GYMNASIUM NEUFELD
Abteilung MN, Klasse 26Mb

Kettenbrüche

Rationale Näherungen, diophantische Gleichungen
und Irrationalität der Zahlen π und e

MATURAARBEIT

Verfasst von Levi Maeder
Betreut durch Herrn Dr. René Fehlmann

19. Oktober 2025

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung

Obwohl die Kettenbruchlehre standardmässig weder an Gymnasien noch an Universitäten gelehrt wird, bieten die Kettenbrüche dennoch einzigartige und interessante Ansätze an vielerlei unerwartete Problemstellungen. Die vorliegende Arbeit fokussiert sich auf solche im Bereich der Zahlentheorie.

Der erste Hauptteil dieser Arbeit widmet sich entsprechend den Eigenschaften regulärer Kettenbrüche: Anhand des euklidischen Algorithmus wird gezeigt, wie sich jede reelle Zahl in einen regulären Kettenbruch $[a_0, a_1, \ldots, a_N, \ldots]$ entwickeln lässt. Diese Tatsache wird anschliessend ausgenutzt, um die lineare diophantische Gleichung $uX - vY = w$ zu lösen. Des Weiteren wird sich herausstellen, dass die Näherungsbrüche $\frac{p_n}{q_n}$ regulärer Kettenbrüche „beste“ Näherungen an reelle Zahlen darstellen, dass Kettenbrüche also unter anderem ein Mittel der Numerik sind. Danach wird zu den periodischen regulären Kettenbrüchen übergegangen. Sie stehen in einer bijektiven Beziehung zu den quadratischen Irrationalzahlen – darunter etwa Quadratwurzeln $\sqrt{d}$, deren Kettenbruchentwicklung sich nicht nur als periodisch, sondern auch als palindromisch herausstellen wird: $\sqrt{d} = [a_0, \overline{a_1, a_2, \ldots, a_2, a_1, 2a_0}]$. Mit dieser Kettenbruchentwicklung wird anschliessend die allgemeine Pellsche Gleichung $X^2 - dY^2 = \pm 1$ gelöst.

Der zweite Hauptteil beschäftigt sich zunächst mit der Konvergenz und Irrationalität gewisser allgemeiner Kettenbrüche. Er besteht aber im Wesentlichen darin, die Funktionen $\tan(x)$ und $\tanh(x)$ als Kettenbrüche darzustellen und mithilfe derer die Irrationalität der Zahlen π, π^2 und $e^{\frac{u}{v}}$ für $\frac{u}{v} \in \mathbb{Q}^*$ zu beweisen.

Vorwort

Da die Kettenbrüche in der heutigen Zeit nicht mehr die einstige Rolle in der Mathematik einnehmen, habe ich selbst erst vor relativ kurzer Zeit von ihnen erfahren. Als ersten Kettenbruch lernte ich

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}$$

kennen. Sein Wert ist der goldenene Schnitt $\Phi = 1.618033988\ldots$. Ich wusste alsdann, dass diese Zahl irrational ist und dass sich diese Tatsache anhand dieses Kettenbruches beweisen lässt. Als ich dann eines Tages auf das im Mathematikklassenzimmer hängende „Meme“ (**Abbildung 0.1**) aufmerksam wurde, stellte sich mir natürlich die Frage, ob sich mit der abgebildeten Kettenbruchdarstellung auf ähnliche Weise die Irrationalität der Kreiszahl π beweisen liesse.

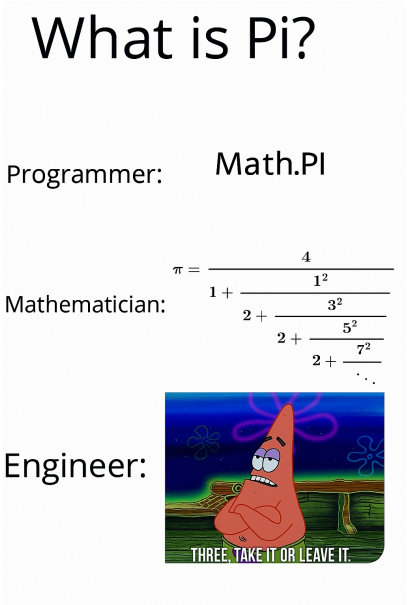

Abbildung 0.1: Meme: „What is Pi?“ [1].

In meinem festen Glauben daran, dass dies möglich war, lag meine initiale Motivation, eine Arbeit über Kettenbrüche zu schreiben. Doch egal wie fest mein Glaube auch war, gibt es meines Wissens nach bisher noch kein Irrationalitätsbeweis der Zahl π anhand dieser Kettenbruchdarstellung. Zur Sache tat es aber nichts, denn ein solcher Beweis gelingt nämlich mit der Kettenbruchdarstellung des $\tan(x)$. Es war **Johann H. Lambert**, der damit sogar den allerersten Irrationalitätsbeweis für π erbracht hat.

Mein persönliches Ziel während dieser Arbeit, das ich auch einhalten konnte, war, alle Inhalte, die nicht zum elementaren Mathematikwissen gehören, vollständig zu beweisen. Ich habe dabei versucht, den Inhalt in optimaler und verständlicher Weise an den Leser oder die Leserin heranzubringen. Was die Verständlichkeit betrifft: Die vollständige Arbeit ist für jene zugänglich, die über das gesamte gymnasiale Mathematikwissen verfügen und ab und an nicht davor zurückschrecken, Stift und Papier herbeizuziehen.

Dank gebührt in erster Linie meinem Betreuer, Herrn Dr. René Fehlmann, dessen Ratschläge und Einsichten unerlässlich waren, dessen Faszination für Kettenbrüche die zahlreichen Diskussionen zu einer Freude und das Schreiben der Arbeit zu einer interessanten, unterhaltenden und schönen Tätigkeit machten. Weiter bedanke ich mich bei meinen Eltern, Frau Franziska und Herrn Roger Maeder, für das Korrekturlesen sowie bei Frau Nicole Etter für Perrons zweiten Band [2].

Ried b. Kerzers, Oktober 2025 Levi Maeder

Notationsverzeichnis

Logische Symbole

$a \coloneqq b$	„a ist definiert als b“
$a =: b$	„b ist definiert als a“
$a \Rightarrow b$	„Aus a folgt b“
$a \iff b$	„Aus a folgt b und aus b folgt a“
$\forall a$	„für alle a“

Mengen

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen $\quad(\mathbb{N} \coloneqq \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\})$
$\mathbb{N}^+$	Menge der positiven natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Z}^*$	Menge der ganzen Zahlen ohne 0 $\quad(\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\})$
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{Q}^*$	Menge der rationalen Zahlen ohne 0 $\quad(\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\})$
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^*$	Menge der reellen Zahlen ohne 0 $\quad(\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\})$
$\mathbb{R}^+$	Menge der positiven reellen Zahlen

Diverses

$\lvert a \rvert$	Absoluter Wert von a für $a \in \mathbb{R}$ $\quad\left(\lvert a \rvert \coloneqq \begin{cases} a & : a \geq 0, \\ -a & : a < 0. \end{cases}\right)$
$\lfloor a \rfloor$	Ganzzahliger Teil von a für $a \in \mathbb{R}$ $\quad(\lfloor a \rfloor \in \mathbb{Z}$ mit $a - 1 < \lfloor a \rfloor \leq a)$
$a \bmod b$	Divisionsrest der Division a durch b für $a, b \in \mathbb{Z}$
$a \equiv b \pmod{c}$	„a ist kongruent zu b modulo c“ für $a, b, c \in \mathbb{Z}$ $\quad(a \bmod c = b \bmod c)$
$a \mid b$	„a ist ein Teiler von b“ für $a, b \in \mathbb{Z}$
$a \nmid b$	„a ist kein Teiler von b“ für $a, b \in \mathbb{Z}$
$\mathbf{ggT}(a, b)$	Grösster gemeinsamer Teiler von a und b für $a, b \in \mathbb{Z}$

1 Einleitung

Obgleich Kettenbrüche in der frühen Geschichte der Mathematik nahezu nie explizit erwähnt wurden, so existierten über Kulturen und Länder hinaus Algorithmen, welche sich ebenso aus der Lehre der Kettenbrüche gewinnen lassen. Die Geburtsstunde der heutigen Kettenbrüche aber schlug im Bologna des frühen 17. Jahrhunderts, wo **Pietro A. Cataldi** sie erstmals formalisierte. Er nutzte beispielsweise die Kettenbrüche

$$4 + \frac{2}{8} \approx \sqrt{18}, \quad 4 + \cfrac{2}{8 + \frac{2}{8}} \approx \sqrt{18}, \quad 4 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \frac{2}{8}}} \approx \sqrt{18}, \quad \dots$$

um rationale Näherungswerte für $\sqrt{18}$ zu finden. Im weiteren Verlaufe des Jahrhunderts wurden die Kettenbrüche von einigen (etwa von **Christiaan Huygens** in seinem von selbst laufendem Planetarium) für ähnliche numerische Zwecke verwendet.

Das goldene Zeitalter der Kettenbrüche war aber zweifelsohne das 18. Jahrhundert: **Leonhard Euler** und **Joseph-L. Lagrange** legten die Grundlage der Kettenbruchlehre. Euler bewies sowohl wichtige zahlentheoretische als auch analytische Ergebnisse. Er zeigte beispielsweise den Zusammenhang zwischen regulären Kettenbrüchen und den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ auf und war bereits im Besitz von Methoden, einige Potenzreihen als Kettenbrüche darzustellen. Lagrange beschäftigte sich etwa mit der Kettenbruchentwicklung quadratischer Irrationalzahlen, darunter insbesondere mit derjenigen von Quadratwurzeln $\sqrt{d}$ und fand damit die Lösungen (X, Y) der Pellschen Gleichung $X^2 - dY^2 = 1$. Im selben Jahrhundert leitete **Johann H. Lambert** die Kettenbruchdarstellung des $\tan(x)$ her und bewies damit erstmals die Irrationalität der Kreiszahl π. Die Kettenbrüche waren also nicht mehr nur Werkzeuge der Numerik, sondern solche der Analysis und der Zahlentheorie.

Die grösste Popularität erlangten die Kettenbrüche im 19. und frühen 20. Jahrhundert. Zahlreiche Mathematiker, darunter auch die berühmten wie **Carl F. Gauß**, **Adrien-M. Legendre** oder etwa **Srinivasa Ramanujan**, leisteten ihren Beitrag zum Fortschritt der Kettenbruchlehre.

Nach dieser Periode trat die Kettenbruchforschung mehr und mehr in den Hintergrund; wenngleich auch heute noch einzelne Ergebnisse und Anwendungen erscheinen, können die Kettenbrüche ihre einstige Popularität bei Weitem nicht mehr behaupten. Interessierte finden diese und weitere Informationen bei Brezinski [3].

In dieser Arbeit sollen nun einige der wichtigsten zahlentheoretischen Anwendungen der Kettenbruchlehre dargestellt werden. Um diesem Ziel gerecht zu werden, wird im **Kapitel 2** zunächst definiert, was ein Kettenbruch überhaupt ist. Anschliessend werden die fundamentalen Gesetze der Kettenbruchlehre hergeleitet.

Auf diesem Fundament aufbauend werden im **Kapitel 3** anhand regulärer Kettenbrüche und in enger Anlehnung an den euklidischen Algorithmus erste zahlentheoretische Ergebnisse hergeleitet: die Entwicklung reeller Zahlen in einen regulären Kettenbruch, daran anschliessend die Lösung der linearen diophantischen Gleichung $uX - vY = w$ sowie schliesslich das Gesetz der besten Näherung an reelle Zahlen.

Im **Kapitel 4** werden reguläre periodische Kettenbrüche betrachtet. Mit ihnen gelingt es uns, die Kettenbruchentwicklung von Quadratwurzeln $\sqrt{d}$ zu bestimmen. Anhand dieser Kettenbruchentwicklung wird eine Methode zur Lösungsfindung der allgemeinen Pellschen Gleichung $X^2 - dY^2 = \pm 1$ hergeleitet.

Im **Kapitel 5** werden zunächst Kriterien für die Konvergenz und Irrationalität gewisser allgemeiner Kettenbrüche hergeleitet. Anschliessend werden mithilfe hypergeometrischer Reihen die Funktionen $\tan(x)$ und $\tanh(x)$ als unendliche Kettenbrüche dargestellt, mit denen die Irrationalität der Zahlen π, π^2 und $e^{\frac{u}{v}}$ für $\frac{u}{v} \in \mathbb{Q}^*$ bewiesen werden.

2 Fundamentales

2.1 Definition und Notation allgemeiner Kettenbrüche

Als **endlichen allgemeinen** Kettenbruch bezeichnet man alle Ausdrücke der Form

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ddots + \cfrac{b_{N-1}}{a_{N-1} + \cfrac{b_N}{a_N}}}}}. \tag{2.1}$$

Dabei sind die a_n und b_n Parameter, welche aus zwei endlichen Folgen

$$\langle a_n\rangle_{n=0}^{N} = \langle a_0, a_1, \ldots, a_N\rangle; \quad a_n \in \mathbb{R},$$
$$\langle b_n\rangle_{n=1}^{N} = \langle b_1, b_2, \ldots, b_N\rangle; \quad b_n \in \mathbb{R}$$

stammen[1]. Die Folgen dürfen einem Bildungsgesetz unterliegen, müssen das aber nicht. Wir notieren sie der Einfachheit wegen als $\langle a_n\rangle$, $\langle b_n\rangle$. Des Weiteren bezeichnet man a_n als n^{ten} **Teilnenner** – darunter speziell a_0 als **Anfangsglied** – und b_n als n^{ten} **Teilzähler**. Insgesamt heissen die a_n, b_n **Elemente**.

Tatsächlich ist jede reelle Zahl ξ ein allgemeiner Kettenbruch. Unter dieser Aussage versteht man, dass ξ der Form eines Kettenbruches entspricht, nicht etwa, dass der Wert von ξ gleich dem eines gewissen Kettenbruches ist! Setzen wir nämlich $a_0 = \xi$ und $N = 0$, so ist ξ ein Kettenbruch. Mit der gleichen Argumentation ist auch jeder gewöhnliche Bruch – das ist einer mit genau einem Bruchstrich – ein Kettenbruch. Wir sprechen in solchen Fällen aber trotzdem von einer reellen Zahl bzw. von einem gewöhnlichen Bruch.

Um einerseits Platz zu sparen und andererseits eine klare Übersicht zu erhalten, notieren wir den Kettenbruch (2.1) mit der von **Alfred Pringsheim** eingeführten Notation

$$a_0 + \frac{b_1\big|}{\big|a_1} + \frac{b_2\big|}{\big|a_2} + \cdots + \frac{b_N\big|}{\big|a_N}.$$

Ist $a_0 = 0$, so schreiben wir auch

$$0 + \frac{b_1\big|}{\big|a_1} + \frac{b_2\big|}{\big|a_2} + \cdots + \frac{b_N\big|}{\big|a_N} = \frac{b_1\big|}{\big|a_1} + \frac{b_2\big|}{\big|a_2} + \cdots + \frac{b_N\big|}{\big|a_N}.$$

Gelegentlich kommt es vor, dass manche Teilzähler negativ sind. Wir schreiben dann

$$a_0 + \frac{-b_1\big|}{\big|a_1} + \frac{-b_2\big|}{\big|a_2} + \frac{b_3\big|}{\big|a_3} + \cdots + \frac{-b_N\big|}{\big|a_N} = a_0 - \frac{b_1\big|}{\big|a_1} - \frac{b_2\big|}{\big|a_2} + \frac{b_3\big|}{\big|a_3} + \cdots - \frac{b_N\big|}{\big|a_N},$$

falls b_1, b_2 und b_N positiv sind. Der 1^{te}, 2^{te} und N^{te} Teilzähler sind dann aber immer noch $-b_1$, $-b_2$ und $-b_N$.

2.2 Überführung in einen gewöhnlichen Bruch: Rekursionsformeln

In diesem Unterkapitel betrachten wir die a_n, b_n als Unbestimmte und sehen vorerst davon ab, dass im Kettenbruch eine Division durch 0 stattfinden, der Kettenbruch also keinen Wert haben kann. In diesem Fall lässt sich der Kettenbruch

$$a_0 + \frac{b_1\big|}{\big|a_1} + \frac{b_2\big|}{\big|a_2} + \cdots + \frac{b_N\big|}{\big|a_N} \tag{2.2}$$

offenbar immer als gewöhnlicher Bruch darstellen. Für $N = 0, 1$ erhalten wir etwa:

$$a_0 = \frac{a_0}{1}, \quad a_0 + \frac{b_1}{a_1} = \frac{a_0a_1 + b_1}{a_1}.$$

[1] Üblicherweise definiert man die a_n, b_n als Elemente der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$; für unsere Zwecke genügen sie aber als reelle Zahlen.

Indem wir im vorherigen Bruch a_1 durch den Ausdruck $\frac{a_1a_2+b_2}{a_2}$ ersetzen, ergibt sich offenbar ein gültiger[1] Bruch für $N = 2$:

$$a_0 + \frac{b_1}{\left(a_1 + \frac{b_2}{a_2}\right)} = \frac{a_0\left(\frac{a_1a_2+b_2}{a_2}\right) + b_1}{\left(\frac{a_1a_2+b_2}{a_2}\right)} = \frac{a_0a_1a_2 + a_0b_2 + a_2b_1}{a_1a_2 + b_2}. \tag{2.3}$$

Dieselbe Methode funktioniert übrigens auch für den Übergang vom Bruch mit $N = 0$ zum Bruch mit $N = 1$, und überhaupt vom Bruch für $(N-1)$ zum Bruch für N: Man ersetzt im vorhergehenden Bruch den Teilnenner a_N durch

$$\frac{a_Na_{N+1} + b_{N+1}}{a_{N+1}}$$

und erweitert den resultierenden Doppelbruch anschliessend mit a_{N+1}. Mittels dieser Methode erhält man schrittweise gültige Brüche für $N = 1, 2, 3, 4, 5 \ldots$. Wir werden jetzt ein Bildungsgesetz für die jeweiligen Zähler bzw. Nenner der Brüche, die durch diese Methode entstehen, herleiten. Dazu legen wir zunächst die folgende Definition fest:

Definition 2.1. *Überführt man den Kettenbruch* (2.2) *für $N \geq 1$ nach der Methode* (2.3) *schrittweise in einen gewöhnlichen Bruch, so bezeichnen wir den Zähler des entstehenden Bruches als p_N und den Nenner als q_N. Speziell sei $p_0 \coloneqq a_0$ und $q_0 \coloneqq 1$. Für $n \leq N$ nennen wir p_n den n^{ten} **Näherungszähler** und q_n den n^{ten} **Näherungsnenner** des Kettenbruches* (2.2)*. Die Brüche*

$$\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \frac{p_{N-1}}{q_{N-1}}, \frac{p_N}{q_N}$$

*bezeichnen wir als **Näherungsbrüche**[2] bzw. $\frac{p_n}{q_n}$ als n^{ten} Näherungsbruch des Kettenbruches* (2.2)*. Die Näherungsbrüche mit einem geraden Index nennen wir **gerade** bzw. solche mit ungeradem Index **ungerade** Näherungsbrüche.*

Die Näherungsbrüche sind offenbar denjenigen Kettenbrüchen gleich, die im Kettenbruch (2.2) enthalten sind:

$$\frac{p_0}{q_0} = a_0, \quad \frac{p_1}{q_1} = a_0 + \frac{b_1}{|a_1}, \quad \frac{p_2}{q_2} = a_0 + \frac{b_1}{|a_1} + \frac{b_2}{|a_2}, \quad \ldots, \quad \frac{p_N}{q_N} = a_0 + \frac{b_1}{|a_1} + \frac{b_2}{|a_2} + \cdots + \frac{b_N}{|a_N}.$$

Die Näherungszähler und -nenner p_n, q_n sind stets bruchfreie Ausdrücke in den Elementen a_n, b_n, die wir zu Beginn für $n = 0, 1, 2$ konkret berechnet haben. Sie unterliegen nun den folgenden Rekursionsformeln:

Theorem 2.1. *Die Näherungszähler p_n und –nenner q_n des Kettenbruches*

$$a_0 + \frac{b_1}{|a_1} + \frac{b_2}{|a_2} + \cdots + \frac{b_N}{|a_N}$$

lassen sich durch die folgenden Rekursionsformeln ausdrücken:

$$p_n = a_np_{n-1} + b_np_{n-2} \quad \textit{und} \quad q_n = a_nq_{n-1} + b_nq_{n-2}; \quad \forall n \geq 1,$$

wobei wir $p_{-1} \coloneqq 1$ und $q_{-1} \coloneqq 0$ setzen, sodass das Theorem ab $n = 1$ gilt[3].

