([0.125 , 0.09375]),  
 array([0.0625 , 0.046875]),  
 array([0.03125 , 0.0234375]),  
 array([0.015625 , 0.01171875]),  
 array([0.0078125 , 0.00585938]),  
 array([0.00390625, 0.00292969])]
```

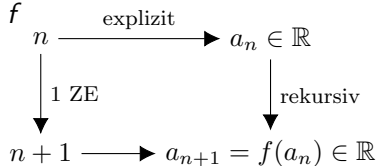


¹Links am Schluss

Diskrete Entwicklungen, 1D (mit 1 Messwert a_n für $n = 0, 1, 2, \dots$)

Nächste Generation $a_{n+1} = f(a_n)$ mit Reproduktionsfunktion f

Berechne a_n von a_0 an Schritt für Schritt $\rightsquigarrow$ **rekursiv** oder
explizit: Werte nach n ZE als Formel in n (und Startwert a_0)



Beispiele

linear $a_{n+1} = a_n + I$ gibt $a_n = a_0 + I n$

exponentiell $a_{n+1} = g a_n$ gibt $a_n = g^n a_0$

$g > 1$ Wachstum, $g < 1$ Zerfall

begrenzt $a_{n+1} = a_n + p(K - a_n)$

erst linear, dann gebremst,

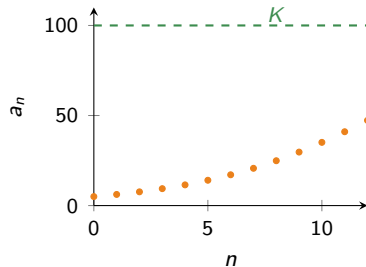
explizit: Mit geometrischer Reihe.

logistisch $a_{n+1} = a_n + p a_n (K - a_n)$

erst exponentiell, dann gebremst,

explizit: Gibt es nicht.

logistisch, $a_0=5$, $K=100$



Fixpunkt $\tilde{a}$ mit $\tilde{a} = f(\tilde{a})$, stationär.

Reproduktion und Stabilität, ohne die Folge auszurechnen

Reproduktionsfunktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert
Entwicklung mit $x_{n+1} = f(x_n)$.

- Fixpunkte $f(\tilde{x}) = \tilde{x}$ = Schnittpunkte mit
Winkelhalbierenden $y = x$.

Konvergenzkriterium (diskret)

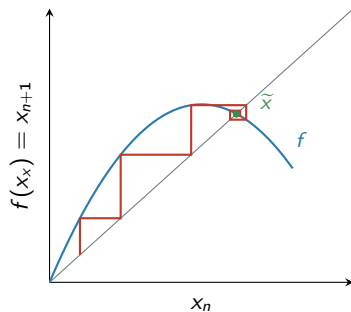
Für Entwicklung mit Start x_0 nahe einen
Fixpunkt $\tilde{x}$:

Falls $|f'(\tilde{x})| < 1 \rightsquigarrow$ anziehend (stabil)

Falls $|f'(\tilde{x})| > 1 \rightsquigarrow$ abstossend (instabil)

Beweisidee mit Mittelwertsatz:

$$|x_{n+1} - \tilde{x}| = |f'(x^*)| |x_n - \tilde{x}|.$$



Konvergenz gegen $\tilde{x}$

Beispiel Räuber-Beute, diskret: Zwei Gleichungen, eine Matrix

Räuber • $x_{n+1} = \frac{1}{5}x_n + \frac{2}{5}y_n$

Beute • $y_{n+1} = \frac{13}{10}y_n - \frac{3}{5}x_n = -\frac{3}{5}x_n + \frac{13}{10}y_n$

Schreibe $v_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{13}{10} \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ Matrix-Vektor-Produkt gibt

die nächste Generation $v_{n+1} = A \cdot v_n$.

Entwicklung bestimmt durch Startvektor v_0 mit Limes v_∞ für $n = 1, 2, \dots$

Beispiele $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $v_1 = Av_0 = 1 \cdot v_0$ Eigenvektor v_0 zum Eigenwert 1
 $\rightsquigarrow v_n = v_0$ und $v_\infty = v_0$

$\tilde{v}_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $v_1 = A\tilde{v}_0 = \frac{1}{2} \cdot \tilde{v}_0$ EV $\tilde{v}_0$ zum EW $\frac{1}{2}$
 $\rightsquigarrow v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \tilde{v}_0$ und $v_\infty = 0$

$w_0 = \alpha v_0 + \beta \tilde{v}_0$ mit Linearität des Matrix-Vektor-Produkts

$$w_1 = Aw_0 = A(\alpha v_0 + \beta \tilde{v}_0) = \alpha Av_0 + \beta A\tilde{v}_0$$

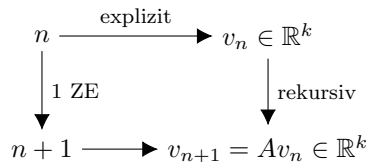
mit $w_n = \alpha v_0 + \beta \left(\frac{1}{2}\right)^n \tilde{v}_0$ und $w_\infty = \alpha v_0$

Zusammenfassung Entwicklung $k = 2$, allgemein für $k \geq 2$ analog

Seien v_1, v_2 EV zu EW λ_1, λ_2 mit $Av_1 = \lambda_1 v_1$ und $Av_2 = \lambda_2 v_2$.

Sei* $w_0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ ein Startvektor. Mit Linearität

Matrix-Vektor-Produkts folgt $w_n = \alpha_1 \lambda_1^n v_1 + \alpha_2 \lambda_2^n v_2$



Langzeitverhalten **ohne Berechnen der Iterationen:**

- ▶ $|\lambda_1|, |\lambda_2| < 1$: $w_n \rightarrow 0$ (Aussterben)
- ▶ $\lambda_1 = 1, |\lambda_2| < 1$: $w_n \rightarrow \alpha_1 v_1$ (Gleichgewicht)
- ▶ $\lambda_1 > 1, |\lambda_2| < 1, \alpha_1 \neq 0$: "Explosion" Richtung v_1
- ▶ Allgemein $\lambda_1 > |\lambda_2|, \alpha_1 \neq 0$:
Richtung w_n nähert sich v_1 an, Folge der
normierten Vektoren konvergiert $\frac{w_n}{|w_n|} \rightarrow \frac{v_1}{|v_1|}$

Auch für komplexe EW

Diskret stabil $\iff |\lambda| < 1$

Alle EW im Inneren des Einheitskreises

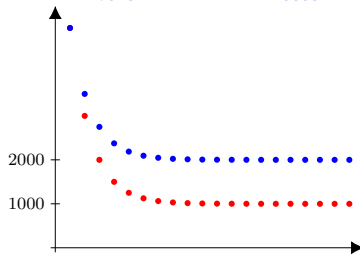
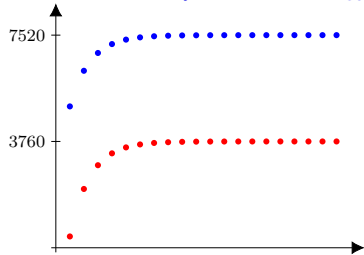
Für EW mit $\lambda_i^p = 1$ (Einheitswurzeln),
ist Entwicklung **zyklisch mit** $w_k = w_{k+p}$.
Für $k = 0$ ist

$$w_p = \alpha_1 \cdot \lambda_1^p v_1 + \alpha_2 \cdot \lambda_2^p v_2 + \dots + \alpha_n \cdot \lambda_n^p v_n.$$

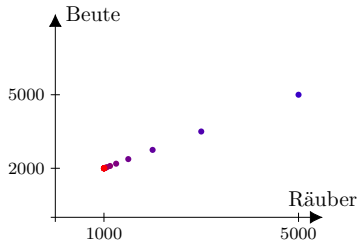
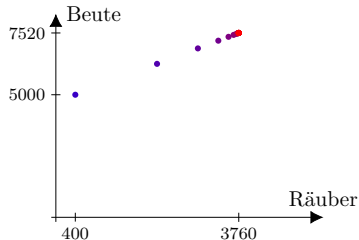
*: Wann gelingt das? Wie finden wir die Koeffizienten?