Beweis. In Bezug auf den Kettenbruch

$$a_0 + \frac{b_1}{|a_1} + \frac{b_2}{|a_2} + \cdots + \frac{b_N}{|a_N}$$

betrachten wir die zwei Kettenbrüche

$$a_0 + \frac{b_1}{|a_1} + \frac{b_2}{|a_2} + \cdots + \frac{b_{n-1}}{|a_{n-1}} \quad \text{und} \quad a_0 + \frac{b_1}{|a_1} + \frac{b_2}{|a_2} + \cdots + \frac{b_{n-1}}{|a_{n-1}} + \frac{b_n}{|a_n},$$

[1] Weil man die Brüche erweitern kann, existieren unendlich viele mit denen sich der Kettenbruch darstellen lässt.

[2] In der Fachliteratur bezeichnet man sie oftmals auch als „Konvergenten“.

[3] Weil b_0 nicht definiert ist, macht es keinen Sinn, den Satz ab $n = 0$ gelten zu lassen.

wobei $1 \leq n \leq N$ sein soll. Wir erhalten letzteren Kettenbruch, indem wir im ersten a_{n-1} durch $\frac{a_{n-1}a_n+b_n}{a_n}$ ersetzen:

$$a_0 + \frac{b_1}{\left|a_1\right.} + \frac{b_2}{\left|a_2\right.} + \cdots + \frac{b_{n-1}}{\left|\frac{a_{n-1}a_n+b_n}{a_n}\right.} = a_0 + \frac{b_1}{\left|a_1\right.} + \frac{b_2}{\left|a_2\right.} + \cdots + \frac{b_{n-1}}{\left|a_{n-1}\right.} + \frac{b_n}{\left|a_n\right.}.$$

Analog erhält man mit der Methode (2.3), wenn man in $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ wieder a_{n-1} durch $\frac{a_{n-1}a_n+b_n}{a_n}$ ersetzt und den Doppelbruch anschliessend mit a_n erweitert, $\frac{p_n}{q_n}$. Zuerst werden wir aber p_{n-1} und q_{n-1} folgendermassen ausdrücken:

$$p_{n-1} \coloneqq X_{p_{n-1}}a_{n-1} + Y_{p_{n-1}} \quad \text{und} \quad q_{n-1} \coloneqq X_{q_{n-1}}a_{n-1} + Y_{q_{n-1}}.$$

Dabei sind $X_{p_{n-1}}$ und $X_{q_{n-1}}$ jeweils die Summen aller Terme die mit a_{n-1} multipliziert sind, $Y_{p_{n-1}}$ und $Y_{q_{n-1}}$ die Summe derjenigen Terme die frei vom Faktor a_{n-1} sind. Die Schreibweisen für p_{n-1}, q_{n-1} sind offenbar konsistent mit der **Definition 2.1**. Wir überführen nun nach der Methode (2.3) $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ zu $\frac{p_n}{q_n}$:

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{X_{p_{n-1}}\left(\frac{a_{n-1}a_n+b_n}{a_n}\right) + Y_{p_{n-1}}}{X_{q_{n-1}}\left(\frac{a_{n-1}a_n+b_n}{a_n}\right) + Y_{q_{n-1}}} = \frac{\left[\frac{a_n\left(X_{p_{n-1}}a_{n-1}+Y_{p_{n-1}}\right)+X_{p_{n-1}}b_n}{a_n}\right]}{\left[\frac{a_n\left(X_{q_{n-1}}a_{n-1}+Y_{q_{n-1}}\right)+X_{q_{n-1}}b_n}{a_n}\right]}$$

$$= \frac{a_n\left(X_{p_{n-1}}a_{n-1} + Y_{p_{n-1}}\right) + X_{p_{n-1}}b_n}{a_n\left(X_{q_{n-1}}a_{n-1} + Y_{q_{n-1}}\right) + X_{q_{n-1}}b_n}.$$

Im erhaltenen Bruch für $\frac{p_n}{q_n}$ können wir jeweils den Klammerausdruck ersetzen:

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{a_n p_{n-1} + X_{p_{n-1}}b_n}{a_n q_{n-1} + X_{q_{n-1}}b_n}; \quad \forall n \geq 1.$$

Es ist also nach der **Definition 2.1**

$$p_n = a_n p_{n-1} + X_{p_{n-1}}b_n \quad \text{und} \quad q_n = a_n q_{n-1} + X_{q_{n-1}}b_n; \quad \forall n \geq 1,$$

da p_n, q_n durch die Methode (2.3) entstanden sind. Weil $X_{p_{n-1}}$ und $X_{q_{n-1}}$ wegen derer Definition a_n nicht als Faktor enthalten können, schliessen wir, dass

$$X_{p_n} = p_{n-1}, \quad X_{q_n} = q_{n-1}; \quad \forall n \geq 1 \quad \Rightarrow \quad X_{p_{n-1}} = p_{n-2}, \quad X_{q_{n-1}} = q_{n-2}; \quad \forall n \geq 2$$

gilt. Wir haben also $X_{p_{n-1}}$ und $X_{q_{n-1}}$ erfolgreich bestimmt und das führt durch Einsetzen in den vorherigen Gleichungen für p_n, q_n zu

$$p_n = a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2} \quad \text{und} \quad q_n = a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2}; \quad \forall n \geq 2.$$

Da die Formeln für $n = 1$ per Definition stimmen, ist das Theorem damit bewiesen. ∎

2.3 Wert endlicher Kettenbrüche

Um den Wert eines endlichen Kettenbruches ohne die Rekursionsformeln zu berechnen, das heisst, ihn manuell zu einem gewöhnlichen Bruch umzuwandeln, „rollt“ man ihn von „hinten“ auf. Wenn wir beispielsweise den Wert von

$$2 + \frac{7}{\left|5\right.} + \frac{3}{\left|9\right.} + \frac{10}{\left|1\right.}$$

berechnen wollen, berechnen wir zuerst

$$9 + \frac{10}{1} = 19, \quad \text{dann} \quad 5 + \frac{3}{19} = \frac{98}{19} \quad \text{und schliesslich noch} \quad 2 + \frac{7}{\frac{98}{19}} = \frac{329}{98} = \frac{47}{14}, \tag{2.4}$$

was dem Wert des Kettenbruches entspricht. Um den Wert mit den Rekursionsformeln zu berechnen, müssen wir $\frac{p_3}{q_3}$ des Kettenbruches bestimmen. Wir erhalten dafür

$$\frac{p_3}{q_3} = \frac{a_3(a_0a_1a_2 + a_0b_2 + a_2b_1) + b_3(a_0a_1 + b_1)}{a_3(a_1a_2 + b_2) + b_3(a_1)} = \frac{1\cdot(2\cdot5\cdot9 + 2\cdot3 + 9\cdot7) + 10\cdot(2\cdot5 + 7)}{1\cdot(5\cdot9 + 3) + 10\cdot1} = \frac{329}{98} = \frac{47}{14}.$$

Weniger (aber immer noch) zur Berechnung eines Kettenbruches, sondern vielmehr im Sinne der zukünftigen Beweisführung, führen wir ein weiteres Hilfsmittel ein:

Definition 2.2. *In Anbetracht eines endlichen Kettenbruches*

$$a_0 + \frac{b_1|}{|a_1} + \frac{b_2|}{|a_2} + \cdots + \frac{b_n|}{|a_n} + \cdots + \frac{b_N|}{|a_N}$$

sei

$$\xi_n \coloneqq \begin{cases} a_n + \frac{b_{n+1}|}{|a_{n+1}} + \cdots + \frac{b_N|}{|a_N} & : n < N, \\ a_n & : n = N. \end{cases}.$$

Daraus lässt sich unmittelbar feststellen, dass

$$\xi_n = a_n + \frac{b_{n+1}}{\xi_{n+1}} \quad \Longleftrightarrow \quad \xi_{n+1} \neq 0; \quad \forall n < N$$

gilt. Das bedeutet, dass man mit ξ_{n+1} auch ξ_n berechnen kann. Zudem ist ξ_0 offensichtlich der Wert des Kettenbruches. Mit diesem Hilfsmittel lässt sich ein endlicher Kettenbruch schrittweise berechnen: Weil $\xi_N = a_N$ ist, finden wir auch ξ_{N-1}, dann ξ_{N-2} usw., bis wir ξ_0, den Wert des Kettenbruches, erhalten. Diese Vorgehensweise haben wir schon im Beispiel (2.4) angewandt, aber noch nicht ausformuliert.

Jetzt ist es so, dass nicht jeder endliche Kettenbruch einen Wert hat. Es kann ja der Fall eintreten, dass eines der $\xi_n = 0$ ist. In diesem Fall würde innerhalb des Kettenbruches eine Division durch 0 stattfinden. Es sei denn, nur ξ_0 ist gleich 0, dann hat der Kettenbruch den Wert 0. Beispielsweise ist der Wert des unschuldig aussehenden Kettenbruches

$$5 + \frac{7|}{|7} + \frac{2|}{|1} + \frac{5|}{|6} + \frac{89\ |}{|-9}$$

nicht definiert, weil sich ξ_1 als 0 herausstellt und somit ξ_0, der Wert des Kettenbruches, nicht definiert ist:

$$\xi_3 = 6 + \frac{89}{-9} = \frac{35}{-9} \quad \Rightarrow \quad \xi_2 = 1 + \frac{5}{\xi_3} = \frac{-2}{7} \quad \Rightarrow \quad \xi_1 = 7 + \frac{2}{\xi_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi_0 = 5 + \frac{7}{\xi_1} = 5 + \frac{7}{0}.$$

Ein endlicher Kettenbruch hat also nur dann einen Wert, wenn für $n \geq 1$ stets $\xi_n \neq 0$ ist.

2.4 Definition und Wert unendlicher Kettenbrüche

Ein unendlicher allgemeiner Kettenbruch ist ein Ausdruck der Form

$$a_0 + \frac{b_1|}{|a_1} + \frac{b_2|}{|a_2} + \cdots, \tag{2.5}$$

wobei die a_n, b_n durch zwei, nun nicht mehr durch irgendein N beschränkten, unendlichen Folgen gegeben sind:

$$\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}} = \langle a_0, a_1, \ldots \rangle; \quad a_n \in \mathbb{R},$$
$$\langle b_n \rangle_{n \in \mathbb{N}^+} = \langle b_1, b_2, \ldots \rangle; \quad b_n \in \mathbb{R}.$$

Es sei dabei angemerkt, dass wir die bisherige Terminologie beibehalten und auch die Definition von Näherungsbrüchen (–zähler, –nenner) analog übernehmen. Der unendliche Kettenbruch (2.5) hat offenbar unendlich viele Näherungsbrüche

$$\frac{p_0}{q_0}, \quad \frac{p_1}{q_1}, \quad \frac{p_2}{q_2}, \quad \frac{p_3}{q_3}, \quad \ldots.$$

Oftmals ist es nun so, dass sie einem gewissen Grenzwert zustreben. Das veranlasst zur folgenden Definition:

Definition 2.3. *Erfüllen die Näherungsbrüche $\frac{p_n}{q_n}$ des unendlichen Kettenbruches*

$$a_0 + \frac{b_1|}{|a_1} + \frac{b_2|}{|a_2} + \cdots$$

die Bedingung

$$\lim_{n \to \infty} \frac{p_n}{q_n} = \xi; \quad \xi \in \mathbb{R}, \tag{2.6}$$

*so heisst der Kettenbruch **konvergent** und sein Wert ist ξ. Existiert kein solcher Grenzwert, heisst der Kettenbruch **divergent** und sein Wert bleibt undefiniert.*

Des Weiteren definieren wir die ξ_n im selben Sinne auf unendliche Kettenbrüche:

Definition 2.4. *In Anbetracht des unendlichen Kettenbruches* (2.5) *sei*

$$\xi_n \coloneqq a_n + \frac{b_{n+1}\big|}{\big|a_{n+1}} + \frac{b_{n+2}\big|}{\big|a_{n+2}} + \cdots ; \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Nach dieser Definition gilt nunmehr für endliche und auch unendliche Kettenbrüche der Zusammenhang

$$\xi_n = a_n + \frac{b_n}{\xi_{n+1}} \quad \Longleftrightarrow \quad \xi_{n+1} \neq 0.$$

Im Gegensatz zu den endlichen Kettenbrüchen bedeutet jetzt $\xi_n = 0$ nicht unbedingt mehr, dass der Wert des Kettenbruches undefiniert ist; denn dieser ist allein durch den Grenzwert (2.6) definiert, und $\xi_n = 0$ bedeutet eben nicht unbedingt, dass dieser nicht existiert. Klar ist allerdings: Gilt $\xi_1 = 0$, dann existiert der Grenzwert nicht.

2.5 Folgerungen aus den Rekursionsformeln

Die Motivation dafür, Rekursionsformeln für p_n, q_n herzuleiten, lag unter anderem darin, dass sich jetzt zwei wichtige Hilfssätze aus ihnen ergeben.

Lemma 2.1. *Für die Näherungszähler und –nenner p_n, q_n eines allgemeinen Kettenbruches*

$$a_0 + \frac{b_1\big|}{\big|a_1} + \frac{b_2\big|}{\big|a_2} + \cdots + \frac{b_N\big|}{\big|a_N}$$

gilt

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1} b_1 b_2 \ldots b_n; \quad \forall n \geq 0,$$

wobei der Fall $n = 0$ so zu verstehen ist, dass als einziger Unterschied zu anderen Indizes n keine Teilzähler als Faktoren auftreten.

Beweis. Mittels der Rekursionsformeln erhalten wir

$$\begin{aligned} p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n &= (a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2}) q_{n-1} - p_{n-1}(a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2}) \\ &= -b_n (p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}). \end{aligned}$$

Der Klammerterm ist wieder in der Form des ursprünglichen Terms, also können wir diesen Schritt insgesamt n mal durchführen, woraus

$$\begin{aligned} p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n &= (-1)^n b_n b_{n-1} \ldots b_2 b_1 (p_0 q_{-1} - p_{-1} q_0) \\ &= (-1)^n b_n b_{n-1} \ldots b_2 b_1 (a_0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) \\ &= (-1)^{n-1} b_1 b_2 \ldots b_{n-1} b_n \end{aligned}$$

folgt. ∎

Mit dem **Lemma 2.1** können wir jetzt die Differenz aufeinanderfolgender Näherungsbrüche ausdrücken:

Satz 2.1. *Für die Differenz aufeinanderfolgender Näherungsbrüche gilt*

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1} b_1 b_2 \cdots b_n}{q_n q_{n-1}}; \quad \forall n \geq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad q_n \neq 0, q_{n-1} \neq 0.$$

Beweis. Der Beweis ist trivial und sei daher als Übungsaufgabe dem Leser oder der Leserin überlassen. ∎

3 Reguläre Kettenbrüche

Obwohl die regulären Kettenbrüche ein Spezialfall der allgemeinen sind, tragen sie einige der wichtigsten Anwendungen der Kettenbruchlehre in sich. Dieses Kapitel beschränkt sich auf das Lösen der linearen diophantischen Gleichung $uX - vY = w$ und auf das Gesetz der besten Näherung.

3.1 Definition regulärer Kettenbrüche und Gesetzmässigkeiten

Definition 3.1. *Kettenbrüche der Form*

$$a_0 + \frac{1}{\left|a_1\right.} + \frac{1}{\left|a_2\right.} + \cdots + \frac{1}{\left|a_N\right.} \quad \textit{bzw.} \quad a_0 + \frac{1}{\left|a_1\right.} + \frac{1}{\left|a_2\right.} + \frac{1}{\left|a_3\right.} + \cdots$$

heissen ***regulär****, falls das Anfangsglied $a_0 \in \mathbb{Z}$ ist und die restlichen Teilnenner $a_n \in \mathbb{N}^+$ sind.*

Wir führen sogleich eine kompaktere Notation ein und schreiben:

$$a_0 + \frac{1}{\left|a_1\right.} + \cdots + \frac{1}{\left|a_N\right.} = [a_0, a_1, \ldots, a_N] \quad \text{bzw.} \quad a_0 + \frac{1}{\left|a_1\right.} + \frac{1}{\left|a_2\right.} + \cdots = [a_0, a_1, a_2, \ldots].$$

Im letzten Kapitel haben wir das rekursive Bildungsgesetz der Näherungszähler p_n und Näherungsnenner q_n für allgemeine Kettenbrüche hergeleitet. Im Spezialfall der Kettenbrüche bei denen alle $b_n = 1$ sind, darunter befinden sich insbesondere alle regulären Kettenbrüche, lautet es jeweils

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \quad \text{und} \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}; \quad \forall n \geq 0. \tag{3.1}$$

Weil die Rekursionsformeln nicht mehr von den Teilzählern b_n abhängig sind, können und sollen wir wegen der zukünftigen Beweisführung $p_{-2} \coloneqq 0, q_{-2} \coloneqq 1$ setzen, sodass die Formeln ab $n = 0$ gelten. Im Anschluss daran beweisen wir noch den

Satz 3.1. *In Anbetracht des Kettenbruches $[a_0, a_1, \ldots, a_n, \xi_{n+1}]$ gilt:*

$$\xi_0 - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n(\xi_{n+1}q_n + q_{n-1})}.$$

Ist der Kettenbruch zudem regulär, so bilden die Näherungsnenner q_n eine – bis auf die Ausnahme $q_0 \leq q_1$ – streng monoton steigende Folge positiver ganzer Zahlen $0 < q_0 \leq q_1 < q_2 < \ldots$. Ferner ist der n^{te} Näherungsnenner q_n stets teilerfremd zum n^{ten} Näherungszähler p_n; die Näherungsbrüche $\frac{p_n}{q_n}$ sind also alle irreduzibel (in gekürzter Form).

Beweis. Nach dem **Lemma 2.1, S.6** ist, da alle Teilzähler gleich 1 sind, $p_n q_{n-1} - p_{n-1}q_n = (-1)^{n-1}$. In Anbetracht des Kettenbruches $[a_0, a_1, \ldots, a_n, \xi_{n+1}]$ und mittels der Rekursionsformeln (3.1) können wir also folgendermassen vorgehen:

$$\xi_0 - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{\xi_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\xi_{n+1}q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{-(p_n q_{n-1} - p_{n-1}q_n)}{q_n(\xi_{n+1}q_n + q_{n-1})} = \frac{(-1)^n}{q_n(\xi_{n+1}q_n + q_{n-1})}.$$

Ist der Kettenbruch regulär, so folgt unmittelbar aus den Rekursionsformeln, weil $q_{-1} = 0$ und $q_0 = 1$ ist, dass die q_n stets positiv sind und streng monoton steigen, es sei denn der Einzelfall $a_1 = 1$ tritt ein, denn dann ist $q_0 = q_1 = 1$. Da alle Teilnenner ganze Zahlen sind, muss q_n schliesslich immerzu eine positive ganze Zahl sein. Es ist also $q_0 \leq q_1 < q_2 < \ldots$ mit $q_n \in \mathbb{N}^+$.