Anwendung/Beispiele für Räuber/Beute mit $w_{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{13}{10} \end{pmatrix} w_n$

Zeitentwicklung $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ mit $w_0 = \begin{pmatrix} 400 \\ 5000 \end{pmatrix}$ $w_\infty = \begin{pmatrix} 3760 \\ 7520 \end{pmatrix}$ und $w_0 = \begin{pmatrix} 5000 \\ 5000 \end{pmatrix}$ $w_\infty = \begin{pmatrix} 1000 \\ 2000 \end{pmatrix}$



Darstellung in (Räuber, Beute)-Koordinatensystem mit $\bullet = w_0$



Anwendung Linearität

Zeitentwicklung: Bestimme Koeffizienten in Linearkombination

$$\begin{pmatrix} 400 \\ 5000 \end{pmatrix} = 3760 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-840) \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow w_0 = 3760v_0 + (-840)\tilde{v}_0 \rightsquigarrow w_\infty = 3760v_0$$

und

$$\begin{pmatrix} 5000 \\ 5000 \end{pmatrix} = 1000 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1000 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow w_0 = 1000v_0 + 1000\tilde{v}_0 \rightsquigarrow w_\infty = 1000v_0$$

(Räuber,Beute)-Koordinatensystem

1. Oben $w_n = \alpha \cdot v_0 + \beta \left(\frac{1}{2}\right)^n \tilde{v}_0$. Die Punkte w_n liegen auf der Geraden mit **Parameterform**

$$g : r = r_0 + \lambda u = \alpha \cdot v_0 + \lambda \tilde{v}_0.$$

2. Einmal ist $\alpha = 3760$, einmal $\alpha = 1000$
3. In beiden Fällen gilt $\left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0$.
4. Der "Anteil" in Richtung $\tilde{v}_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ wird im Laufe der Zeit immer kleiner. Die Population nähert sich so immer weiter dem Vektor $\alpha \cdot v_0$ an.

Vom Schreiten zum Fliesen: lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

Kontinuierliche $N(t)$, momentane Änderungsgeschwindigkeit $N'(t)$.

Konstante Änderungsrate $\rightsquigarrow$ exponentiell

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = r \iff N' = rN \implies N(t) = N_0 e^{rt}$$

Beschränktes Wachstum (linear, mit Kapazität K):

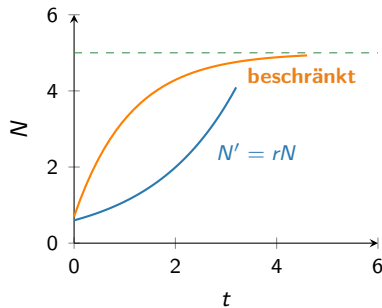
$$N' = r(K - N), \quad N(t) = (N_0 - K)e^{-rt} + K.$$

Beide sind **lineare DGL mit konstanten Koeffizienten** $y' = ay + b$:

stationär $y_\infty = -\frac{b}{a}$ mit $y'_\infty = 0$,

homogen $y_H = Ce^{at}$, mit $b = 0$,

allgemein $y = Ce^{at} - \frac{b}{a}$.



Stationäre Lösungen DGL $y' = F(y)$

Stationäre Lösung = Gleichgewicht

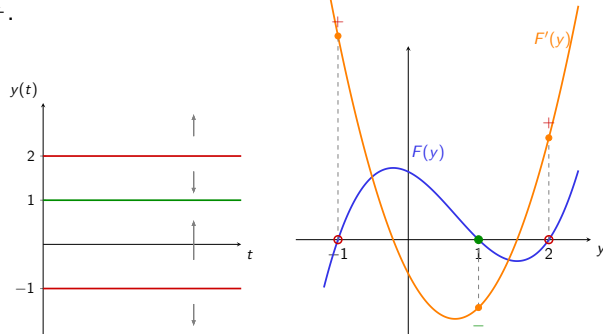
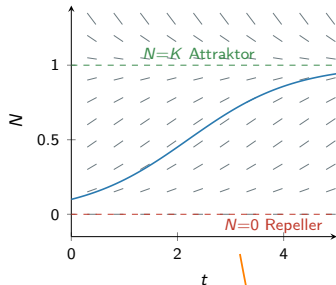
y_∞ konstant $\iff y'_\infty = 0 \iff F(y_\infty) = 0$.

Nullstellen rechte Seite $F(y_\infty) = 0$ liefern Kandidaten für Asymptoten.