Es verbleibt noch zu zeigen, dass $\mathbf{ggT}(p_n, q_n) = 1$ ist: Es sei $t = \mathbf{ggT}(p_n, q_n)$. Dann folgt

$$t \mid |p_n q_{n-1} - p_{n-1}q_n| = 1 \quad \Rightarrow \quad t \mid 1 \quad \Rightarrow \quad t = 1.$$

■

3.2 Die Kettenbruchentwicklung

Wir werden in diesem Unterkapitel zeigen, dass jede rationale Zahl vom Wert her immer genau zweien **endlichen** regulären Kettenbrüchen und jede irrationale Zahl genau einem **unendlichen** regulären Kettenbruch entspricht. Wir beginnen mit zwei konkreten Beispielen:

$$\frac{5}{19} = 0 + \cfrac{1}{0 + \cfrac{19}{5}} = 0 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{4}{5}} = 0 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{0 + \cfrac{5}{4}}} = 0 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}, \tag{3.2}$$

$$\frac{-19}{5} = \frac{-20 + 1}{5} = -4 + \frac{1}{5} = -4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1}}. \tag{3.3}$$

Im Beispiel (3.2) haben wir sowohl eine positive rationale Zahl, die kleiner als 1 ist, $\frac{5}{19}$, als auch die damit verbundene rationale Zahl, die grösser als 1 ist, $\frac{19}{5}$, in einen endlichen regulären Kettenbruch entwickelt. Dasselbe haben wir im Beispiel (3.3) mit einer negativen rationalen Zahl, $\frac{-19}{5}$, gemacht. Dabei haben wir auch gleich einen zweiten endlichen regulären Kettenbruch entdeckt, der vom Wert her gleich dem ersten ist, indem wir 5 als $4 + \frac{1}{1}$ geschrieben haben. Das hätten wir auch im ersten Beispiel machen können. Was wir benutzt haben, ist nichts anderes als die Division mit Rest. Beim ersten Beispiel haben wir zugesehen, wie oft „die 19 in die 5 passt“; sie passt 0-mal herein. Äquivalent wäre, die Frage zu stellen, welche ganzen Zahlen s, r die Gleichung $5 = s \cdot 19 + r$ erfüllen. Hier funktioniert einzig $s = 0$ und $r = 5$. Die Zahl $r = 5$ ist der Divisionsrest der ganzzahligen Division 5 durch 19. Wir erhielten damit

$$\frac{5}{19} = s + \frac{r}{19} \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{19} = 0 + \frac{1}{\frac{19}{5}}.$$

Dasselbe Verfahren konnten wir dann auch mit 19 und 5 durchführen: „Wie oft passt die 5 in die 19 hinein?“, oder was dasselbe ist: „Welche ganzen Zahlen s, r erfüllen die Gleichung $19 = s \cdot 5 + r$?“. Hier erhielten wir $s = 3, r = 4$ und somit

$$\frac{19}{5} = s + \frac{r}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{19}{5} = 3 + \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{19} = 0 + \frac{1}{3 + \frac{4}{5}}.$$

Dieses Verfahren mit den Divisionsgleichungen fortführend, haben wir in beiden Beispielen die Kettenbrüche erhalten. Wir werden nun, wie zu Beginn angekündigt, zeigen, dass dieses Verfahren für jede reelle Zahl eine Darstellung als regulärer Kettenbruch zur Folge hat.

Dazu werden wir uns des **euklidischen Algorithmus** bedienen. Er wurde erstmals vom griechischen Mathematiker **Euklid von Alexandria** dokumentiert. Euklid benutzte den Algorithmus, um das **grösste gemeinsame Mass** d zweier Strecken a, b zu finden. Unter einem **gemeinsamen Mass** versteht man hier eine Strecke c, welche durch Vervielfachung sowohl die Strecke a als auch die Strecke b ergeben kann. Strecken, die ein solches Mass besitzen, nennt man **kommensurabel** und andernfalls **inkommensurabel**. Wir werden den euklidischen Algorithmus analog, in der Weise wie Euklid ihn dokumentiert hat, durchführen. Wir werden a, b aber nicht als Strecken verstehen, sondern als reelle Zahlen. Die Analogie zu Strecken besteht aber immer noch, da man deren Länge mit Zahlen beschreibt. Auf reelle Zahlen übertragen würde der Algorithmus für zwei Zahlen a, b die grösste **positive** reelle Zahl d finden, die $a = d \cdot m_a$ und $b = d \cdot m_b$ erfüllt, wobei m_a und m_b dadurch bestimmte ganze Zahlen sind. Wir nennen a, b analog zu Strecken jeweils kommensurabel, falls eine positive reelle Zahl c existiert, welche durch ganzzahlige Verfielfachung a und b ergeben kann und inkommensurabel falls kein solches c existiert. Wir übertragen zudem den Begriff des gemeinsamen Masses c. Wir führen nun den euklidischen Algorithmus ein:

3.2.1 Der euklidische Algorithmus

Es seien $r_{-1} \in \mathbb{R}, r_0 \in \mathbb{R}^+$ zwei entsprechend wählbare Zahlen, mit denen man den Algorithmus durchführt. Es findet sich nun immer eine Zahl $s_0 \in \mathbb{Z}$ und eine weitere Zahl $r_1 \in \mathbb{R}$, sodass gilt:

$$r_{-1} = s_0 r_0 + r_1; \quad 0 \leq r_1 < r_0.$$

Die Gleichung bedeutet nichts anderes als die ganzzahlige Division r_{-1} durch r_0 mit Rest r_1. Die Zahlen s_0 und r_1 sind eindeutig durch die obere Bedingung $0 \leq r_1 < r_0$ bestimmt. Man stelle sich dazu nur vor, dass falls s_0 verändert würde, auch r_1 verändert werden müsste, sodass die Gleichung immer noch bestünde. Und zwar würde r_1 um ein vielfaches von r_0 verändert, was aber bedeuten würde, dass r_1 die Bedingung nicht mehr erfüllen würde. Der euklidische Algorithmus besteht darin, dass man weitere solche eindeutig bestimmten Gleichungen findet:

$$\begin{aligned} r_0 &= s_1 r_1 + r_2 \\ r_1 &= s_2 r_2 + r_3 \\ r_2 &= s_3 r_3 + r_4 \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= s_{n-1} r_{n-1} + r_n; \quad 0 \leq r_n < r_{n-1} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3.4}$$

Wir sagen, dass der Algorithmus genau dann terminiert, falls einer der Reste, sagen wir r_k, gleich 0 ist. In diesem Fall trifft es sich, dass r_{k-1} das grösste gemeinsame Mass d von r_{-1}, r_0 ist, was hier aber nicht bewiesen wird. In der Bestimmung dieses Masses, falls es existiert, fand der Algorithmus ursprünglich seine Verwendung. Natürlich wurde er mit zwei positiven Zahlen durchgeführt, weil man diese als Strecken interpretieren kann, die damals als Definition für Zahlen dienten. Wir interessieren uns aber weniger für das grösste gemeinsame Mass an sich, sondern vielmehr für die Gegebenheiten des Algorithmus, welche aber wiederum mit der Existenzfrage eines gemeinsamen Masses der Eingabewerte r_{-1}, r_0 zu tun haben.

Der Algorithmus muss jetzt nicht zwingend terminieren, es kann auch sein, dass es kein solches r_k gibt und somit unendlich viele solche Gleichungen. In welchen Fällen es eines gibt und in welchen nicht, soll jetzt untersucht werden.

3.2.2 Gesetzmässigkeiten des euklidischen Algorithmus

Lemma 3.1. *Es seien r_{-1}, r_0 kommensurabel. Dann sind auch alle weiteren durch den euklidischen Algorithmus erzeugten Reste r_j,r_k zueinander kommensurabel und der euklidische Algorithmus terminiert.*

Beweis. Es seien r_{-1}, r_0 kommensurabel bezüglich c. Um vorerst zu zeigen, dass alle r_j, r_k für gegebene j, k kommensurabel sind, genügt es zu zeigen, dass falls $r_\ell, r_{\ell+1}$ kommensurabel bezüglich c sind, auch $r_{\ell+2}$ zu den beiden bezüglich c kommensurabel ist. Daraus folgt induktiv, dass alle r_j, r_k kommensurabel bezüglich c sind. Seien also $r_\ell, r_{\ell+1}$ kommensurabel bezüglich c. Es folgt

$$r_\ell = s_{\ell+1} r_{\ell+1} + r_{\ell+2} \quad \Rightarrow \quad c \cdot m_\ell - s_{\ell+1}(c \cdot m_{\ell+1}) = r_{\ell+2} \quad \Rightarrow \quad c \cdot (m_\ell - s_{\ell+1} m_{\ell+1}) = r_{\ell+2},$$

wobei $m_\ell, m_{\ell+1}$ entsprechende ganze Zahlen sind. Weil dann $m_\ell - s_{\ell+1} m_{\ell+1}$ ebenfalls ganzzahlig ist, ist $r_{\ell+2}$ wie gewünscht zu $r_\ell, r_{\ell+1}$ kommensurabel bezüglich c.

Jetzt zeigen wir, dass der euklidische Algorithmus mit den gegebenen Voraussetzungen terminiert. Wegen der Bedingung $r_{n-1} > r_n$ gilt folglich $r_0 > r_1 > r_2 > r_3 \ldots$. Weil aber, wie vorher gezeigt wurde, alle solchen Reste r_n ein gemeinsames Mass besitzen, sagen wir c, können alle r_n als $r_n = c \cdot m_n$ geschrieben werden. Da c eine positive Konstante ist, müssen die m_n natürliche Zahlen sein, für die analog $m_1 > m_2 > m_3 \ldots$ gilt. Unter einer solchen streng monoton fallenden Folge natürlicher Zahlen lässt sich konsequenterweise ein k finden, sodass $m_k = 0$ und somit auch $r_k = c \cdot m_k = 0$ ist. Der euklidische Algorithmus terminiert also.

■

Wir wollen indes auch die Umkehrung des **Lemmas 3.1** verifizieren:

Lemma 3.2. *Terminiert der euklidische Algorithmus, so sind r_{-1}, r_0 kommensurabel.*

Beweis. Terminiert der euklidische Algorithmus, so finden wir ein dadurch eindeutig bestimmtes k, sodass

$$r_k = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{k-2} = s_{k-1} r_{k-1}$$

gilt. Wie aus der Gleichung sofort zu entnehmen ist, sind r_{k-2}, r_{k-1} kommensurabel bezüglich r_{k-1}. Betrachtet man die Gleichungen des euklidischen Algorithmus, ersieht man induktiv – wie im Beweis des vorherigen Lemmas – dass r_{k-2}, r_{k-3} sowie r_{k-3}, r_{k-4} und schliesslich auch r_0, r_{-1} kommensurabel bezüglich r_{k-1} sind.

■

Die Argumentation bringt gleich mit sich, dass beim terminierenden euklidischen Algorithmus r_{k-1} tatsächlich ein gemeinsames Mass von r_{-1}, r_0 ist. Der Leser oder die Leserin möge bei Bedarf selber verifizieren, dass r_{k-1} auch das grösste gemeinsame Mass der beiden ist.

3.2.3 Umwandlung in einen regulären Kettenbruch

Wir betrachten die Gleichungen (3.4) des euklidischen Algorithmus bis zu einem Rest r_{k+1} unter der Annahme, dass die vorherigen Reste von 0 verschieden sind:

$$\begin{aligned}
r_{-1} = s_0 r_0 + r_1 \quad &\Rightarrow \quad \frac{r_{-1}}{r_0} = s_0 + \frac{r_1}{r_0}, \\
r_0 = s_1 r_1 + r_2 \quad &\Rightarrow \quad \frac{r_0}{r_1} = s_1 + \frac{r_2}{r_1}, \\
r_1 = s_2 r_2 + r_3 \quad &\Rightarrow \quad \frac{r_1}{r_2} = s_2 + \frac{r_3}{r_2}, \\
&\vdots \\
r_{k-2} = s_{k-1} r_{k-1} + r_k \quad &\Rightarrow \quad \frac{r_{k-2}}{r_{k-1}} = s_{k-1} + \frac{r_k}{r_{k-1}}, \\
r_{k-1} = s_k r_k + r_{k+1} \quad &\Rightarrow \quad \frac{r_{k-1}}{r_k} = s_k + \frac{r_{k+1}}{r_k}.
\end{aligned}$$

Indem wir die rechten Folgegleichungen sukzessiv ineinander einsetzen, können wir die Zahl $\frac{r_{-1}}{r_0}$ als folgender Kettenbruch darstellen:

$$\frac{r_{-1}}{r_0} = s_0 + \cfrac{1}{s_1} + \cdots + \cfrac{1}{s_{k-1}} + \cfrac{1}{s_k + \frac{r_{k+1}}{r_k}} = \left[s_0, s_1, \ldots, s_{k-1}, s_k + \frac{r_{k+1}}{r_k} \right]. \tag{3.5}$$

Dieser Kettenbruch wäre regulär, falls $s_1, s_2, \ldots, s_{k-1}, s_k$ alle positiv wären und im letzten Teilnenner $\frac{r_k}{r_{k-1}}$ verschwinden würde. Es ist kein Zufall, dass die Gleichungen fast einen regulären Kettenbruch mit sich bringen, denn sie repräsentieren sukzessive Divisionen mit Rest, die wir doch auch in den Beispielen (3.2) und (3.3) benutzt haben! Aus den vorherigen Überlegungen folgt nun eine der wichtigsten Tatsachen der Kettenbruchlehre. **Leonhard Euler** bewies als erster das folgende Theorem:

Theorem 3.1.

a) Jede rationale Zahl ξ entspricht vom Wert her genau zwei endlichen regulären Kettenbrüchen. Einmal gilt $\xi = [a_0, a_1, \ldots, a_N]$ mit $a_N \neq 1$ und einmal $\xi = [a_0, a_1, \ldots, a_N - 1, 1]$. Der Fall $\xi = 1$ stellt eine Ausnahme dar; einmal ist $1 = [1]$ (der letzte Teilnenner ist nicht ungleich 1) und einmal $1 = [0, 1]$.

b) Alle irrationalen Zahlen ξ entsprechen vom Wert her genau einem unendlichen regulären Kettenbruch.

Damit entspricht jede reelle Zahl ξ mindestens einem regulären Kettenbruch. Wir treffen daher die folgende Definition:

Definition 3.2. *Wir nennen den regulären Kettenbruch der einer reellen Zahl ξ entspricht ihre **Kettenbruchentwicklung**. Bei $\xi \in \mathbb{Q}$ meinen wir den Kettenbruch, der am wenigsten Teilnenner hat, d.h. (abgesehen vom Fall $\xi = 1$) derjenige, dessen letzter Teilnenner $a_N \neq 1$ ist.*

Wir unterteilen den Beweis in drei Schritte: Zuerst wird gezeigt, dass rationale Zahlen vom Wert her zwei endlichen regulären Kettenbrüchen entsprechen. Danach wird gezeigt, dass alle Irrationalzahlen einem unendlichen regulären Kettenbruch entsprechen. Abschliessend wird noch verifiziert, dass dies jeweils die einzigen regulären Kettenbrüche sind, die einer bestimmten rationalen, bzw. irrationalen Zahl entsprechen.

Beweis. Wir beginnen mit dem **ersten Schritt**. Die rationalen Zahlen ξ sind alle von der Form $\frac{u}{v}$, wobei wir $u \in \mathbb{Z}$ und $v \in \mathbb{N}^+$ voraussetzen können. Die Zahlen u, v sind offenbar kommensurabel bezüglich 1. Nach dem **Lemma 3.1** bedeutet dies, dass der euklidische Algorithmus mit $r_{-1} = u$ und $r_0 = v$ terminiert; es existiert also ein $(k+1)$, sodass $r_{k+1} = 0$ ist. Die Gleichungen des euklidischen Algorithmus bis zu einem

existierenden r_{k+1} lassen sich, wie bereits verifiziert wurde, in den endlichen Kettenbruch (3.5) überführen. Es ist also offensichtlich, dass sich jede rationale Zahl $\frac{u}{v}$ in den regulären endlichen Kettenbruch

$$\frac{u}{v} = s_0 + \frac{1}{|s_1|} + \cdots + \frac{1}{|s_k|} = [s_0, s_1, \ldots, s_{k-1}, s_k]$$

umwandeln lässt; denn es ist $r_{k+1} = 0$ und die ganzen Zahlen $s_1, s_2, \ldots, s_{k-1}, s_k$ sind wegen $s_n = \frac{r_{n-1}}{r_n} - \frac{r_{n+1}}{r_n}$ und $r_{n-1} > r_n > r_{n+1} \geq 0$ positive ganze Zahlen. Wir ersetzen die s_n, da sie Teilnenner eines Kettenbruches sind, durch die uns gewohnten a_n:

$$\frac{u}{v} = [a_0, a_1, \ldots, a_N]; \quad a_n = s_n, \quad N = k.$$

Dabei ist der Teilnenner a_N für $N \geq 1$ immer grösser als 1. Wäre nämlich a_N, welches bereits eine positive ganze Zahl ist, gleich 1, so müsste wegen $r_{N-1} = a_N r_N$ folglich $\frac{r_{N-1}}{r_N} = 1$ gelten, was wegen $r_{N-1} > r_N$ nicht möglich wäre. Bei einem regulären Kettenbruch muss für $N \geq 1$ per Definition $a_N \geq 1$ sein. Wenn man beim vorherigen Kettenbruch a_N als $a_N - 1 + \frac{1}{1}$ schreibt, dann wird, da für $N \geq 1$ stets $a_N - 1 \neq 0$ ist, ein zweiter regulärer Kettenbruch für $\frac{u}{v}$ erkennbar:

$$\frac{u}{v} = [a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}, a_N] = [a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}, a_N - 1, 1].$$

Wir fahren mit dem **zweiten Schritt** fort. Wir können jede irrationale Zahl ξ als $\frac{\xi}{1}$ schreiben. Offensichtlich sind $\xi, 1$ inkommensurabel. Führen wir also den euklidischen Algorithmus mit $r_{-1} = \xi$ und $r_0 = 1$ durch, so wird dieser wegen dem **Lemma 3.2** nicht terminieren, weil sonst $\xi, 1$ kommensurabel wären. Trotzdem können wir endlich viele Gleichungen bis zu einem r_{k+1} betrachten und erhalten für ξ bzw. $\frac{\xi}{1}$ den endlichen Kettenbruch (3.5)

$$\xi = \frac{\xi}{1} = \left[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k + \frac{r_{k+1}}{r_k}\right],$$

der aber nicht regulär ist, da $\frac{r_{k+1}}{r_k}$ offenbar irrational sein muss. Die Vermutung liegt nahe, dass $\xi = [a_0, a_1, \ldots]$ ist. Setzen wir $\xi_{k+1} = \frac{r_k}{r_{k+1}}$ so können wir $\xi = [a_0, a_1, \ldots, a_k, \xi_{k+1}]$ schreiben. Nach dem **Satz 3.1** folgt für die Differenz zwischen ξ und dem k^{ten} Näherungsbruch dieses Kettenbruches

$$\xi - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^k}{q_k(\xi_{k+1} q_k + q_{k-1})}.$$

Weil nach dem **Satz 3.1** mit $n \longrightarrow \infty$ auch $q_n \longrightarrow \infty$ geht, folgt

$$\lim_{k \to \infty} \left(\xi - \frac{p_k}{q_k}\right) = 0.$$

Demnach gilt nach der **Definition 2.3, S.5** bezüglich des Wertes unendlicher Kettenbrüche $\xi = [a_0, a_1, \ldots]$, was den zweiten Schritt zu Ende führt.

Wir schliessen mit dem **dritten Schritt** ab. Es gilt zu zeigen, dass alle $\xi \in \mathbb{Q}$ genau nur den zwei hergeleiteten regulären Kettenbrüchen entsprechen und dass alle $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ genau nur dem hergeleiteten regulären Kettenbruch entsprechen. Wir zeigen es für $\xi \in \mathbb{Q}$; die Argumentation für $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist im Wesentlichen dieselbe. Wir können uns zudem auf solche Kettenbrüche beschränken, deren letzter Teilnenner $a_N \neq 1$ ist, da der Kettenbruch andernfalls in die gewünschte Form gebracht werden kann – ausser bei den Kettenbrüchen $[0, 1] = [1]$, für die aber durch die folgende Argumentation ebenfalls ersichtlich wird, dass sie die einzigen sind, die der Zahl 1 entsprechen. Angenommen es wäre jetzt

$$\xi = [a_0, a_1, \ldots, a_N] \quad \text{und zugleich} \quad \xi = [a'_0, a'_1, \ldots, a'_{N'}],$$

wobei $[a_0, a_1, \ldots, a_N]$ die Kettenbruchentwicklung von ξ ist. Da die beiden Kettenbrüche denselben Wert haben, müssen ihre ganzzahligen Teile übereinstimmen, also $a_0 = a'_0$ sein. Es sei angemerkt, dass a_0 und a'_0 nur deshalb mit Gewissheit die ganzzahligen Teile der Kettenbrüche sind, weil wir nur den Fall $a_N \neq 1$ betrachten. Es muss also auch $[a_1, \ldots, a_N] = [a'_1, \ldots, a'_{N'}]$ gelten. Weil a_1 und a'_1 wieder die ganzzahligen Teile der Kettenbrüche sind, ist $a_1 = a'_1$. Die Wiederholung dieses Arguments ergibt $a_2 = a'_2, a_3 = a'_3, \ldots, a_N = a'_{N'}$ mit $N = N'$. Der Satz ist damit bewiesen. ∎

Wir wollen jetzt noch zeigen, dass alle regulären Kettenbrüche einen Wert besitzen. Das ist im **Theorem 3.1** noch nicht gezeigt worden!