Beispiel **Logistische DGL** $N' = rN(1 - \frac{N}{K})$

Nullstellen $N_\infty = 0, K$; qualitativ ohne Formel: monoton bis K , Wendepunkt bei $N_\infty = \frac{K}{2}$.

Beispiel $y' = (y - 1)(y + 1)(y - 2)$



Linearisierung 1D, Kleine Störung h bei stationärer Lösung y_∞

Ansatz $y(t) = y_\infty + h(t)$ und Taylor an y_∞ mit $F(y_\infty) = 0$ geben:

$$(y_\infty + h)' = h' = F(y_\infty + h) = \underbrace{F(y_\infty)}_0 + F'(y_\infty) h + \text{ThO} \approx F'(y_\infty) h, \rightsquigarrow h(t) = h_0 e^{F'(y_\infty)t}.$$

Stabilitätskriterium (kontinuierlich)

$F'(y_\infty) < 0 \rightsquigarrow$ Attraktor (stabil)

$F'(y_\infty) > 0 \rightsquigarrow$ Repeller (instabil)

Vergleich

diskret	kontinuierlich
$ f'(\tilde{x}) < 1$ Einheitskreis	$F'(y_\infty) < 0$ linke Halbebene

Beispiel Logistisch

$$F(N) = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right), \quad F'(N) = r\left(1 - \frac{2N}{K}\right).$$

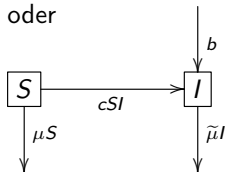
$$F'(0) = r > 0 \text{ (Repeller)}, \quad F'(K) = -r < 0 \text{ (Attraktor)}. \quad \checkmark$$

Nichtlineare Modelle = Nicht lineare Modelle: Beispiele

Infektionsmodelle und Varianten

SIR mit $S' = -cSI$, $I' = cSI - wI$, $R' = wR$

oder



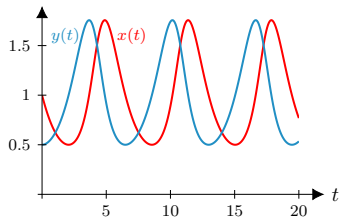
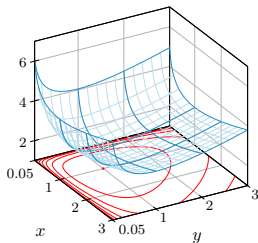
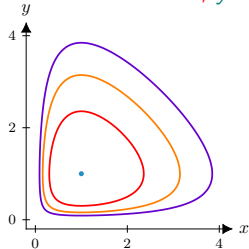
Konkurrenz-Modell

$$x' = r_1 x \left(1 - \frac{x+y}{K}\right) - \mu x,$$

$$y' = r_2 y \left(1 - \frac{x+y}{K}\right) - \mu y,$$

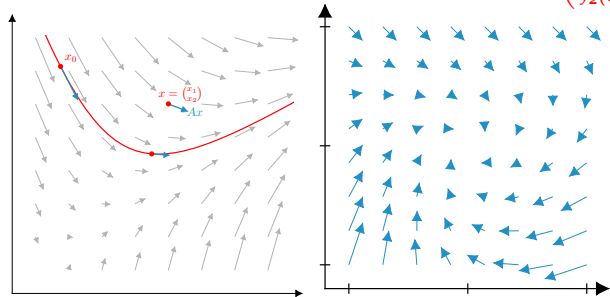
Beispiel Lotka-Volterra-Modell $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+xy \\ y-xy \end{pmatrix}$

Wobei $x = \text{Räuber}$, $y = \text{Beute}$ $x + y - \ln(xy)$



Stationäre Lösungen für $y' = F(y)$ mit $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} F_1(y_1, y_2) \\ F_2(y_1, y_2) \end{pmatrix}$

Geometrisch ist Lösung $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ eine Kurve in der Ebene $\mathbb{R}^2$



Mit $y_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto y_i(t) \in \mathbb{R}$

Pfeil im Punkt $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ repräsentiert Vektor $\begin{pmatrix} F_1(y_1, y_2) \\ F_2(y_1, y_2) \end{pmatrix}$. **Für eine Lösung des Systems** $y' = F(y)$ ist dies der (Geschwindigkeits-) Vektor $y'(t) = \begin{pmatrix} y'_1(t) \\ y'_2(t) \end{pmatrix}$ zur Zeit t .

$$y_\infty = \begin{pmatrix} y_{\infty,1} \\ y_{\infty,2} \end{pmatrix} = \text{konstant} = \text{Punkt} \iff y'_\infty = 0 \iff F(y_\infty) = \begin{pmatrix} F_1(y_{\infty,1}, y_{\infty,2}) \\ F_2(y_{\infty,1}, y_{\infty,2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(In-)Stabilität einer Stationären Lösung

Stabil Lösungen y , die nahe genug bei y_∞ starten, konvergiert $y(t) \rightarrow y_\infty$

Instabil Egal wie nahe Lösung y bei y_∞ startet, $y(t)$ entfernt sich (rasch) von y_∞ .

Suchen Kriterium Wie können wir das entscheiden ?

Beispiel: Lineare 2×2 -DGL-Systeme mit $F(y) = Ay$ für $A \in M_{2 \times 2}$

Lineares 2×2 -DGL-System $y' = Ay$

Oder $y'(t) = Ay(t)$ (homogen) mit

$$y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix}, \quad y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

Lösung des Systems $y' = Ay$

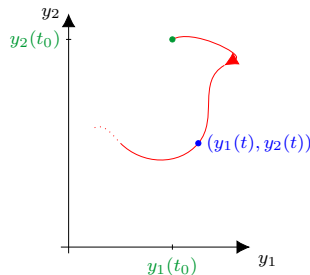
Abbildung $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$,

sodass $y'(t) = Ay(t)$ für alle t erfüllt ist.

Stationäre Lösungen $y_\infty' = 0 = A \cdot y_\infty$

Lösungen y_∞ des homogenen LGS $A \cdot y_\infty = 0$.

- ▶ Es gibt immer triviale Lösung $y_\infty = 0$:
 $\det(A) \neq 0 \implies$ einzige Lösung.
- ▶ Mit $\lambda = 0$ EW und EV $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ von A
ist $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto y(t) = e^{0t} v = v$ eine stationäre Lösung.
- ▶ Jeder EV zum EW $\lambda = 0$ liefert Lösung.
Gibt es nur, falls $\det(A) = 0$.



Lineare DGL-Systeme, Allgemeine Lösung für $y' = Ay$

Seien $A \in M_{2 \times 2}$ mit λ_i EW und EV v_i . Mit Konstanten C_1, C_2 haben wir:

1. Für $i = 1, 2$ ist $t \mapsto y(t) = C_i e^{\lambda_i t} v_i \in \mathbb{R}^2$ eine Lösung des Systems $y' = Ay$.
2. Als Linearkombination ist $t \mapsto y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} v_2 \in \mathbb{R}^2$ eine Lösung.
3. **FALLS** v_1, v_2 **lineare unabhängige EV** sind, ist die allgemeine Lösung

$$t \mapsto y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} v_2 \in \mathbb{R}^2. \quad \text{Mit } y(0) \text{ bestimme } C_i.$$

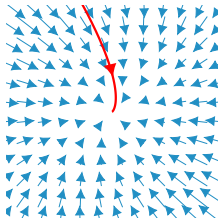
4. **Allgemein: Seien f_1, f_2 linear unabhängige Lösungen,**
dann schreibt sich die Allgemeine Lösung als $t \mapsto y(t) = D_1 f_1(t) + D_2 f_2(t)$.