Satz 3.2. *Jeder reguläre Kettenbruch entspricht vom Wert her einer reellen Zahl.*

Beweis. Wir betrachten dazu zuerst den endlichen regulären Kettenbruch $[a_0, a_1, \ldots, a_N]$. Da die Teilnenner $a_1, a_2, \ldots, a_N$ sämtlich positiv sind, kann keines der ξ_n mit $n \geq 1$ den Wert 0 haben, also bei endlichen regulären Kettenbrüchen keine Division durch 0 stattfinden. Sie haben demnach alle einen Wert.

Bei unendlichen regulären Kettenbrüchen ist der Wert $\xi_0 = [a_0, a_1, \ldots]$ als

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n}$$

definiert, falls dieser Grenzwert existiert. Die Folge der Näherungsbrüche konvergiert genau dann, wenn für **jede** beliebige positive reelle Zahl ε sich immer ein Index ℓ finden lässt, sodass

$$\left|\frac{p_j}{q_j} - \frac{p_k}{q_k}\right| \leq \varepsilon; \quad \forall j, k \geq \ell \tag{3.6}$$

gilt. Um das zu verifizieren, müssen wir den trivialen Fall $j = k$ offensichtlich nicht betrachten. Deswegen und aus Symmetriegründen dürfen wir voraussetzen, dass $j > k$ ist. Wir können also die vorherige Differenz aus der Betragsfunktion folgendermassen umschreiben:

$$\left(\frac{p_j}{q_j} - \frac{p_k}{q_k}\right) = \left(\frac{p_j}{q_j} - \frac{p_{j-1}}{q_{j-1}}\right) + \left(\frac{p_{j-1}}{q_{j-1}} - \frac{p_{j-2}}{q_{j-2}}\right) + \ldots + \left(\frac{p_{k+2}}{q_{k+2}} - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}\right) + \left(\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k}\right), \tag{3.7}$$

wobei $(j - k)$ Klammerausdrücke entstehen. Es sei angemerkt, dass nach dem **Satz 3.1** stets $q_n > 0$ ist und dass mit $n \to \infty$ auch $q_n \to \infty$ geht. Aus dem **Satz 2.1, S.6** über die Differenz aufeinanderfolgender Näherungsbrüche können wir, weil alle Teilzähler gleich 1 sind, des Weiteren schliessen, dass

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}\right) = 0$$

gilt. Wenn $k \to \infty$ geht, gehen daher die Klammerausdrücke auf der rechten Seite der Gleichung (3.7) gegen 0, also gilt auch für die Differenz auf der linken Seite:

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{p_j}{q_j} - \frac{p_k}{q_k}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty}\left|\frac{p_j}{q_j} - \frac{p_k}{q_k}\right| = 0.$$

Damit ist die Bedingung (3.6) gewiss erfüllt. ∎

Das folgende Korollar fasst schliesslich zusammen, dass zwischen den reellen Zahlen $\xi \in \mathbb{R}$ und den regulären Kettenbrüchen nahezu eine bijektive Beziehung besteht.

Korollar 3.1.

a) Jede rationale Zahl ξ entspricht genau zwei endlichen Kettenbrüchen: Einmal ist $\xi = [a_0, a_1, \ldots, a_N]$ und einmal ist $\xi = [a_0, a_1, \ldots, a_N - 1, 1]$. Umgekehrt entspricht jeder endliche Kettenbruch einer rationalen Zahl.

b) Jeder irrationale Zahl ξ entspricht genau einem unendlichen Kettenbruch $[a_0, a_1, \ldots]$. Umgekehrt entspricht jeder unendliche Kettenbruch einer irrationalen Zahl.

Beweis. Das folgt unmittelbar aus der Kombination des **Theorems 3.1** und des **Satzes 3.2**. ∎

3.3 Die lineare diophantische Gleichung

Mit der bisherigen Analyse gelingt uns nun die Synthese einer wichtigen Anwendung. Es trifft sich, dass man mit den regulären Kettenbrüchen die Lösungen (X, Y) der linearen diophantischen Gleichung

$$uX - vY = w \tag{3.8}$$

bestimmen kann. Dabei sind $u \neq 0, v \neq 0, w$ und die Unbekannten X, Y als ganzzahlig vorausgesetzt. Wenn u, v einen grössten gemeinsamen Teiler $t > 1$ haben, so teilt t auch w. Wir dürfen u, v also – ohne den Verlust der Allgemeinheit – als teilerfremd voraussetzen, denn wir können die Gleichung mittels Division mit t immer in diesen Fall überführen. Des Weiteren können wir v als positiv annehmen, da wir auch hier die Gleichung mittels Multiplikation mit -1 in diesen Fall überführen können. Wie wir vermöge des **Korollars 3.1** wissen, entsprechen rationale Zahlen immer zweien endlichen regulären Kettenbrüchen, die sich in der Anzahl Teilnenner um 1 unterscheiden. Für die rationale Zahl $\frac{u}{v}$ finden wir deshalb einen endlichen regulären Kettenbruch, der eine gerade Anzahl Teilnenner besitzt:

$$\frac{u}{v} = [a_0, a_1, \ldots, a_N]; \quad N \equiv 1 \pmod 2.$$

Es gilt also $\frac{u}{v} = \frac{p_N}{q_N}$. Weil u, v und nach dem **Satz 3.1** auch p_N, q_N teilerfremd sind, muss $u = p_N$ und $v = q_N$ gelten, da beide Brüche irreduzibel sind. Weil bekanntlich

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$$

gilt, folgern wir, dass

$$uq_{N-1} - vp_{N-1} = (-1)^{N-1} = 1$$

ist, da N ungerade ist. Multipliziert man diese Gleichung nun mit w, erhält man

$$u(q_{N-1}w) - v(p_{N-1}w) = w. \tag{3.9}$$

Offensichtlich ist $(X, Y) = (q_{N-1}w, p_{N-1}w)$ eine Lösung der linearen diophantischen Gleichung (3.8). Die endlichen regulären Kettenbrüche liefern also immer eine Lösung, aber nicht die Gesamtheit aller Lösungen. Um sie zu erhalten, substrahiert man die Gleichung (3.9) von der Gleichung (3.8) und erhält

$$u(X - q_{N-1}w) - v(Y - p_{N-1}w) = 0 \quad \Rightarrow \quad u(X - q_{N-1}w) = v(Y - p_{N-1}w).$$

Es ist also (X, Y) genau dann und nur dann eine Lösung, wenn X, Y dieser Gleichung genügen. Weil u, v teilerfremd sind, muss $v \mid X - q_{N-1}w$ sein, da $Y - p_{N-1}w$ ganzzahlig und $v \nmid u$ ist. Die vorherige Gleichung ist demnach dann und nur dann erfüllt, wenn $vk = X - q_{N-1}w$ ist, wobei k jede ganze Zahl bedeutet. Daraus folgt $uk = Y - p_{N-1}w$. Damit sind alle Lösungen (X, Y) gegeben durch

$$(X_k, Y_k) = (q_{N-1}w + vk, p_{N-1}w + uk); \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Anhand eines Beispiels, welches teilweise das letzte Unterkapitel der Kettenbruchentwicklung und das Gegenwärtige abdeckt, wenden wir uns einem bekannten Rätsel zu, dessen Lösungsansatz auf eine lineare diophantische Gleichung führt. Eine der vielen Variation dieses Rätsels lautet wie folgt:

Drei Piraten erleiden Schiffbruch und stranden anschliessend auf einer Insel, auf der es neben Trinkwasser, Kokosnüssen und einigen Äffchen nicht viel mehr gibt. Durch den Tag sammeln sie Kokosnüsse, sodass am Abend ein ganzer Haufen jener vorliegt. So findig wie die Piraten sind, geht in der Nacht einer zum Haufen, teilt ihn in drei gleich grosse kleinere Häufen und nimmt sich einer der Drittel weg. Bei der Dreiteilung ist aber eine Kokosnuss übrig geblieben, die der Pirat einem Äffchen gab. Einer der zwei anderen Piraten tut es dem letzten gleich, wobei wieder eine Kokosnuss übrig bleibt, die er ebenfalls einem Äffchen gibt. Der dritte Pirat begeht abermals dieselbe Tat. Der Haufen der am nächsten Morgen noch übrig bleibt, ist durch drei teilbar, also teilen sie ihn unter sich auf. Wie viele Kokosnüsse umfasste der originale Haufen unter der Annahme, dass die Piraten weniger als hundert Kokosnüsse sammeln konnten?

Zur Lösung bezeichnen wir die Anzahl an Kokosnüssen des ersten Haufens mit X_0, die des zweiten mit X_1, die des dritten mit X_2 und die des vierten – also des letzten Haufens – mit X_3. Offenbar ist $X_3 = 3m$, wo m eine bestimmte natürliche Zahl ist. Die Zusammenhänge zwischen den Haufen sind jetzt offenbar diese:

$$X_1 = \frac{2}{3}(X_0 - 1), \quad X_2 = \frac{2}{3}(X_1 - 1), \quad X_3 = \frac{2}{3}(X_2 - 1).$$

Die Anzahl an Kokosnüssen des ersten Haufens X_0 entspricht jetzt der Summe aus X_3, der Anzahl gestohlener Kokosnüsse und der Anzahl der an die Äffchen abgegebenen Kokosnüsse:

$$X_0 = X_3 + \frac{1}{3}(X_2 - 1) + \frac{1}{3}(X_1 - 1) + \frac{1}{3}(X_0 - 1) + 3,$$

Weil $X_3 = 3m$ ist, entsteht, indem man X_1, X_2 einzig abhängig von X_0 macht, die lineare diophantische Gleichung

$$8X_0 - 81m = 38,$$

deren Lösungen wir nun berechnen wollen. Im **Anhang A** steht beschrieben, wie man diese Gleichung erhalten kann. Wir führen also den euklidischen Algorithmus für $r_{-1} = 8, r_0 = 81$ durch:

$$\begin{aligned} 8 &= \mathbf{0} \cdot 81 + 8 \\ 81 &= \mathbf{10} \cdot 8 + 1 \\ 8 &= \mathbf{8} \cdot 1 + 0. \end{aligned}$$

Die Kettenbruchentwicklung von $\frac{8}{81}$ ist also $[0, 10, 8]$. Da der Kettenbruch eine gerade Anzahl Teilnenner haben soll, verwenden wir aber $\frac{8}{81} = [0, 10, 7, 1]$. Dabei ist $q_2 = 71$. Die Lösungen für X_0 sind also alle durch $X_0 = 71 \cdot 38 + 81k$ gegeben, wo k für alle ganzen Zahlen steht. Die kleinste Anzahl an Kokosnüssen, die der Haufen haben kann, ist diejenige, bei der wir 81 von $71 \cdot 38$ so oft abziehen wie wir können, ohne dass X_0 negativ wird. Das ist gleichbedeutend mit $71 \cdot 38 \bmod 81 = 25$. Die nächste mögliche Anzahl ist $25 + 81 = 106$, die aber, so wie auch alle weiteren, über Hundert Kokosnüsse bedeutet, also ist des Rätsels Lösung $X_0 = 25$.

3.4 Näherung an reelle Zahlen durch Näherungsbrüche

3.4.1 Art und Weise der Näherung

Jede reelle Zahl ξ besitzt eine eindeutige Kettenbruchentwicklung gegeben durch die **Definition 3.2**. Fortan wollen wir deshalb für reelle Zahlen ξ nun ξ_0 schreiben, da ja jede reelle Zahl als regulärer Kettenbruch dargestellt werden kann. Wir treffen daran anschliessend die folgende Definition:

Definition 3.3. *Der n^{te} Näherungsbruch (–zähler,–nenner) einer reellen Zahl ξ_0 sei der n^{te} Näherungsbruch (–zähler,–nenner) der Kettenbruchentwicklung von ξ_0.*

Der folgende Satz gibt Aufschluss darüber, wie sich die Näherungsbrüche einer reellen Zahl ξ_0 an sie annähern.

Satz 3.3. *Sei $\xi_0 \in \mathbb{R}$ und $\frac{p_n}{q_n}$ die Näherungsbrüche von ξ_0. Die Distanz der Näherungsbrüche zu ξ_0 wird dann mit wachsendem Index n immer kleiner:*

$$\left|\xi_0 - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left|\xi_0 - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|.$$

Des Weiteren sind alle geraden Näherungsbrüche kleiner und alle ungeraden Näherungsbrüche grösser als ξ_0:

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \ldots \xi_0 \ldots < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1},$$

wobei für $\xi_0 \in \mathbb{Q}$ der letzte Näherungsbruch $\frac{p_N}{q_N}$ mit ξ_0 zusammenfällt.

Beweis. Sei $[a_0, a_1, \ldots, a_N, \ldots]$ die Kettenbruchentwicklung einer reellen Zahl ξ_0, wobei für $\xi_0 \in \mathbb{Q}$ der Kettenbruch mit a_N ende. Für $n \geq 1$ ist stets $\xi_n > 1$. Betrachtet man nun $\xi_0 = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, \xi_n]$, folgt

$$\xi_0 = \frac{\xi_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\xi_n q_{n-1} + q_{n-2}} \quad \Rightarrow \quad \xi_n(q_{n-1}\xi_0 - p_{n-1}) = -(q_{n-2}\xi_0 - p_{n-2}).$$

Der linke Klammerterm kann unmöglich gleich 0 sein, da sonst $\xi_0 = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ wäre, was sich aber wegen $\xi_0 = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, \xi_n] \neq [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}] = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ im Widerspruch auflösen würde. Somit erhalten wir:

$$\xi_n = -\frac{q_{n-2}\xi_0 - p_{n-2}}{q_{n-1}\xi_0 - p_{n-1}}.$$

Weil stets $\xi_n > 1$ ist, gilt immerzu $|q_{n-2}\xi_0 - p_{n-2}| > |q_{n-1}\xi_0 - p_{n-1}|$. Die Zahlen $q_n\xi_0 - p_n$ werden also mit wachsendem Index n vom absoluten Wert her kleiner. Des Weiteren müssen sie, sodass $\xi_n > 0$ bleibt, abwechslungsweise ein anderes Vorzeichen annehmen; und zwar $(-1)^n$, da dies wegen $q_0 = 1$ und $p_0 = a_0 < \xi_0$ bei $n = 0$ der Fall ist. Folglich werden die Differenzen $\left|\xi_0 - \frac{p_n}{q_n}\right|$ mit wachsendem Index n immer kleiner; und zwar so, dass die geraden Näherungsbrüche kleiner bzw. die ungeraden Näherungbrüche grösser als ξ_0 sind. Der Satz ist damit bewiesen. ∎

Der **Satz 3.3** zeigt nun zumindest für reguläre Kettenbrüche endgültig, worin die Bezeichnung „Näherungsbrüche“ ihre Rechtfertigung findet. Die Näherungsbrüche nähern sich nämlich dem Wert des jeweiligen Kettenbruches bzw. der jeweiligen Zahl. Sie bilden aber nicht nur irgendeine Näherung:

3.4.2 Das Gesetz der besten Näherung

Mit den bisher gewonnenen Informationen gelingt es uns nun, etwas ganz fundamentales zu beweisen. Es wird sich herausstellen, dass Näherungsbrüche einer reellen Zahl ξ_0 „beste Näherungen“ an diese darstellen. Unter besten Näherungen versteht man rationale Zahlen, die durch die folgende Definition gegeben sind:

Definition 3.4. *Eine rationale Zahl $\frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^+$ und $\mathbf{ggT}(p, q) = 1$ ist eine „beste Näherung“ von einer reellen Zahl ξ_0, falls für jede andere rationale Zahl $\frac{u}{v}$ mit $0 < v \leq q$ die Distanz zu ξ_0 grösser ist als diejenige von $\frac{p}{q}$ zu ξ_0.*

Wenn man also nur Nenner bis und mit q betrachtet, ist $\frac{p}{q}$ diejenige rationale Zahl, deren Distanz zu ξ_0 am kleinsten ist.

Satz 3.4. *Es sei ξ_0 eine reelle Zahl mit Näherungsbrüchen $\frac{p_n}{q_n}$. Falls $n \geq 1$ ist, u, v ganze Zahlen mit $0 < v \leq q_n$ sind und $\frac{u}{v}$ ein von $\frac{p_n}{q_n}$ verschiedener Bruch ist, gilt stets:*

$$|v\xi - u| \geq |q_{n-1}\xi - p_{n-1}| > |q_n\xi - p_n|.$$

Daraus ergibt sich nun das Gesetz der besten Näherung, also dass die Näherungsbrüche von ξ_0 beste Näherungen von ihr sind; denn weil $v \leq q_n$ vorausgesetzt ist, gilt offenbar:

$$\left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{|q_n\xi - p_n|}{q_n} < \frac{|v\xi - u|}{v} = \left|\xi - \frac{u}{v}\right|,$$

was bedeutet, dass alle Näherungsbrüche einer Zahl ξ_0 beste Näherungen an diese sind.

Beweis. Vorerst setzen wir $u, v \in \mathbb{Z}$ mit $0 < v \leq q_n$ und $\frac{u}{v} \neq \frac{p_n}{q_n}$ voraus. Setzt man weiter

$$u = Xp_n + Yp_{n-1} \quad \text{und} \quad v = Xq_n + Yq_{n-1}, \tag{3.10}$$

ergeben sich X, Y als ganze Zahlen; man löst das Gleichungssystem beispielsweise nach X auf und erhält:

$$X = \frac{uq_{n-1} - vp_{n-1}}{p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n} = (-1)^{n-1}(uq_{n-1} - vp_{n-1}).$$

Damit ist X und somit auch Y ganzzahlig. Des Weiteren muss durch multiplizieren von v mit ξ_0, u mit -1 und kombinieren der Gleichungen (3.10) gelten:

$$v\xi_0 - u = X(q_n\xi_0 - p_n) + Y(q_{n-1}\xi_0 - p_{n-1}). \tag{3.11}$$

Wäre nun $Y = 0$, so ergäbe sich $u = Xp_n$ und $v = Xq_n$, was im Widerspruch zur Voraussetzung $\frac{u}{v} = \frac{p_n}{q_n}$ stünde. Deshalb ist $Y \neq 0$. Ferner muss X entweder gleich 0 sein, oder ein von Y verschiedenes Vorzeichen besitzen; andernfalls würde – entgegen der Voraussetzung – für $n \geq 1$ aufgrund von (3.10) $v > q_n$ sein. Auch $q_n\xi_0 - p_n$ und $q_{n-1}\xi_0 - p_{n-1}$ haben ein verschiedenes Vorzeichen – man ziehe den Vergleich zum Beweis des **Satzes 3.3** herbei. Ist also $X \neq 0$, so sind die zwei Ausdrücke in (3.11) auf der rechten Seite der Gleichung von gleichem Vorzeichen. Davon unabhängig wie der Wert von X ausfällt, ist demnach

$$|v\xi_0 - u| = |X(q_n\xi_0 - p_n)| + |Y(q_{n-1}\xi_0 - p_{n-1})|;$$

und weil Y eine von 0 verschiedene ganze Zahl ist, gilt

$$|v\xi_0 - u| \geq |Y(q_{n-1}\xi_0 - p_{n-1})| \geq |(q_{n-1}\xi_0 - p_{n-1})|.$$

Weil nach dem **Satz 3.3** die Distanz zwischen den Näherungsbrüchen mit wachsendem n immer kleiner wird, ist $|q_{n-1}\xi_0 - p_{n-1}| > |q_n\xi_0 - p_n|$. Also kommt man zu:

$$|v\xi_0 - u| \geq |(q_{n-1}\xi_0 - p_{n-1})| > |q_n\xi_0 - p_n|\,.$$

■

Eine Anwendung des Gesetzes der besten Näherung findet sich beispielsweise in der Näherung an irrationale Zahlen. Wir wissen bereits, dass diese immer einem unendlichen regulären Kettenbruch entsprechen. Wenn wir dessen Folge der Teilnenner $\langle a_n \rangle$ kennen, können wir durch die Näherungsbrüche beste Näherungen an die Irrationalzahl unter bestimmten Nennern finden. Betrachtet man den unendlichen regulären Kettenbruch $[1, 1, \ldots]$, wobei stets $a_n = 1$ ist, stellt man fest, dass dessen Näherungszähler und –nenner wegen den Rekursionsformeln (3.1) den Rekursionen

$$p_n = p_{n-1} + p_{n-2} \quad \text{und} \quad q_n = q_{n-1} + q_{n-2}; \quad \forall n \geq 0$$

genügen, da alle $a_n = 1$ sind. Dieser Rekursionstyp entspricht demjenigen der berühmten Fibonacci-Folge $\langle 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 \ldots \rangle$, die durch $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ mit Rekursionsanfängen $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$ gegeben ist. Beim unendlichen Kettenbruch $[1, 1, \ldots]$ ist $p_{-2} = 0$, $p_{-1} = 1$ und $q_{-1} = 0, q_0 = 1$. Diese Zahlen treten aufeinanderfolgend in der Fibonacci-Folge auf. Da die Folgen der p_n und q_n demselben Rekursionstyp entsprechen, folgt unmittelbar, dass für Näherungszähler $p_n = F_{n+2}$ bzw. für Näherungsnenner $q_n = F_{n+1}$ gilt. Für den Wert von $[1, 1, \ldots]$ erhalten wir also

$$[1, 1, \ldots] = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} =: \Phi$$

Es stellt sich heraus, dass der Wert des Kettenbruches gleich dem des goldenen Schnitts $\Phi = 1.618033988\ldots$ ist. Dieser ist durch den Grenzwert vom Verhältnis aufeinanderfolgenden Fibonacci-Zahlen definiert. Wenn wir uns diesem Wert möglichst effizient annähern wollen, berechnen wir die Näherungsbrüche anhand der Fibonacci-Folge $\langle 0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots \rangle$ und werden die besten Näherungen unter einem gewissen Nenner finden: $\frac{p_1}{q_1} = \frac{2}{1}$ ist die beste Näherung unter dem Nenner 1, $\frac{p_2}{q_2} = \frac{3}{2}$ die beste unter dem Nenner 2, $\frac{p_2}{q_2} = \frac{5}{3}$ die beste unter dem Nenner 3 etc. Die Näherungen werden, wie wir wissen, mit grösser werdendem Nenner immer besser, beispielsweise liefert $\frac{p_{20}}{q_{20}} = \frac{17711}{10946} = 1.618033985017357\ldots 90316$ eine bis auf die achte Nachkommastelle korrekte Näherung.