Beispiel: Muskel $\xrightarrow{b_1}$ Blut $\xrightarrow{b_2}$ Leber

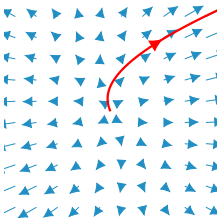
Allgemeine Lösung $t \mapsto y(t) = y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{-b_1 t} v_1 + C_2 e^{-b_2 t} v_2 + C_3 v_3$

Klassifikation mit EW von A mit $y' = Ay$

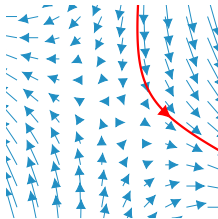
EW reell



$\lambda_1, \lambda_2 < 0$:
"stabil"

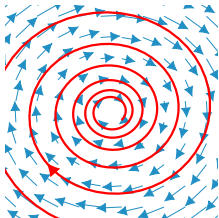


$\lambda_1, \lambda_2 > 0$:
"instabil"

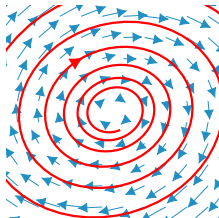


$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$:
"Sattelpunkt"

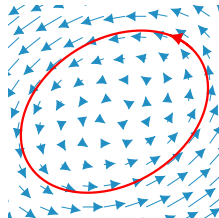
EW komplex



negativer Realteil:
"stabil"



positiver Realteil:
"instabil"



rein imaginär:
"Zentrum"

2-dimensionale Linearisierung für nichtlineares $y' = F(y)$

Gegeben $y' = F(y)$ mit $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(y) = \begin{pmatrix} F_1(y_1, y_2) \\ F_2(y_1, y_2) \end{pmatrix}$ und $F_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

- ▶ Berechne Fixpunkte / Stationäre Lösungen $y_\infty = (y_{\infty,1}, y_{\infty,2})$ mit $F(y_\infty) = 0$
- ▶ Berechne (allenfalls) $DF = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}$ (Jacobi-Matrix²)
- ▶ Berechne jeweils 2×2 -Matrix $DF(y_\infty) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(y_{\infty,1}, y_{\infty,2})}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1(y_{\infty,1}, y_{\infty,2})}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2(y_{\infty,1}, y_{\infty,2})}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2(y_{\infty,1}, y_{\infty,2})}{\partial y_2} \end{pmatrix}$
- ▶ Lineares System $h' = DF(y_\infty)h$ liefert Näherungslösung
(2-dim. Taylor/Tangentialebene).
 - + Falls n lin. unabh. EV wie oben geben, kann Lösung h dadurch bestimmt werden.
 - Falls nicht, verwende allgemeine Methode mit $e^{DF(y_\infty)}$

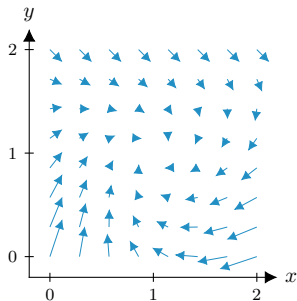
Das geht auch für $y' = F(y)$ mit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

²Nach C. Jacobi, 1804 - 1851

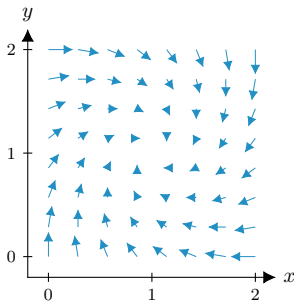
Wann beschreibt Linearisierung gesuchte Lösung?

Satz von Hartman-Grobman (1959/60)

Seien $n = 2$ und $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit Fixpunkt $y_\infty = (y_{\infty,1}, y_{\infty,2})$ des Systems $y' = F(y)$ und der Jacobi-Matrix $DF(y_\infty)$. Dann gilt: Falls **jeder EW von $DF(y_\infty)$ Realteil $\neq 0$** hat, so approximiert die Lösung des **linearisierten Systems** die **wahre Lösung** des **nichtlinearen Systems $y' = F(y)$** in der **Nähe von y_∞** .