3.5 Kriterien dafür, dass ein Bruch ein Näherungsbruch ist.

Der Zweck dieses Unterkapitels besteht in der Findung nach notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass ein Bruch $\frac{u}{v}$ ein Näherungsbruch einer Zahl ξ_0 ist. Darunter versteht sich, dass nicht nur $\frac{u}{v} = \frac{p_n}{q_n}$, sondern auch $u = p_n$ und $v = q_n$ gelten muss! Zunächst bestimmen wir eine notwendige, jedoch nicht hinreichende Bedingung.

Lemma 3.3. *Damit ein Bruch $\frac{u}{v}$ ein Näherungsbruch der Zahl ξ_0 sein kann, muss*

$$\left|\xi_0 - \frac{u}{v}\right| < \frac{1}{v^2}$$

gelten.

Beweis. Für $\xi_0 \in \mathbb{Z}$ stimmt das Lemma bereits; denn der einzige Näherungsbruch ist dann $\frac{\xi_0}{1}$ und der erfüllt die Ungleichung. Es sei nun $\xi_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ und $\xi_0 = [a_0, \ldots, a_n, \xi_{n+1}]$. Mittels des **Satzes 3.1** gilt:

$$\xi_0 - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n\,(\xi_{n+1}q_n + q_{n-1})} \quad \Rightarrow \quad \left|\xi_0 - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n\,(a_{n+1}q_n + q_{n-1})} = \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

Gleichheit ist gerade nur dann erfüllt, wenn a_{n+1} der letzte Teilnenner ist, da er in diesem Fall gleich ξ_{n+1} ist. Ist die Gleichheit nicht erfüllt, gilt wegen $q_n \leq q_{n+1}$ die Ungleichung

$$\left|\xi_0 - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}.$$

Wenn aber a_{n+1} der letzte Teilnenner ist, Gleichheit also eintritt, gilt stets $q_n < q_{n+1}$; denn $q_n = q_{n+1}$ ist nur mit $q_0 = q_1$ möglich, könnte also nur bei $[a_0, 1]$ eintreten. Dann wäre aber $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ kein Näherungsbruch von ξ_0 (siehe **Definition 3.3**). Die obige Ungleichung besteht also für alle Näherungsbrüche von ξ_0.

Es verbliebe noch zu zeigen, dass die Bedingung nicht hinreichend ist, bzw. dass es Brüche gibt, die keine Näherungsbrüche sind, aber dennoch dieselbe Ungleichung erfüllen. Das liegt aber nicht in unserem Interesse. Der oder die Interessierte möge aber bei Bedarf „Nebennäherungsbrüche“ verwenden, um solche Brüche zu finden (siehe dazu Perron [4, S. 47]). ∎

Bei der Suche nach einer notwendigen und hinreichenden Bedingung dafür, dass $\frac{u}{v}$ ein Näherungsbruch von ξ_0 ist, werden wir uns auf ξ_0 beschränken, die keine ganzen Zahlen sind; denn diese besitzen nur $\frac{\xi_0}{1}$ als Näherungsbruch. Ferner untersuchen wir nur $\frac{u}{v} \neq \xi_0$; denn wäre $\frac{u}{v} = \xi_0$, müssten u, v, sodass der vorherige Bruch ein besagter Näherungsbruch ist, lediglich teilerfremd sein. Insgesamt ziehen wir nur teilerfremde u, v in Betracht, die der Gleichung

$$\xi_0 - \frac{u}{v} = \frac{\varepsilon\delta}{v^2} \tag{3.12}$$

genügen, wobei je nach Vorzeichen der Differenz ε eine der Zahlen ± 1 und $0 < \delta < 1$ ist, da die Differenz zwischen der **nicht ganzen** Zahl ξ_0 und einem ihrer Näherungsbrüche – mit der Ausnahme des letzten, falls $\xi_0 \in \mathbb{Q}$ ist – nach dem **Lemma 3.3** stets in dieser Form ist. Durch die Einschränkungen, die wir $\frac{u}{v}$ auferlegt haben, kann der Bruch also jeder Näherungsbruch von ξ_0 – ausser dem letzten – sein. Wir entwickeln den Bruch $\frac{u}{v}$ in einen der zwei regulären Kettenbrüche, denen er entspricht:

$$\frac{u}{v} = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}] = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}.$$

Hierbei sind p_{n-1} und q_{n-1} auf $\frac{u}{v}$ bezogen. Da u, v teilerfremd sind, ist $u = p_{n-1}$ und $v = q_{n-1}$, also

$$\xi_0 - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{\varepsilon\delta}{q_{n-1}^2}.$$

Weil wir $(n-1)$ je nachdem, welchen Kettenbruch wir für $\frac{u}{v}$ wählen, nach Belieben gerade oder ungerade machen können, wählen wir $(n-1)$ so, dass $\varepsilon = (-1)^{n-1}$ wird. Wir definieren nun die Zahl ω durch die Gleichung

$$\xi_0 = \frac{p_{n-1}\omega + p_{n-2}}{q_{n-1}\omega + q_{n-2}}, \tag{3.13}$$

woraus jetzt folgt, dass

$$\frac{\varepsilon\delta}{q_{n-1}^2} = \xi_0 - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{p_{n-2}q_{n-1} - p_{n-1}q_{n-2}}{q_{n-1}(q_{n-1}\omega + q_{n-2})} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1}(q_{n-1}\omega + q_{n-2})}$$

gilt. Lösen wir nach δ und ω auf, erhalten wir

$$\delta = \frac{q_{n-1}}{q_{n-1}\omega + q_{n-2}} \quad \text{und} \quad \omega = \frac{q_{n-1} - \delta q_{n-2}}{\delta q_{n-1}}, \tag{3.14}$$

da wir $(-1)^{n-1} = \varepsilon$ gesetzt haben. Weil q_{n-2}, q_{n-1} und δ positiv sind, ist auch ω positiv. Die Gleichung (3.13) impliziert jetzt

$$\xi_0 = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, \omega];$$

ist also $\omega > 1$, so lässt sich ω in einen endlichen oder unendlichen regulären Kettenbruch $[a_n, a_{n+1}\ldots]$ entwickeln, wo $a_n \geq 1$ ist. Damit ist $\xi_0 = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots]$ und folglich $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{u}{v}$ ein Näherungsbruch von ξ_0. In diesem Fall ist offenbar $\omega = \xi_n$. Ist hingegen $\omega \leq 1$, so muss sein:

$$\xi_0 = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, \omega] = \left[a_0, \ldots, a_{n-1} + \left\lfloor \frac{1}{\omega} \right\rfloor, \ldots\right].$$

Dabei ist offenbar $\left\lfloor \frac{1}{\omega} \right\rfloor \geq 1$. Der $(n-2)^{\text{te}}$ bzw. $(n-1)^{\text{te}}$ Näherungsbruch von ξ_0 ist jetzt

$$\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\left(a_{n-1} + \left\lfloor \frac{1}{\omega} \right\rfloor\right) p_{n-2} + p_{n-3}}{\left(a_{n-1} + \left\lfloor \frac{1}{\omega} \right\rfloor\right) q_{n-2} + q_{n-3}} = \frac{p_{n-1} + \left\lfloor \frac{1}{\omega} \right\rfloor p_{n-2}}{q_{n-1} + \left\lfloor \frac{1}{\omega} \right\rfloor q_{n-2}}.$$

Da q_{n-1} zwischen zwei aufeinanderfolgenden Näherungsnennern von ξ_0 liegt, kann nach deren Bildungsgesetz (3.1) $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{u}{v}$ kein Näherungsbruch von ξ_0 sein. Also ist $\frac{u}{v}$ genau dann und nur dann ein Näherungsbruch von ξ_0, wenn $\omega > 1$ ist. Wir halten also den folgenden Satz fest:

Satz 3.5. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein irreduzibler Bruch $\frac{u}{v} = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}]$ ein Näherungsbruch der Zahl $\xi_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ist, besteht darin, dass $\omega > 1$ ist, oder was nach der Gleichung* (3.14) *gleichbedeutend ist, dass*

$$\delta < \frac{q_{n-1}}{q_{n-1} + q_{n-2}}$$

ist, wobei die Näherungsnenner q_{n-2}, q_{n-1} auf den Bruch $\frac{u}{v}$ bezogen sind.

Aufgrund des **Satzes 3.5** beweisen wir den für die Zukunft wichtigen

Satz 3.6. *Ist $\xi_0 \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}^+$ und genügen die positiven ganzen Zahlen u, v der Ungleichung $|u^2 - \xi_0^2 v^2| < \xi_0$, dann ist $\frac{u}{v}$ einem Näherungsbruch der Zahl ξ_0 gleich.*

Beweis. Wie bereits angekündigt, werden wir zum Beweis den **Satz 3.5** verwenden. Die folgende Argumentation gilt daher – weil ξ_0 der besagten Ungleichung zudem positiv ist – nur für $\xi_0 \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}^+$. Genügen u, v der Ungleichung $|u^2 - \xi_0^2 v^2| < \xi_0$ und ist $\frac{u}{v}$ reduzierbar, dann genügen Zähler und Nenner der irreduziblen Version auch der Ungleichung, also können wir zum Beweis u, v als teilerfremd voraussetzen. Definieren wir die Zahlen u, v durch die Gleichung

$$\xi_0^2 v^2 - u^2 = \varepsilon\theta\xi_0; \quad 0 < \theta < 1, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

so genügen u, v offenbar der gewünschten Ungleichung. Ferner erhalten wir

$$\xi_0 v - u = \frac{\varepsilon\theta\xi_0}{\xi_0 v + u} \quad \Rightarrow \quad \xi_0 - \frac{u}{v} = \frac{\varepsilon\theta\xi_0}{v(\xi_0 v + u)}. \tag{3.15}$$

Im Vergleich mit der Gleichung (3.12) ist also

$$\delta = \frac{\theta\xi_0 v}{\xi_0 v + u} = \frac{\theta\xi_0 q_{n-1}}{\xi_0 q_{n-1} + p_{n-1}},$$

wobei wieder

$$\frac{u}{v} = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}] = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \quad \text{bzw.} \quad u = p_{n-1}, v = q_{n-1}$$

ist. Es sei angemerkt, dass der Vergleich $0 < \delta < 1$ erfordert, was hier offensichtlich erfüllt ist. Sodass $\frac{u}{v}$ ein Näherungsbruch von ξ_0 ist, genügt es nach dem **Satz 3.5** zu zeigen, dass die Ungleichung

$$\delta = \frac{\theta\xi_0 q_{n-1}}{\xi_0 q_{n-1} + p_{n-1}} < \frac{q_{n-1}}{q_{n-1} + q_{n-2}}, \quad \text{also} \quad \theta\xi_0(q_{n-1} + q_{n-2}) < \xi_0 q_{n-1} + p_{n-1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}^+$ besteht. Diese Ungleichung hat aber sicherlich Gültigkeit, wenn $\theta q_{n-2} < \frac{p_{n-1}}{\xi_0}$ ist. Stellt man die erste Gleichung in (3.15) nach $\frac{p_{n-1}}{\xi_0}$ $\left(= \frac{u}{\xi_0}\right)$ um, geht diese Ungleichung in die Ungleichung

$$q_{n-2} < \frac{q_{n-1}}{\theta} - \frac{\varepsilon}{\xi_0 q_{n-1} + p_{n-1}}$$

über, die für alle $n \geq 3$ und $n = 1$ offenbar besteht, weil dann stets $q_{n-1} \geq q_{n-2} + 1$ ist. Was den Fall $n = 2$ angeht: Wir haben $\varepsilon = (-1)^{n-1}$ gewählt, also ist hier $\varepsilon = -1$. Wegen $q_1 \geq q_0$ ist die Ungleichung demnach erfüllt und der Satz damit bewiesen. ∎

4 Periodische reguläre Kettenbrüche

Das folgende Kapitel wendet sich einem bemerkenswerten Typus regulärer Kettenbrüche zu: den periodischen regulären Kettenbrüchen. Ihre Beziehung zu quadratischen Irrationalzahlen – insbesondere zu Quadratwurzeln $\sqrt{d}$ – wird uns ermöglichen, Lösungen (X, Y) der allgemeinen Pellschen Gleichung $X^2 - dY^2 = \pm 1$ zu finden. In der Tat ist dabei ja

$$\left(\frac{X}{Y}\right)^2 - d = \frac{1}{Y^2} \approx 0,$$

was vermuten lässt, dass $\frac{X}{Y}$ eine Näherung bzw. vielleicht sogar beste Näherung an $\sqrt{d}$ bildet. Wir werden dem aber erst später auf den Grund gehen. Zunächst legen wir die Grundlage periodischer regulärer Kettenbrüche.

4.1 Definition periodische reguläre Kettenbrüche

Wir unterteilen **periodische** reguläre Kettenbrüche in zwei Kategorien, nämlich in reinperiodische und gemischtperiodische.

4.1.1 Reinperiodische reguläre Kettenbrüche

Unter einem **reinperiodischen** regulären Kettenbruch versteht man einen unendlichen regulären Kettenbruch, dessen Folge der Teilnenner $\langle a_n \rangle$ totale Periodizität aufweist. Damit ist gemeint, dass der Kettenbruch von der Form

$$\xi_0 = [a_0, a_1, \ldots, a_{\ell-1}, a_0, a_1, \ldots, a_{\ell-1}, a_0, a_1, \ldots, a_{\ell-1}, \ldots]$$

ist, wobei sich die Teilnenner $a_0, a_1, \ldots, a_{\ell-1}$ in dieser Reihenfolge unendlich oft wiederholen. Die vorher erwähnten Teilnenner bilden die **Periode**, deren Länge ℓ ist. Der Kettenbruch kennzeichnet sich dadurch, dass alle $a_n = a_{n+\ell}$ sind. Wir notieren solche Kettenbrüche der Einfachheit wegen folgendermassen:

$$\xi_0 = [\overline{a_0, a_1, \ldots, a_{\ell-1}}].$$

Reine Periodizität setzt zudem voraus, dass das Anfangsglied a_0 stets eine positive ganze Zahl ist, weil es später im Kettenbruch noch vorkommt.

4.1.2 Gemischtperiodische reguläre Kettenbrüche

Unter einem **gemischtperiodischen** regulären Kettenbruch verstehen wir einen regulären Kettenbruch, bei dem die Periode nicht bereits mit dem Anfangsglied a_0 beginnt. Konkret meinen wir einen regulären Kettenbruch der Form

$$\xi_0 = [a_0, a_1, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_{m+\ell-1}, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_{m+\ell-1}, \ldots],$$

den wir abermals als

$$\xi_0 = [a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, \overline{a_m, a_{m+1}, \ldots, a_{m+\ell-1}}]$$

notieren. Die hiesige **Periode** bilden die Teilnenner $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_{m+\ell-1}$, wobei ℓ die Länge der Periode ist. Wir bezeichnen $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$ als **Vorperiode**. Diese Kettenbrüche sind nun dadurch gekennzeichnet, dass für jedes a_n mit $n \geq m$ wiederum $a_n = a_{n+\ell}$ gilt. In diesem Fall darf das Anfangsglied a_0 zudem wieder jede beliebige ganze Zahl sein, da es nicht zwingend in der Periode vorkommt.

4.1.3 Periodenmanipulationen

Wir können nun jeden reinperiodischen regulären Kettenbruch als einen gemischtperiodischen auffassen. Des Weiteren lässt sich jeder gemischtperiodische Kettenbruch als ein gemischtperiodischer mit längerer Vorperiode darstellen. Offenkundig deckt die folgende Gleichung gerade beide Fälle ab:

$$[a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, [\overline{a_m, a_{m+1}, \ldots, a_{m+\ell-1}}]] = [a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, [a_m, \overline{a_{m+1}, \ldots, a_{m+\ell-1}, a_m}]].$$

Weiter lassen sich mehrere Perioden zu einer zusammenfügen. Konkret ist zum Beispiel

$$[a_0, a_1, \ldots, \overline{a_m, \ldots, a_{m+\ell-1}}] = [a_0, a_1, \ldots, \overline{a_m, \ldots, a_{m+\ell-1}, a_m, \ldots, a_{m+\ell-1}}].$$

Wir bezeichnen eine Periode als **primitiv**, falls sie nicht aus mehreren Perioden mit kleinerer Länge zusammengefügt ist und andernfalls als **imprimitiv**. Ist die Länge einer primitiven Periode ℓ, so sind die Längen der imprimitiven Perioden offenkundig alle von der Form $k\ell$, wobei $k = 2, 3, 4, \ldots$ ist.

4.2 Quadratische Irrationalzahlen

Im **Abschnitt 3.4.2** des Gesetzes der besten Näherung haben wir gesehen, dass $\xi_0 = [1, 1, \ldots]$ dem goldenen Schnitt Φ entspricht. Diese Schlussfolgerung basierte auf Überlegungen mit den Rekursionsformeln und mathematischem Allgemeinwissen bezüglich der Definition des goldenen Schnitts. Doch es gibt noch einen anderen Weg, der zu dieser Schlussfolgerung führt. Da der Kettenbruch reinperiodisch ist, gilt:

$$\xi_0 = [1, 1, \ldots] = 1 + \frac{1}{[1, 1, \ldots]}.$$

Wir finden wegen

$$\xi_0 = 1 + \frac{1}{\xi_0} \quad \Rightarrow \quad \xi_0^2 - \xi_0 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi_0 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

dass ξ_0 die Lösung einer quadratischen Gleichung ist. Da $\xi_0 > 1$ ist, muss ξ_0 der angegebenen positiven Lösung der quadratischen Gleichung entsprechen. Der Ausdruck $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ist bekanntlich gleich Φ, also kann man auch auf diese Weise den Wert von $[1, 1, \ldots]$ bestimmen, bzw. dessen Gleichheit zu Φ erkennen.

In diesem Unterkapitel werden wir uns mit sogenannten **quadratischen Irrationalzahlen** beschäftigen. Wie man bereits antizipieren kann, fällt der goldene Schnitt unter diese Kategorie. Diese Zahlen sind nun gegeben durch die

Definition 4.1. *Eine irrationale Zahl ξ_0 heisst quadratische Irrationalzahl, wenn sie die Lösung einer quadratischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten ist. Formal muss also*

$$A\xi_0^2 + B\xi_0 + C = 0; \quad A \in \mathbb{Z}^*, \quad B, C \in \mathbb{Z}$$

gelten, wobei A, B, C entsprechende ganze Zahlen sind.