Nicht lineares System



Lineare Approximation

Wende Klassifikation mit EW von A mit $y' = Ay$ an

Würfel ausgefüllt

► diskret $\longleftrightarrow$ kontinuierlich

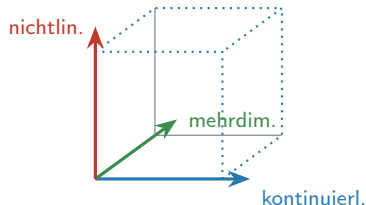
Folge a_n vs. Funktion $t \mapsto f(t)$

► eindimensional $\longleftrightarrow$ mehrdimensional

Zahl a_n vs. Vektor $v_n \in \mathbb{R}^m$

► linear $\longleftrightarrow$ nichtlinear

keine vs. Produkte



Oktant	Beispiel	Konzepte	Werkzeuge
diskret + 1D	$a_{n+1} = f(a_n)$	Fixpunkt, $ f' $	Gleichung lösen, Ableitung
diskret + kD + linear	$v_{n+1} = Av_n$	EW /EV	LGS, Matrizen, $\mathbb{C}$
kont. + 1D	$y' = F(y)$	Nullstellen, F'	DGL, Monotonie
kont. + nD + nichtlin.	$y' = F(y)$	Jacobi, $\operatorname{Re} \lambda$	part. Abl., $\mathbb{C}$
kont. + nD + linear	$F(y) = Ay$	EW /EV	LGS, Matrizen, $\mathbb{C}$ lin. Unabhängigkeit

Prinzip jeweils ähnlich: Gleichgewicht suchen $\rightsquigarrow$ "Ableitung" dort auswerten

$\rightsquigarrow$ Vorzeichen/Betrag entscheidet (fingersX):

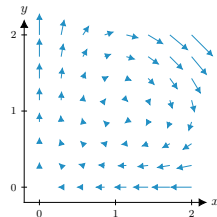
$|f'| < 1$ bzw. $|\lambda| < 1$ (diskret), $F' < 0$ bzw. $\operatorname{Re} \lambda < 0$ (kontinuierlich).

Lotka-Volterra braucht weitere Werkzeuge

Räuber x , Beute y . Begegnungen $\sim xy$ koppeln beide Gleichungen.

Vereinfacht mit Raten = 1 gibt nichtlineares System

$$\left. \begin{aligned} x' &= -x + xy \\ y' &= y - xy \end{aligned} \right\}$$



EW sind rein imaginär $\rightsquigarrow$ Linearisierung offen

Gleichgewichte sind $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Mit $F = \begin{pmatrix} -x+xy \\ y-xy \end{pmatrix}$ ist $DF = \begin{pmatrix} -1+y & x \\ -y & 1-x \end{pmatrix}$.

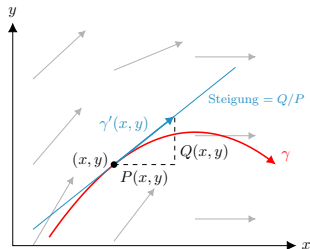
Eingesetzt $DF\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $DF\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ergeben sich $\{-1, 1\}$ bzw. $\{\pm i\}$ als EW.

Suche Lösungen mit DGL

Mit γ als Graph einer Funktion $x \mapsto y(x)$ hat Tangente in jedem Punkt (x, y) die Steigung $y'(x)$

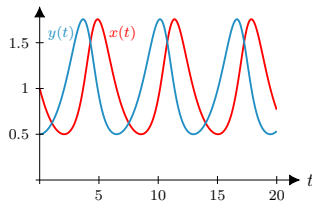
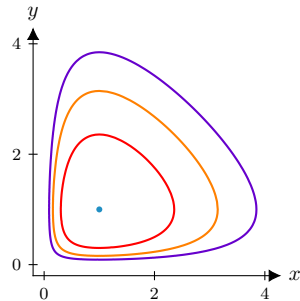
$$\rightsquigarrow \text{Steigungsdreieck } y'(x) = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} = \frac{y - xy}{-x + xy}$$

$\rightsquigarrow$ Höhenkurven $\{(x, y) \mid f(x, y) = x + y - \ln(xy) = C\}$



Lotka-Volterra: Zusammenfassung

- ▶ Lösungen Lotka-Volterra $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + xy \\ y - xy \end{pmatrix}$ sind periodisch.
- ▶ Die Räuber können die Beute nicht ausrotten. Ebenso wenig sterben die Räuber aus.
- ▶ Einziger Gleichgewichtspunkt $\neq (0, 0)$ des Systems ist $(x_\infty, y_\infty) = (1, 1)$.
- ▶ Die Gleichung $C = x + y - \ln(xy)$ bestimmt die Beziehung zwischen Räuber und Beute. Die Anfangswerte $(x(0), y(0))$ legen jeweils die Konstante C fest.





JNB in collab

Reproduktion: $x_{n+1} = f(x_n)$

Iteration: $v_{n+1} = Av_n$

DGL: $y' = F(y)$

Lineares DGL-System: $y' = F(y) = Ay$

Nichtlineares DGL-System: $y' = F(y)$

Skripte/Buch

Buch ACNH VL-Seite AC