Es sei hier angemerkt, dass eine quadratische Gleichung mit rationalen Koeffizienten durch Multiplikation in eine mit ganzzahligen Koeffizienten überführt werden kann, ohne dass sich ihre Lösungen verändern. Des Weiteren sind die Lösungen einer quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c$ für beliebige $a \neq 0, b, c$ bekanntlich durch

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

gegeben. Betrachten wir eine Lösung, so nennen wir die jeweils andere die dazu **konjugierte Zahl**. Wegen der Lösungsformel unterliegen alle quadratischen Irrationalzahlen der Form

$$\xi_0 = \frac{\sqrt{D} + P}{Q}; \quad P \in \mathbb{Z}, \quad Q \in \mathbb{Z}^*, \quad D \in \mathbb{N}, \tag{4.1}$$

wobei D keine Quadratzahl sein darf, weil ξ_0 sonst nicht irrational wäre. Es scheint so, als würde diese Form alle Lösungen unbeachtet lassen, deren Wurzeln ein negatives Vorzeichen haben. Die Form deckt aber offenbar alle Lösungen ab, deren Wurzeln ein positives Vorzeichen haben. Die dazu konjugierten Zahlen

$$\frac{-\sqrt{D} + P}{Q} = \frac{\sqrt{D} - P}{-Q}$$

kann man aber, wie hier ersichtlich wird, wieder in die gewünschte Form bringen, indem man P, Q mit -1 multipliziert.

Dass $[1, 1, \ldots]$ einer quadratischen Irrationalzahl entspricht, kommt offenbar von der Periodizität des Kettenbruches. Der Folgende von Euler [5] herrührende Satz zeigt auf, dass der Kettenbruch in dieser Hinsicht kein Einzelfall ist:

Satz 4.1. *Ein periodischer regulärer Kettenbruch entspricht immer einer quadratischen Irrationalzahl.*

Beweis. Weil sich alle reinperiodischen regulären Kettenbrüche als gemischtperiodische schreiben lassen, genügt es, die Aussage für ebensolche zu beweisen. Für sie gilt jetzt:

$$\xi_0 = [a_0, \ldots, a_{m-1}, \overline{a_m, \ldots, a_{m+\ell-1}}] = [a_0, \ldots, a_{m-1}, \xi_m] = [a_0, \ldots, a_{m-1}, a_m, \ldots, a_{m+\ell-1}, \xi_{m+\ell}].$$

Dabei ist $\xi_m = \xi_{m+\ell}$. Dadurch erhalten wir zwei Gleichungen, nämlich

$$\xi_0 = \frac{p_m}{q_m} = \frac{\xi_m p_{m-1} + p_{m-2}}{\xi_m q_{m-1} + q_{m-2}} \quad \text{und} \quad \xi_0 = \frac{p_{m+\ell}}{q_{m+\ell}} = \frac{\xi_m p_{m+\ell-1} + p_{m+\ell-2}}{\xi_m q_{m+\ell-1} + q_{m+\ell-2}}.$$

Weil wir die Kettenbruchentwicklung, also alle Näherungszähler und -nenner von ξ_0 kennen, handelt es sich um zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Indem wir die Unbekannte ξ_m eliminieren, erhalten wir für ξ_0

$$A\xi_0^2 + B\xi_0 + C = 0, \tag{4.2}$$

wobei A, B, C für

$$\begin{aligned} A &= q_{m-1}q_{m+\ell-2} - q_{m-2}q_{m+\ell-1}, \\ B &= p_{m+\ell-1}q_{m-2} + p_{m-2}q_{m+\ell-1} - p_{m-1}q_{m+\ell-2} - p_{m+\ell-2}q_{m-1}, \\ C &= p_{m-1}p_{m+\ell-2} + p_{m-2}p_{m+\ell-1} \end{aligned}$$

stehen. Für reinperiodische reguläre Kettenbrüche sind insbesondere, weil dort $m = 0$ sein muss, $A = -q_{\ell-1}$, $B = p_{\ell-1} - q_{\ell-2}$ und $C = p_{\ell-2}$. Es verbleibt zu zeigen, dass $A \neq 0$ ist, sodass die Gleichung (4.2) allenfalls quadratisch ist. Falls $A = 0$ wäre, würde

$$q_{m-1}q_{m+\ell-2} = q_{m-2}q_{m+\ell-1} \quad \Rightarrow \quad q_{m-2} = \frac{q_{m-1}q_{m+\ell-2}}{q_{m+\ell-1}}$$

gelten. Weil $q_{m+\ell-1}, q_{m+\ell-2}$ wegen $p_{m+\ell-1}q_{m+\ell-2} - p_{m+\ell-2}q_{m+\ell-1} = (-1)^{m+\ell-2}$ teilerfremd sind, müsste $q_{m+\ell-1} \mid q_{m-1}$ sein, was sich aber in allen ausgenommen von zwei Fällen als unmöglich herausstellt, da $q_{m+\ell-1} > q_{m-1}$ ist. Einer dieser Fälle könnte eintreten, wenn gleichzeitig $m = 1, \ell = 1$ und $a_1 = 1$ ist, sodass $q_0 = q_1 = 1$ ist; aber die erste Gleichung oben kann dann wegen $q_0^2 \neq q_{-1}q_1 = 0$ nicht bestehen. Im zweiten Fall, wenn $m = 0$ und sodann $q_{m+\ell-1} \mid q_{m-1} = 0$ wird, ist der Kettenbruch reinperiodisch, also $A = -q_{\ell-1} \neq 0$. Der Koeffizient A kann also in keinem Fall gleich 0 sein. Der Satz ist damit bewiesen. ∎

Wie so oft können wir auch die Umkehrung des Satzes beweisen, die sich für unsere Zwecke als unerlässlich herausstellen wird. Wir schicken aber einige Hilfssätze voraus:

Lemma 4.1. *Sei $[a_0, a_1, \ldots]$ die Kettenbruchentwicklung einer quadratischen Irrationalzahl ξ_0. Dann entsprechen alle ξ_n der Form*

$$\xi_n = \frac{\sqrt{D} + P_n}{Q_n}, \tag{4.3}$$

wobei D eine Natürliche Zahl, aber keine keine Quadratzahl ist und P_n, Q_n ganze Zahlen sind. Des weiteren gilt immerzu $Q_n \mid D - P_n^2$.

Beweis. Nach (4.1) entsprechen alle quadratischen Irrationalzahlen ξ_0 der Form

$$\xi_0 = \frac{\sqrt{D} + P_0}{Q_0},$$

wobei wir die P, Q aus (4.1) zweckmässig mit Indizes versehen. Wir dürfen ferner voraussetzen, dass

$$Q_{-1} \coloneqq \frac{D - P_0^2}{Q_0}$$

eine ganze Zahl ist, also $Q_0 \mid D - P_0^2$ gilt. Wäre dem nicht schon von Anfang an so, könnten wir P_0, Q_0 und D, ohne dass der Wert von ξ_0 verändert wird, folgendermassen ersetzen, dass dem so wird:

$$\xi_0 = \frac{\sqrt{Dk^2} + P_0 k}{Q_0 k} = \frac{\sqrt{D'} + P_0'}{Q_0'} \quad \Rightarrow \quad \frac{D' - P_0'^2}{Q_0'} = k\frac{D - P_0^2}{Q_0}$$

Bei einer gezielten Wahl von k wird der Ausdruck sicherlich ganz. Wir setzen also voraus, dass P_0, Q_0 und D bereits in geeigneter Form sind. Wir beweisen das Lemma durch Induktion. Wir nehmen also an, dass es für ξ_n gilt. In Anbetracht der Kettenbruchentwicklung $[a_0, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots]$ von ξ_0 gilt offenbar

$$\xi_n = a_n + \frac{1}{\xi_{n+1}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\xi_{n+1}} = \xi_n - a_n = \frac{\sqrt{D} + P_n}{Q_n} - a_n = \frac{\sqrt{D} + P_n - a_n Q_n}{Q_n},$$

wodurch wir

$$\xi_{n+1} = \frac{Q_n}{\sqrt{D} + P_n - a_n Q_n} = \frac{Q_n}{\sqrt{D} - (a_n Q_n - P_n)} = \frac{\sqrt{D} + a_n Q_n - P_n}{\frac{1}{Q_n}\left[D - (a_n Q_n - P_n)^2\right]} = \frac{\sqrt{D} + P_{n+1}}{Q_{n+1}}$$

erhalten. Dabei ist

$$\begin{aligned} P_{n+1} &\coloneqq a_n Q_n - P_n, \\ Q_{n+1} &\coloneqq \frac{D - (a_n Q_n - P_n)^2}{Q_n} = \frac{D - P_n^2 + 2a_n Q_n P_0 - a_n^2 Q_n^2}{Q_n} = \frac{D - P_n^2}{Q_n} + 2a_n P_n - a_n^2 Q_n. \end{aligned}$$

Nach unserer Annahme ist $Q_n \mid D - P_n^2$ der Fall, also sind P_{n+1}, Q_{n+1} wieder ganze Zahlen. Da der Ausdruck

$$\frac{D - P_{n+1}^2}{Q_{n+1}} = \frac{D - (a_n Q_n - P_n)^2}{Q_{n+1}} = Q_n$$

ebenfalls wieder eine ganze Zahl ist, gilt das Lemma auch für ξ_{n+1}. ∎

Weil ξ_n immer eine quadratische Irrationalzahl ist, bezeichnen wir die jeweils dazu konjugierte Zahl als μ_n, die wegen $D \neq 0$ verschieden von ξ_n ist. Offenbar gilt also

$$\mu_n = \frac{-\sqrt{D} + P_n}{Q_n}. \tag{4.4}$$

Um die konjugierten Zahlen μ_n in Zukunft sinnvoll verwenden zu können, erweist sich der folgende Hilfssatz als besonders hilfreich:

Lemma 4.2. *Es sei $\sqrt{D} \notin \mathbb{Q}$. Dann zieht $U + V\sqrt{D} = 0$ mit $U, V \in \mathbb{Z}$ auch $U - V\sqrt{D} = 0$ nach sich.*

Beweis. Es sei $U + V\sqrt{D} = 0$ mit $U, V \in \mathbb{Z}$ und $\sqrt{D} \notin \mathbb{Q}$. Weil $\sqrt{D}$ irrational ist, müssen $U, V = 0$ sein. Daher gilt auch $U - V\sqrt{D} = 0$. ∎

Wir können jetzt den **Lagrangeschen Satz** – also die Umkehrung des **Satzes 4.1** – beweisen, der sich erstmals bei Lagrange [6] findet.

Satz 4.2. *Alle quadratischen Irrationalzahlen ξ_0 entsprechen einem periodischen regulären Kettenbruch.*

Beweis. Es sei ξ_0 eine quadratische Irrationalzahl. Nach dem **Lemma 4.1** folgt aus

$$\xi_0 = [a_0, \ldots, a_{n-1}, \xi_n] = \frac{\xi_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\xi_n q_{n-1} + q_{n-2}} \quad \text{die Gleichung} \quad \frac{\sqrt{D} + P_0}{Q_0} = \frac{\frac{\sqrt{D}+P_n}{Q_n} p_{n-1} + p_{n-2}}{\frac{\sqrt{D}+P_n}{Q_n} q_{n-1} + q_{n-2}}.$$

Durch aufwendige Umstellung können wir sie in eine der Form $U + V\sqrt{D} = 0$ bringen, wobei U, V ganze Zahlen sind. Also ist nach dem **Lemma 4.2** auch $U - V\sqrt{D} = 0$. Diese Gleichung erhält man aber auch, wenn man in der obigen Gleichung das Vorzeichen von $\sqrt{D}$ ändert, sodass dann auch die Gleichung

$$\mu_0 = \frac{\mu_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\mu_n q_{n-1} + q_{n-2}},$$

welche durch den Vorzeichenwechsel entsteht, Gültigkeit hat. Indem wir nach μ_n umstellen, erhalten wir

$$\mu_n = \frac{p_{n-2} - q_{n-2}\mu_0}{q_{n-1}\mu_0 - p_{n-1}} = -\frac{q_{n-2}\mu_0 - p_{n-2}}{q_{n-1}\mu_0 - p_{n-1}} = -\frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} \cdot \frac{\mu_0 - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}}{\mu_0 - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}}.$$

Weil $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}, \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ Näherungsbrüche von ξ_0 sind, muss

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_0 - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}}{\mu_0 - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}} = \frac{\mu_0 - \xi_0}{\mu_0 - \xi_0} = 1$$

gelten. Wir können also neu

$$\mu_n = -\frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}(1 + \varepsilon_n)$$

schreiben, wobei $|\varepsilon_n|$ für genügend grosse n beliebig klein werden kann. Es lässt sich also immer ein n finden, sodass μ_n negativ ist. In ähnlicher Weise wie vorhin, folgt wegen dem **Lemma 4.2** aus

$$\xi_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{\xi_n} \quad \text{die Gleichung} \quad \mu_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{\mu_n}.$$

Da $a_{n-1} > 1$ und für genügend grosse n zudem $\mu_{n-1} < 0$ ist, folgt

$$\frac{1}{\mu_n} = \mu_{n-1} - a_{n-1} < -a_{n-1} \leq -1 \quad \Rightarrow \quad -1 < \mu_n < 0.$$

Weil aber für $n \geq 1$ immer $\xi_n > 1$ ist, ist sowohl $\xi_n - \mu_n$ als auch $\xi_n + \mu_n$ positiv. Setzen wir die dazugehörigen formalen Ausdrücke (4.3) und (4.4) ein, so erhalten wir

$$\frac{\sqrt{D} + P_n}{Q_n} - \frac{-\sqrt{D} + P_n}{Q_n} = \frac{2\sqrt{D}}{Q_n} > 0 \quad \text{und} \quad \frac{\sqrt{D} + P_n}{Q_n} + \frac{-\sqrt{D} + P_n}{Q_n} = \frac{2P_n}{Q_n} > 0.$$

Also sind auch $P_n, Q_n > 0$. Weiter muss, weil μ_n negativ ist, $P_n < \sqrt{D}$ sein. Da P_n eine positive ganze Zahl ist, muss ferner $P_n \leq \lfloor\sqrt{D}\rfloor$ sein. Schliesslich ergibt sich noch, da $\xi_n > 1$ und Q_n positiv ist:

$$\frac{\sqrt{D} + P_n}{Q_n} > 1 \quad \Rightarrow \quad Q_n < \sqrt{D} + P_n \quad \Rightarrow \quad Q_n \leq 2\lfloor\sqrt{D}\rfloor.$$

Weil wir immer für genügend grosse n argumentiert haben, sind ab einem gewissen Index n alle Q_n, P_n positive ganze Zahlen und durch $\lfloor\sqrt{D}\rfloor$ bzw. $2\lfloor\sqrt{D}\rfloor$ beschränkt. Ab diesem Index n kann P_n höchstens $\lfloor\sqrt{D}\rfloor$ und Q_n höchstens $2\lfloor\sqrt{D}\rfloor$ verschiedene Zahlen annehmen. Insgesamt gibt es daher für $\xi_n = \frac{\sqrt{D}+P_n}{Q_n}$ genau $2\lfloor\sqrt{D}\rfloor^2$ Bildungsmöglichkeiten. Nach dem **Schubfachprinzip** – bekannter als **pigeonhole principle** – müssen spätestens unter $2\lfloor\sqrt{D}\rfloor^2 + 1$ der ξ_n sich zwei gleichwertige finden, sagen wir $\xi_m = \xi_{m+\ell}$. Konkret ist also

$$[a_m, a_{m+1}, \ldots] = [a_{m+\ell}, a_{m+\ell+1}, \ldots].$$

Aus dem **Korollar 3.1** folgt nun, dass die Kettenbrüche nicht nur gleichwertig, sondern auch dieselben Teilnenner haben müssen. Also ist $a_m = a_{m+\ell}, a_{m+1} = a_{m+\ell+1}, \ldots$, was unsere gewünschte Periodizität beweist. ∎

Will man jetzt eine quadratische Irrationalzahl $\frac{\sqrt{D}+P_0}{Q_0}$ in ihren Kettenbruch entwickeln, so wählt man zunächst P_0, Q_0 und D idealerweise so, dass $\frac{D-P_0^2}{Q_0}$ eine ganze Zahl ist. Danach berechnet man die grösste enthaltene ganze Zahl in $\xi_0 = \frac{\sqrt{D}+P_0}{q_0}$, die offenbar gleich a_0 ist. Mit a_0 kann man dann wegen

$$P_1 = a_0 Q_0 - P_0 \quad \text{und} \quad Q_1 = \frac{D - P_1^2}{Q_0}$$

P_1 und Q_1, also ξ_1 bestimmen. Die Methode fortführend, wobei stets

$$P_n = a_{n-1} Q_{n-1} - P_{n-1} \quad \text{und} \quad Q_n = \frac{D - P_n^2}{Q_{n-1}}$$

ist, erhalten wir also alle ξ_n und a_n. Stossen wir dann erstmals auf ein $\xi_{m+\ell} = \xi_m$, so kennen wir die Teilnenner der primitiven Periode $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_{m+\ell-1}$, also die Kettenbruchentwicklung von ξ_0.

4.3 Reine Periodizität: Der Satz von Galois.

Wir führen im Vorfeld einen speziellen Typus quadratischer Irrationalzahlen ein:

Definition 4.2. *Eine quadratische Irrationalzahl ξ_0 heisst **reduziert**, wenn sie grösser als 1 ist und ihre konjugierte Zahl μ_0 zwischen -1 und 0 liegt.*

Bereits im Alter von 17 Jahren schrieb **Évariste Galois** eine Arbeit über Kettenbrüche (siehe Galois [7]) und entdeckte, bzw. bewies den folgenden Satz:

Satz 4.3. *Eine quadratische Irrationalzahl ξ_0, deren Kettenbruchentwicklung ein reinperiodischer regulärer Kettenbruch $[\overline{a_0, a_1, \ldots, a_{\ell-1}}]$ ist, ist reduziert. Umgekehrt entspricht jede reduzierte Zahl einem reinperiodischen regulären Kettenbruch. Des Weiteren gilt für die zu ξ_0 konjugierte Zahl μ_0:*

$$-\frac{1}{\mu_0} = [\overline{a_{\ell-1}, \ldots, a_1, a_0}],$$

wobei $a_0, a_1, \ldots, a_{\ell-1}$ und $a_{\ell-1}, \ldots a_1, a_0$ primitive Perioden mit invertierter Reihenfolge darstellen.

Die Beweise aller Aussagen – mit der Ausnahme derjenigen, dass reduzierte quadratische Irrationalzahlen reinperiodischen regulären Kettenbrüchen entsprechen — werden hier analog zum Beweis von Galois geführt, der sich wahrlich durch seine überraschende Einfachheit und Eleganz auszeichnet.

Beweis. Sei ξ_0 eine quadratische Irrationalzahl, die einem reinperiodischen regulären Kettenbruch $[\overline{a_0, a_1, \ldots, a_{\ell-1}}]$ entspricht. Offenbar ist dann ξ_0 eine Lösung der Gleichung

$$x = [a_0, a_1, \ldots, a_{\ell-1}, x].$$

Die Gleichung führt analog zum Beweis des **Satzes 4.1** auf eine quadratische Gleichung, deren zweite Lösung die konjugierte Zahl von ξ_0 ist, die wir wie gewohnt mit μ_0 bezeichnen. Wir können die Gleichung sukzessiv umstellen:

$$-\frac{1}{a_0 - x} = [a_1, a_2, \ldots, a_{\ell-1}, x] \quad \to \quad -\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_0 - x}} = [a_2, \ldots, a_{\ell-1}, x]$$

$$\to \quad -\cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_0 - x}}} = [a_3, \ldots, a_{\ell-1}, x] \quad \to \cdots \to \quad -\frac{1}{[a_{\ell-1}, \ldots, a_1, a_0 - x]} = x.$$

In dieser neuen Form der ursprünglichen Gleichung, fällt uns gerade die zweite Lösung μ_0 auf, nämlich

$$\mu_0 = -\frac{1}{[\overline{a_{\ell-1}, \ldots, a_1, a_0}]} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{\mu_0} = [\overline{a_{\ell-1}, \ldots, a_1, a_0}],$$

womit die gewünschte Form von μ_0 bewiesen ist. Weil $[\overline{a_{\ell-1}, \ldots, a_1, a_0}] > 1$ ist, muss μ_0 zwischen -1 und 0 liegen. Weil $\xi_0 > 1$ ist, muss ξ_0 eine reduzierte Zahl sein.

Es verbleibt noch zu zeigen, dass alle reduzierten quadratischen Irrationalzahlen einem reinperiodischen regulären Kettenbruch entsprechen. Wir setzen voraus, dass ξ_0 reduziert ist. Dann ist per Definition $\xi_0 > 1$ und $-1 < \mu_0 < 0$. Wegen dem **Lemma 4.2** ist

$$\mu_0 = a_0 + \frac{1}{\mu_1}, \quad \text{also} \quad \frac{1}{\mu_1} = \mu_0 - a_0 < -a_0 \leq -1.$$

Daher genügt μ_1 der Ungleichung $-1 < \mu_1 < 0$ und weil $\xi_1 > 1$ ist, ist ξ_1 wiederum reduziert. Daraus folgt induktiv durch das selbe Verfahren, dass alle ξ_n reduziert sind, also auch immer $-1 < \mu_n < 0$ gilt. Weil ξ_0 als quadratische Irrationalzahl vorausgesetzt ist, entspricht ξ_0 nach dem Lagrangeschen **Satz 4.2** einem periodischen regulären Kettenbruch. Wir nehmen an, dass dieser Kettenbruch kein reinperiodischer sein kann, also ein gemischtperiodischer ist:

$$\xi_0 = [a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, \overline{a_m, a_{m+1}, \ldots, a_{m+\ell-1}}].$$

Dabei muss natürlich $a_{m-1} \neq a_{m+\ell-1}$ sein, weil die Vorperiode $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$ per Definition nicht zur Periode gehört. Wegen der Periodizität ist $\xi_m = \xi_{m+\ell}$, also

$$\xi_{m-1} - \xi_{m+\ell-1} = \left(a_{m-1} + \frac{1}{\xi_m}\right) - \left(a_{m+\ell-1} + \frac{1}{\xi_{m+\ell}}\right) = a_{m-1} - a_{m+\ell-1}.$$

Also folgt wieder durch das **Lemma 4.2**, dass

$$\mu_{m-1} - \mu_{m+\ell-1} = a_{m-1} - a_{m+\ell-1}$$

ist. Die rechte Seite der Gleichung ist eine ganze Zahl. Wegen der Ungleichung $-1 < \mu_n < 0$ ist der absolute Wert der linken Seite aber kleiner als 1, und somit gleich 0. Deshalb muss $a_{m-1} = a_{m+\ell-1}$ sein, was im Widerspruch zu unserer Annahme steht. Der Kettenbruch ist also reinperiodisch und der Satz damit vollständig bewiesen. ∎

4.4 Quadratwurzeln $\sqrt{d}$ von rationalen Radikanden d

Für unsere Zwecke werden wir die Form der Kettenbruchentwicklung von Quadratwurzeln $\sqrt{d}$ herleiten, wo d für eine beliebige rationale Zahl steht, die grösser oder gleich 1 ist. Ist d das Quadrat einer rationalen Zahl, so ist die Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$ die jener rationalen Zahl. Weil wir diesen Fall bereits kennen, betrachten wir fortan nur rationale Zahlen d, die nicht dem Quadrat einer rationalen Zahl entsprechen.

Satz 4.4. *Sei $d > 1$ eine rationale Zahl mit $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$, dann gilt für die Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$:*

$$\sqrt{d} = \left[a_0, \overline{a_1, a_2, \ldots, a_2, a_1, 2a_0}\right],$$

wobei die Glieder der primitiven Periode – bis auf das letzte Glied – wie ein Palindrom angeordnet sind.

Beweis. Wir setzen $d > 1$ und $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$ voraus. Offensichtlich ist $\xi_0 = \sqrt{d}$ eine Lösung der Gleichung

$$x^2 - d = 0.$$

Die Gleichung, die momentan den rationalen Koeffizient d enthält, kann in eine äquivalente Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten überführt werden. Das bedeutet, dass $\xi_0 = \sqrt{d}$ eine quadratische Irrationalzahl ist. Die dazu konjugierte Zahl ist offenbar $\mu_0 = -\sqrt{d}$. Wegen unserer Voraussetzung ist $\mu_0 < -1$, also $\sqrt{d}$ nicht reduziert. Weil $\sqrt{d}$ eine quadratische Irrationalzahl ist, folgt nach dem Lagrangeschen **Satz 4.2**, dass $\sqrt{d} = \xi_0 = [a_0, \ldots, a_{m-1}, \overline{a_m, \ldots, a_{m+\ell-1}}]$ einem periodischen regulären Kettenbruch entspricht. Es folgt, dass $\xi_1 = [a_1, \ldots, a_{m-1}, \overline{a_m, \ldots, a_{m+\ell-1}}] > 1$ reduziert ist, da

$$-1 > \mu_0 = a_0 + \frac{1}{\mu_1} > \frac{1}{\mu_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\mu_1} < -1 \quad \Rightarrow \quad -1 < \mu_1 < 0$$

gilt. Das bedeutet nach dem **Satz von Galois 4.3**, dass die Kettenbruchentwicklung von ξ_1 reinperiodisch, also $m = 1$ ist. Es ist folglich

$$\xi_0 = \sqrt{d} = [a_0, \overline{a_1, a_2, \ldots, a_\ell}], \tag{4.5}$$

wobei $a_1, \ldots, a_\ell$ die primitive Periode darstellt. Daher ist

$$\frac{1}{\sqrt{d} - a_0} = [\overline{a_1, a_2, \ldots, a_\ell}] \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{a_0 - \sqrt{d}} = [\overline{a_1, a_2, \ldots, a_\ell}],$$

und weil $a_0 + \sqrt{d}$ die zu $a_0 - \sqrt{d}$ konjugierte Zahl ist, folgt wieder durch den **Satz von Galois**

$$a_0 + \sqrt{d} = [\overline{a_\ell, a_{\ell-1}, \ldots, a_2, a_1}] = [a_\ell, \overline{a_{\ell-1}, \ldots, a_2, a_1, a_\ell}]. \tag{4.6}$$

Die Gleichung (4.5) liefert für $a_0 + \sqrt{d}$ unmittelbar

$$a_0 + \sqrt{d} = [2a_0, \overline{a_1, \ldots, a_{\ell-2}, a_{\ell-1}, a_\ell}];$$

vergleicht man diese Gleichung mit (4.6), so erhält man aufgrund der Eindeutigkeit der Kettenbruchentwicklung:

$$a_\ell = 2a_0, \quad a_{\ell-1} = a_1, \quad \ldots, \quad a_2 = a_{\ell-2} \quad \text{und} \quad a_1 = a_{\ell-1}.$$

Damit ist

$$\sqrt{d} = \left[a_0, \overline{a_1, a_2, \ldots, a_2, a_1, 2a_0}\right].$$

∎

4.5 Die Pellsche Gleichung

Als erste Anwendung der regulären Kettenbrüche haben wir bereits ganzzahlige Lösungen der linearen diophantischen Gleichung gefunden. Nun widmen wir uns der sogenannten „Pellschen" Gleichung. Diese Bezeichnung lässt sich auf **Leonhard Euler** zurückführen, der den Lösungsansatz dieser Gleichung irrtümlich **John Pell** zuschrieb, wenngleich dieser nach Brezinski [3, S. 72–75] von **William Brouncker** gefunden wurde. Bei der Pellschen Gleichung handelt es sich um die diophantische Gleichung

$$X^2 - dY^2 = 1; \quad d \in \mathbb{N}^+.$$

Wir betrachten aber einen allgemeineren Fall der Pellschen Gleichung, nämlich

$$X^2 - dY^2 = \pm 1; \quad d \in \mathbb{N}^+.$$

Wir bezeichnen die Gleichung als allgemeine Pellsche Gleichung. Unsere Aufmerksamkeit liegt auf ganzzahligen Lösungen (X, Y). Der Leser oder die Leserin sei dazu ermutigt, festzustellen, dass alle Quadratzahlen d eindeutige ganzzahlige Lösungen (X, Y) zur Folge haben. Die Pellsche Gleichung hat dann unabhängig von d immer die Lösungen $(X, Y) = (\pm 1, 0)$, was ohnehin Lösungen der Gleichung sind. Die andere Gleichung hat dann nur Lösungen, wenn $d = 1$ ist; und zwar $(X, Y) = (0, \pm 1)$. Interessant wird es erst, wenn d keine Quadratzahl ist. Weil $X = 0$ oder $Y = 0$ dieselben Lösungen wie eine Quadratzahl d zur Folge haben, betrachten wir nur Lösungen (X, Y) mit $X, Y \in \mathbb{N}^+$. Die Gesamtheit aller Lösungen ist dann offenbar durch $(\pm X, \pm Y)$ gegeben. Für die gesuchten X, Y ergibt sich nun ein bemerkenswerter Hilfssatz:

Lemma 4.3. *Stellt (X, Y) mit $X, Y \in \mathbb{N}^+$ eine Lösung der allgemeinen Pellschen Gleichung $X^2 - dY^2 = \pm 1$ dar, wobei $\sqrt{d} \notin \mathbb{N}$ ist, so ist $\frac{X}{Y}$ ein Näherungsbruch von $\sqrt{d}$.*

Beweis. Es sei $\sqrt{d} \notin \mathbb{N}$ und (X, Y) eine Lösung der allgemeinen Pellschen Gleichung $X^2 - dY^2 = \pm 1$ mit $X, Y \in \mathbb{N}^+$. Da X, Y offenbar teilerfremd sind, genügt es nach dem Satz **Satz 3.6, S.18** zu zeigen, dass X, Y die Ungleichung $|X^2 - dY^2| < \sqrt{d}$ erfüllen. Da $\sqrt{d} > 1$ aus der Voraussetzung $\sqrt{d} \notin \mathbb{N}$ folgt, ist sie stets erfüllt. ∎

Dieser Hilfssatz ist zwar bemerkenswert, aber welche Näherungsbrüche gesucht sind, verrät er nicht. Der nächste Hilfssatz wird Aufschluss darüber geben, wie man vorgehen muss, um die gewünschten Näherungsbrüche zu identifizieren, aber vorerst werden wir einige Eigenschaften der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$ rekapitulieren. Diese entspricht nach dem **Satz 4.4** der Form $[a_0, \overline{a_1, a_2, \ldots, 2a_0}]$. Da $\sqrt{d}$ eine quadratische Irrationalzahl ist, entsprechen nach dem **Lemma 4.1** alle ξ_n der Form

$$\xi_n = \frac{\sqrt{d} + P_n}{Q_n}.$$

Hierbei ist $P_n = 0, Q_0 = 1$ und die weiteren P_n, Q_n sind durchweg positive ganze Zahlen[1].

Lemma 4.4. *Es ist*

$$p_{n-1}^2 - dq_{n-1}^2 = (-1)^n Q_n \quad \forall n \geq 0.$$

Beweis. In Anbetracht der Kettenbruchentwicklung $[a_0, \overline{a_1, a_2, \ldots, 2a_0}]$ von $\sqrt{d}$ und der Form ihrer ξ_n erhalten wir

$$\sqrt{d} = \frac{\xi_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\xi_n q_{n-1} + q_{n-2}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{d} = \frac{(\sqrt{d} + P_n)p_{n-1} + p_{n-2}Q_n}{(\sqrt{d} + P_n)q_{n-1} + q_{n-2}Q_n},$$

woraus

$$\sqrt{d}(P_n q_{n-1} + q_{n-2}Q_n - p_{n-1}) + (dq_{n-1} - P_n p_{n-1} - p_{n-2}Q_n) = 0$$

folgt. Weil $\sqrt{d}$ irrational ist, müssen die Klammerterme gleich 0, also

$$p_{n-1} = P_n q_{n-1} + q_{n-2}Q_n \quad \text{und} \quad dq_{n-1} = P_n p_{n-1} + p_{n-2}Q_n \tag{4.7}$$

[1] Im Beweis zum Lagrangeschen **Satz 4.2** haben wir gesehen, dass P_n, Q_n für genügend grosse n positiv sind. Wegen der Periodizität, die hier bei $n = 1$ beginnt, sind sie aber bereits ab $n = 1$ positiv.

sein. Wenn wir die erste Gleichung mit p_{n-1}, die zweite mit q_{n-1} multiplizieren und anschliessend die zweite von der ersten subtrahieren, führt uns das zu

$$p_{n-1}^2 - dq_{n-1}^2 = (p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1})Q_n = (-1)^{(n-1)-1}Q_n = (-1)^n Q_n.$$

■

Um also Lösungen (X, Y) der Gleichungen $X^2 - dY^2 = \pm 1$ mit $X, Y \in \mathbb{N}^+$ zu finden, müssen wir ein n finden, sodass $(-1)^n Q_n = \pm 1$ ist. Wir bemerken, dass $n \geq 1$ sein muss, da die Indizes bei p_{n-1}, q_{n-1} grösser oder gleich 0 sein müssen. Weil die Q_n ab $n = 1$ sämtlich positiv sind, ist die Gleichung dann und nur dann lösbar, wenn $Q_n = 1$ ist und wenn $(-1)^n$ das gewünschte Vorzeichen ± hat. Die n welche dies erfüllen, sind durch den folgenden Satz gegeben:

Satz 4.5. *Die Pellsche Gleichung $X^2 - dY^2 = 1$ ist für $\sqrt{d} \notin \mathbb{N}$ stets lösbar und ihre Lösungspaare mit $X, Y \in \mathbb{N}^+$ sind folgendermassen durch die Näherunszähler p_n und –nenner q_n von $\sqrt{d}$ gegeben:*

$$(X_k, Y_k) = \begin{cases} (p_{k\ell-1}, q_{k\ell-1}) & : \quad \ell \equiv 0 \pmod 2, \\ (p_{2k\ell-1}, q_{2k\ell-1}) & : \quad \ell \equiv 1 \pmod 2. \end{cases}.$$

Die Gleichung $X^2 - dY^2 = -1$ ist hingegen nur dann lösbar, wenn die primitive Periodenlänge ℓ der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$ ungerade ist. Sodann sind ihre Lösungspaare mit $X, Y \in \mathbb{N}^+$ durch

$$(X_k, Y_k) = (p_{(2k-1)\ell-1}, q_{(2k-1)\ell-1}).$$

gegeben.

Beweis. Die Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$ entspricht bekanntlich der Form $[a_0, \overline{a_1, a_2, \ldots, 2a_0}]$. Um die Gleichungen $X^2 - dY^2 = \pm 1$ zu lösen, muss allem voran $Q_n = 1$ sein. Ist das der Fall, so gilt

$$\xi_n = \sqrt{d} + P_n.$$

Da ξ_n für $n \geq 1$ nach dem **Satz von Galois 4.3** stets eine reduzierte Zahl ist, muss $-1 < \mu_n < 0$ bzw.

$$-1 < -\sqrt{d} + P_n < 0, \quad \text{also} \quad \sqrt{d} - 1 < P_n < \sqrt{d} \quad \Rightarrow \quad P_n = \lfloor \sqrt{d} \rfloor = a_0$$

sein. Also ist nach dem **Satz 4.4** $\xi_n = \left[\overline{2a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{\ell-1}}\right] = \xi_{k\ell}$. Der Fall $Q_n = 1$ tritt also dann und nur dann ein, wenn $n = k\ell$ ist für alle $k \in \mathbb{N}^+$.

Damit die Pellsche Gleichung $X^2 - dY^2 = 1$ gelöst werden kann, muss jetzt $(-1)^{k\ell} = 1$ gelten. Ist ℓ gerade, so ist das stets der Fall und die Lösungspaare (X_k, Y_k) sind nach dem **Lemma 4.4** gleich $(p_{k\ell-1}, q_{k\ell-1})$. Ist ℓ ungerade, so muss k gerade sein. Anders ausgedrückt sind dann alle Lösungspaare (X_k, Y_k) gleich $(p_{2k\ell-1}, q_{2k\ell-1})$ für alle $k \in \mathbb{N}^+$, denn $2k$ deckt alle geraden Zahlen ab.

Sodass die Gleichung $X^2 - dY^2 = -1$ lösbar ist, muss $(-1)^{k\ell} = -1$ sein. Es müssen also ℓ und k beide ungerade sein. Die Lösungspaare (X_k, Y_k) sind dann gleich $(p_{(2k-1)\ell-1}, q_{(2k-1)\ell-1})$ für alle $k \in \mathbb{N}^+$, denn $(2k - 1)$ deckt alle ungeraden Zahlen ab. Der Satz ist damit beweisen. ■

Als kleine Anwendung dieses Unterkapitels wenden wir uns, wie wir es bereits bei der linearen diophantischen Gleichung getan haben, einem Rätsel zu. Die vorliegende Version ist eine leicht abgeänderte Übersetzung der Originalfassung, die 1914 im **Strand Magazine** Dudeney [8] erschien.

„Ich habe neulich mit einem Herrn über diesen Ort namens Louvain gesprochen, den die Deutschen niedergebrannt haben", sagte William Rogers zu den anderen Dorfbewohnern, die sich um das Feuer in der Gaststätte versammelt hatten. „Er sagte, er kenne ihn gut – er habe dort einen belgischen Freund besucht, und das Haus seines Freundes habe in einer langen Strasse gelegen, die auf seiner Seite mit eins, zwei, drei usw. nummeriert gewesen sei, und dass alle Zahlen links seines Hauses zusammen genau dieselbe Summe ergeben hätten wie alle Zahlen rechts seines Hauses. Lustige Sache das! Er sagte, er wisse, dass es auf dieser Seite der Strasse mehr als fünfzig Häuser gab, aber nicht so viele wie fünfhundert. Ich erwähnte die Sache unserem Pfarrer gegenüber, und er nahm einen Bleistift und berechnete die Hausnummer, in der der Belgier wohnte. Ich weiss nicht, wie er das gemacht hat." Vielleicht möchte der Leser die Hausnummer herausfinden.

Für diejenigen, die die „Hausnummer herausfinden“ möchten, setzen wir die gesuchte Hausnummer gleich n und die Anzahl Häuser in der Strasse gleich m. Wir verdeutlichen die Situation mit einer Skizze:

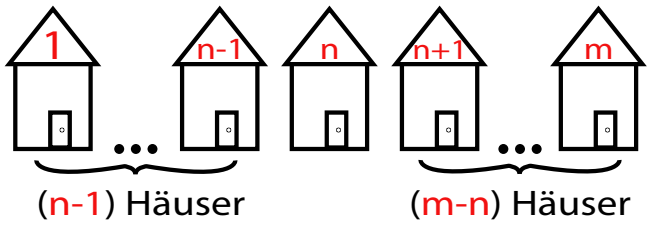

Abbildung 4.1: Skizze der Strasse [9].

Damit die Summe der Hausnummern links des n^{ten} Hauses die gleiche ist wie die der Hausnummern rechts davon, muss offenbar

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) = (n+1) + (n+2) + (n+3) + \cdots + (m-1) + m$$

gelten. Das sind zwei arithmetische Reihen; es ist also

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{(m+n+1)(m-n)}{2} \quad \Rightarrow \quad 2n^2 = m^2 + m.$$

Mittels quadratischer Ergänzung ergibt sich

$$2n^2 = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad (2m+1)^2 - 2(2n)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad X^2 - 2Y^2 = 1, \tag{4.8}$$

wobei $X = 2m + 1$ und $Y = 2n$ ist. Um des Rätsels Lösung zu finden, müssen wir also Lösungen (X, Y) mit $X, Y \in \mathbb{N}^+$ der Pellschen Gleichung $X^2 - 2Y^2 = 1$ finden. Diese sind nach dem **Satz 4.5** durch die Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{2}$ gegeben. Um sie zu bestimmen, berechnen wir schrittweise die P_n, Q_n und sehen zu, wann die Periodizität eintritt. Wir verwenden das auf **S. 24** beschriebene Verfahren. Wir wählen offenbar $P_0 = 0, Q_0 = 1$ und $D = d = 2$, sodass $Q_0 \mid D - P_0^2$ wird. Wir müssen den ganzzahligen Teil a_0 von $\xi_0 = \sqrt{2}$ bestimmen. Wegen $1^2 < 2 < 2^2$ ist $a_0 = 1$. Damit können wir P_1, Q_1 und ξ_1 berechnen:

$$P_1 = a_0 Q_0 - P_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad Q_1 = \frac{d - P_1^2}{Q_0} = 1 \quad \Rightarrow \quad \xi_1 = \frac{\sqrt{d} + P_1}{Q_1} = \sqrt{d} + 1.$$

Der ganzzahlige Teil von ξ_1 ist offensichtlich $a_1 = 2$, womit wir analog P_2, Q_2 und ξ_2 bestimmen:

$$P_2 = a_1 Q_1 - P_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad Q_1 = \frac{d - P_2^2}{Q_1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \xi_2 = \frac{\sqrt{d} + P_2}{Q_2} = \sqrt{d} + 1 = \xi_1.$$

Wegen $\xi_1 = \xi_2$ ist die primitive Periodenlänge $\ell = 1$ und $\sqrt{2} = \left[1, \overline{2}\right]$. Weil $\ell = 1$ ungerade ist, sind die gesuchten Lösungspaare der Gleichung (4.8) nach dem **Satz 4.5** gegeben durch $(X_k, Y_k) = (p_{2k-1}, q_{2k-1})$. Mit den Rekursionsformeln, die hier ab $n \geq 1$ jeweils $p_n = 2p_{n-1} + p_{n-2}$ und $q_n = 2q_{n-1} + q_{n-2}$ lauten, können wir eine Tabelle der Zahlen X_k, Y_k und m_k, n_k erstellen:

k	X_k	Y_k	m_k	n_k
1	3	2	1	1
2	17	12	8	6
3	99	70	49	35
4	557	408	288	204
5	3363	2378	1681	1189
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Diese fünf Werte genügen bereits, um das Rätsel zu lösen: Weil die Strassenseite zwischen 50 und 500 Häuser umfasst, also $50 < m < 500$ ist, kann nur die Lösung $(m_4, n_4) = (288, 204)$ die Richtige sein, denn für alle Vorherigen gilt $m_k < 50$, während für alle danach $m_k > 500$ ist. Die Hausnummer des Belgiers ist also $n = 204$.

Dieses Rätsel wurde bereits vom berühmten Mathematiker **Srinivasa Ramanujan** gelöst. Nach [10] geht die Erzählung wie folgt: **Prasanta Chandra Mahalanobis**, ein Freund Ramanujans, war eines Sonntags Morgens bei diesem zu Besuch. Er hatte gerade die Lösung des besagten Rätsels durch Ausprobieren gefunden, als er zum Gemüse kochenden Ramanujan (vermutlich auf Englisch) sagte: „Hier ist ein Problem für dich!"– „Was für ein Problem? Erzähl's mir." , erwiderte Ramanujan, der immer noch mit Kochen beschäftigt war. Nachdem ihm Mahalonibis das Rätsel geschildert hatte, antwortete dieser überraschenderweise in kurzer Zeit: „Bitte schreib die Lösung auf." und diktierte anschliessend einen unendlichen Kettenbruch. Mahalonibis, erstaunt darüber, dass Ramanujan die Lösung, ja sogar alle möglichen Lösungen ohne die Einschränkung $50 < m < 500$ in einem Kettenbruch gefunden hatte, fragte diesen, wie er denn darauf gekommen sei. Erstaunlicherweise meinte Ramanujan: „Als ich das Problem hörte, war mir sofort klar, dass die Lösung offensichtlich ein Kettenbruch sein musste; dann dachte ich: Welcher Kettenbruch? Und die Antwort kam mir in den Sinn." Ob Ramanujan denselben Kettenbruch wie wir verwendet hat, ist unklar. Es gibt nämlich noch alternative Kettenbrüche, die die Lösungen beinhalten. Zwei Beispiele für solche Kettenbrüche finden sich etwa bei Park [11] und bei Sivaraman [12].

5 Unendliche allgemeine Kettenbrüche

Bisher haben wir konkrete, reguläre Kettenbrüche betrachtet. Dieses Kapitel unterscheidet sich insofern von den vorherigen beiden, als dass es jetzt Kettenbrüche auch als Funktionen auffasst. So werden wir etwa die Funktionen $\tan(x)$ und $\tanh(x)$ als Kettenbrüche darstellen, mit denen wir anschliessend die Irrationalität der Kreiszahl $\pi = 3.14159\ldots$ und der Eulerschen Zahl $e = 2.71828\ldots$ beweisen werden. Zunächst legen wir aber die notwendige Grundlage.

5.1 Das Hauptkonvergenzkriterium von Pringsheim

Wir beginnen mit einem umfassenden Konvergenzkriterium für allgemeine Kettenbrüche, das sich in dieser Allgemeinheit erstmals bei Pringsheim [13] findet. Wie der Titel des Unterkapitels andeutet, handelt es sich um sein Hauptkriterium. Tatsächlich sind **Alfred Pringsheim** noch weitere Konvergenzkriterien zuzuschreiben. Einige finden sich etwa bei Perron [2].

Satz 5.1. *Wenn die Elemente des unendlichen Kettenbruches*

$$\frac{b_1|}{|a_1} + \frac{b_2|}{|a_2} + \frac{b_3|}{|a_3} + \cdots \tag{5.1}$$

den Ungleichungen

$$|a_n| \geq |b_n| + 1; \quad \forall n \geq 1$$

genügen, so konvergiert der Kettenbruch und sein absoluter Wert ist $|\xi_0| \leq 1$. Der Fall $|\xi_0| = 1$ kann dabei aber nur auftreten, wenn durchweg $|a_n| = |b_n| + 1$ ist[1].

Beweis. Da der Fall $b_n = 0$ einen endlichen Kettenbruch zur Folge hat, betrachten wir nur $b_n \neq 0$. Wir setzen zudem voraus, dass die vorherigen Ungleichungen $|a_n| \geq |b_n| + 1$ stets erfüllt sind. Das Bildungsgesetz der Näherungsnenner q_n, ist nach den Rekursionsformeln **Theorem 2.1, S.3** bekanntlich gegeben durch $q_n = a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2}$. Geometrisch ersieht sich leicht, dass daher stets die Ungleichung

$$|q_n| \geq |a_n||q_{n-1}| - |b_n||q_{n-2}|$$

besteht. Da $|a_n| - 1 \geq |b_n|$ ist, folgt daraus

$$|q_n| \geq |a_n||q_{n-1}| - (|a_n| - 1)|q_{n-2}|.$$

Indem wir auf beiden Seiten $-|q_{n-1}|$ addieren, erhalten wir:

$$|q_n| - |q_{n-1}| \geq (|a_n| - 1)(|q_{n-1}| - |q_{n-2}|).$$

Aus der rekursiven Natur dieser Gleichung folgt jetzt

$$|q_n| - |q_{n-1}| \geq (|a_n| - 1)(|a_{n-1}| - 1)(|a_{n-2}| - 1)\cdots(|a_2| - 1)(|q_1| - |q_0|),$$

also

$$|q_n| - |q_{n-1}| \geq (|a_n| - 1)(|a_{n-1}| - 1)(|a_{n-2}| - 1)\cdots(|a_2| - 1)(|a_1| - 1) \geq |b_n b_{n-1} b_{n-2}\cdots b_2 b_1|.$$

Die $|q_n|$ nehmen folglich streng monoton zu und sind, weil $q_0 = 1$ ist, durchweg von 0 verschieden. Deshalb können wir $\frac{p_n}{q_n}$ für alle n als

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_0}{q_0} + \left(\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_0}{q_0}\right) + \left(\frac{p_2}{q_2} - \frac{p_1}{q_1}\right) + \cdots + \left(\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}\right) + \left(\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)$$

[1] Das ist eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für $|\xi_0| = 1$. Für unsere Zwecke jedoch genügt diese Tatsache bereits.

schreiben. Die Klammerterme können wir nach dem **Satz 2.1, S. 6** ersetzen, sodass die endliche Reihe

$$\frac{p_n}{q_n} = 0 + \frac{b_1}{q_0 q_1} - \frac{b_1 b_2}{q_1 q_2} + \frac{b_1 b_2 b_3}{q_2 q_3} - \cdots + (-1)^{n-2}\,\frac{b_1 b_2 \cdots b_{n-1}}{q_{n-2} q_{n-1}} + (-1)^{n-1}\,\frac{b_1 b_2 \cdots b_n}{q_{n-1} q_n}$$

entsteht. Konvergiert sie mit $n \to \infty$, so konvergieren auch die Näherungsbrüche des Kettenbruches (5.1). Sein Wert ist dann derjenige, der die Reihe annimmt, wenn man sie ins Unendliche fortsetzt. Der höchst mögliche absolute Wert der unendlichen Reihe – der tritt ein, wenn die Werte aller Summanden absolut gezählt werden – ist

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{b_1 b_2 \cdots b_n}{q_{n-1} q_n}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|q_n| - |q_{n-1}|}{|q_{n-1}||q_n|} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{|q_{n-1}|} - \frac{1}{|q_n|}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{|q_0|} - \frac{1}{|q_n|}\right) = \frac{1}{|q_0|} = 1.$$

Daraus schliessen wir, dass die Reihe und somit der Kettenbruch immer konvergiert. Sein absoluter Wert ist $|\xi_0| \le 1$. Gleichheit mit 1 kann nur dann eintreten, wenn alle $\ge$, bzw. $\le$ die wir im Prozess benutzt haben, durch $=$ ersetzt werden. Diese Tatsache ergibt sich leicht dadurch, indem man beachtet, dass das letzte $\le$ durch $=$ ersetzt werden muss und dann zurückverfolgt, welche anderen ersetzt werden müssen. Insbesondere muss also, damit $|\xi_0| = 1$ ist, durchweg

$$|q_n| = |a_n||q_{n-1}| - |b_n||q_{n-2}| = |a_n||q_{n-1}| - (|a_n| - 1)|q_{n-2}|,$$

also $|a_n| = |b_n| + 1$ gelten. Der Satz ist damit vollständig bewiesen. ∎

5.2 Irrationalität gewisser unendlicher Kettenbrüche

Angesichts der Tatsache, dass unendliche reguläre Kettenbrüche stets einer Irrationalzahl gleich sind, könnte man irrtümlich meinen, dasselbe gelte für unendliche allgemeine Kettenbrüche, deren Elemente sämtlich positive ganze oder sogar ganze Zahlen sind. Erstaunlicherweise ist das nicht der Fall; man findet etwa

$$23 = 22 + \frac{23|}{|22} + \frac{23|}{|22} + \frac{23|}{|22} + \cdots.$$

Der Leser oder die Leserin sei ermutigt, die Gleichheit zu beweisen. Kann er oder sie für $\xi_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ weitere solche Kettenbrüche finden? (Hinweis: quadratische Gleichungen). Es gibt jetzt aber trotzdem unendliche allgemeine Kettenbrüche mit ganzzahligen Elementen, deren Wert irrational ist:

Satz 5.2. *Es seien $\langle a_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}^{\infty}$ und $\langle b_n\rangle_{n\in\mathbb{N}^+}^{\infty}$ Folgen mit $a_n, b_n \in \mathbb{N}^+$. Gelten ab einem gewissen Index k die Ungleichungen $a_{k+\ell} \ge b_{k+\ell} + 1$, wobei ℓ für jede natürliche Zahl steht und das Zeichen $>$ nicht zwingend immer, aber unendlich oft vorkommt, so sind die die Kettenbrüche*

$$\frac{b_1|}{|a_1} + \frac{b_2|}{|a_2} + \frac{b_3|}{|a_3} + \cdots$$

und

$$\frac{b_1|}{|a_1} - \frac{b_2|}{|a_2} - \frac{b_3|}{|a_3} + \cdots$$

konvergent und ihre Werte irrational.

Beweis. Wir beweisen den Satz für den zweiten Kettenbruch, der Beweis für den ersten erfolgt im Wesentlichen analog. In Anbetracht des unendlichen Kettenbruches

$$\frac{b_1|}{|a_1} - \frac{b_2|}{|a_2} - \frac{b_3|}{|a_3} + \cdots; \quad a_n, b_n \in \mathbb{N}^+$$

setzen wir voraus, dass ab einem gewissen Index, sagen wir k, stets die Ungleichungen $a_{k+\ell} \ge b_{k+\ell} + 1$ gelten und dabei das Zeichen $>$ nicht zwingend immer, aber unendlich oft vorkommt. Aus der Voraussetzung folgt jetzt, dass erstens durchweg $a_{k+\ell} > 1$, und zweitens auch immer $|a_{k+\ell}| \ge |b_{k+\ell}| + 1$ gilt. Das **Konvergenzkriterium von Pringsheim Satz 5.1** lehrt also, dass die absoluten Werte der unendlichen Kettenbrüche

$$\frac{b_{k+\ell}|}{|a_{k+\ell}} - \frac{b_{k+\ell+1}|}{|a_{k+\ell+1}} - \frac{b_{k+\ell+2}|}{|a_{k+\ell+2}} + \cdots = \xi_{k+\ell-1} - a_{k+\ell-1}$$

für alle $\ell \geq 0$ kleiner als 1 sind. Gleichheit mit 1 kann wegen der Voraussetzung, dass das Zeichen > unendlich oft vorkommt, niemals eintreten. Weil für alle $\ell \geq 0$ stets $a_{k+\ell} \geq 1$ ist, sind die Werte der Kettenbrüche also alle positiv. Wir nehmen jetzt an, dass der Kettenbruch

$$\frac{b_k}{|a_k} - \frac{b_{k+1}}{|a_{k+1}} - \frac{b_{k+2}}{|a_{k+2}} + \cdots = \xi_{k-1} - a_{k-1}$$

einen rationalen Wert hat, sagen wir $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$. Dabei sind $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{N}$ mit $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$. Des weiteren ist dann

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{b_k}{a_k - (\xi_k - a_k)} \quad \Rightarrow \quad \xi_k - a_k = \frac{a_k\lambda_2 - b_k\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\lambda_3}{\lambda_2},$$

wobei $\lambda_3 \coloneqq a_k\lambda_2 - b_k\lambda_1$ wieder eine natürliche Zahl ist und offenbar wieder $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > 0$ gilt, da $\xi_k - a_k < 1$ auch eine positive rationale Zahl ist. Analog findet man eine natürliche Zahl $\lambda_4 \coloneqq a_{k+1}\lambda_3 - b_{k+1}\lambda_2$, sodass $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4 > 0$ ist:

$$\frac{\lambda_3}{\lambda_2} = \frac{b_{k+1}}{a_{k+1} - (\xi_{k+1} - a_{k+1})} \quad \Rightarrow \quad \xi_{k+1} - a_{k+1} = \frac{a_{k+1}\lambda_3 - b_{k+1}\lambda_2}{\lambda_3} = \frac{\lambda_4}{\lambda_3}.$$

Den Prozess weiterführend, erhalten wir eine unendliche, streng monoton fallende Folge natürlicher Zahlen $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \ldots$. Eine derartige Folge kann aber nicht existieren, also muss unsere Annahme, dass der Wert $\xi_{k-1} - a_{k-1}$ rational ist, falsch, also der Wert irrational sein. Da damit auch ξ_{k-1} irrational ist, muss der Kettenbruch

$$\xi_0 = \frac{b_1}{|a_1} - \frac{b_2}{|a_2} - \cdots - \frac{b_{k-1}}{|\xi_{k-1}}$$

konvergent sein; denn keines der ξ_n mit $n < k - 1$ kann rational, also gleich 0 sein. Die Zahl ξ_0 existiert also und ist irrational, was zu beweisen war.

Zum Irrationalitätsbeweis des anderen Kettenbruches durchläuft man die gleichen Schritte und braucht jeweils dieselben Mittel. ∎

5.3 Kettenbruchdarstellungen für $\tan(x)$ und $\tanh(x)$

Das Ziel dieses Unterkapitels ist es, die Funktionen $\tan(x)$ und $\tanh(x)$ als unendliche allgemeine Kettenbrüche darzustellen. Dazu definieren wir zunächst eine Folge bestimmter hypergeometrischer Reihen.

Definition 5.1. *Sei*

$$\begin{aligned} F_n(\gamma; x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k! \prod_{\ell=0}^{k-1}(\gamma + n + \ell)} \\ &= 1 + \frac{x^1}{1!(\gamma+n)} + \frac{x^2}{2!(\gamma+n)(\gamma+n+1)} + \cdots + \frac{x^k}{k!(\gamma+n)\cdots(\gamma+n+k-1)} + \cdots, \end{aligned}$$

wobei γ ein Parameter mit $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{-n, -(n+1), \ldots, -(n+k-1), \ldots\}$ ist.

Wie bei den Kettenbrüchen beginnen wir bei den Reihengliedern, ab 0 zu zählen. Hier ist also 1 das 0^{te} Glied. Wir zeigen jetzt die Konvergenz jener hypergeometrischen Reihen auf:

Satz 5.3. *Die Reihe $F_n(\gamma; x)$ ist für alle γ, n und x konvergent.*

Beweis. Es sei c_k das k^{te} Glied der Reihe $F_n(\gamma; x)$. Nach dem Quotientenkriterium ist die Reihe gewiss für alle x konvergent, falls

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{c_{k+1}}{c_k} \right| < 1$$

ist. Weil

$$|c_k| = \left| \frac{x^k}{k! \prod_{\ell=0}^{k-1}(\gamma + n + \ell)} \right|$$

ist, folgt

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{c_{k+1}}{c_k} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{x}{(k+1)(\gamma+n+k)} \right| = 0 < 1; \quad \forall \gamma, n, x.$$

∎

Wie sich jetzt durch einen Koeffizientenvergleich leicht verifizieren lässt, gilt stets die folgende Identität:

$$F_{n+1}(\gamma;x) = F_n(\gamma;x) - \frac{x}{(\gamma+n)(\gamma+n+1)} F_{n+2}(\gamma;x). \tag{5.2}$$

Anhand dieser Rekursion werden wir fähig sein, einen unendlichen Kettenbruch, der $\frac{F_1(\gamma;x)}{F_0(\gamma;x)}$ entspricht, zu entwickeln. Vorerst aber treffen wir der einfachen Darstellung zuliebe die

Definition 5.2. *Es sei*

$$G_n(\gamma;x) \coloneqq \frac{F_{n+1}(\gamma;x)}{F_n(\gamma;x)}.$$

Der folgende Satz soll aufzeigen, in welchen Kettenbruch sich $G_0(\gamma;x) = \frac{F_1(\gamma;x)}{F_0(\gamma;x)}$ entwickelt. Der Satz wird die Grundlage dafür legen, die Funktionen $\tan(x)$ und $\tanh(x)$ als unendliche Kettenbrüche darzustellen.

Satz 5.4. *Ist $F_0(\gamma;x)$ von 0 verschieden, so gilt:*

$$\begin{aligned} G_0(\gamma;x) &= \cfrac{1}{1} + \cfrac{\frac{x}{\gamma(\gamma+1)}}{1} + \cfrac{\frac{x}{(\gamma+1)(\gamma+2)}}{1} + \cfrac{\frac{x}{(\gamma+2)(\gamma+3)}}{1} + \cdots + \cfrac{\frac{x}{(\gamma+n-2)(\gamma+n-1)}}{1} + \cdots \\ &= \cfrac{\gamma}{\gamma} + \cfrac{x}{\gamma+1} + \cfrac{x}{\gamma+2} + \cfrac{x}{\gamma+3} + \cdots + \cfrac{x}{\gamma+n-1} + \cdots ; \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Beweis. Zu Beginn bemerken wir, dass der zweite Kettenbruch durch „Kettenbrucherweiterung“[1] aus dem ersten folgt. Ihre Näherungsbrüche bzw. ihre Werte sind einander also gleich. Es genügt demnach zu zeigen, dass $G_0(\gamma;x)$ dem ersten Kettenbruch gleich ist.

Zunächst betrachten wir den Fall, wobei für alle x stets $F_n(\gamma;x) \neq 0$ ist. Weil $G_n(\gamma;x)$ dann für alle x konvergent ist, entnehmen wir der Rekursion (5.2), dass

$$G_n(\gamma;x) = 1 - \frac{x}{(\gamma+n)(\gamma+n+1)} \left(\frac{F_{n+1}(\gamma;x)}{F_n(\gamma;x)} \frac{F_{n+2}(\gamma;x)}{F_{n+1}(\gamma;x)} \right),$$

also

$$G_n(\gamma;x) = \frac{1}{1 + \frac{x}{(\gamma+n)(\gamma+n+1)} G_{n+1}(\gamma;x)} \tag{5.3}$$

gilt. Aus (5.3) und sukzessivem Einsetzen der $G_n(\gamma;x)$ folgt nun

$$\begin{aligned} G_0(\gamma;x) &= \cfrac{1}{1} + \cfrac{\frac{x}{\gamma(\gamma+1)}}{1} + \cfrac{\frac{x}{(\gamma+1)(\gamma+2)}}{1} + \cdots + \cfrac{\frac{x}{(\gamma+n-2)(\gamma+n-1)}}{1} + \cfrac{\frac{x}{(\gamma+n-1)(\gamma+n)} G_n(\gamma;x)}{1} \\ &= \cfrac{1}{1} + \cfrac{\frac{x}{\gamma(\gamma+1)}}{1} + \cfrac{\frac{x}{(\gamma+1)(\gamma+2)}}{1} + \cdots + \cfrac{\frac{x}{(\gamma+n-2)(\gamma+n-1)}}{1} + \cfrac{\frac{x}{(\gamma+n-1)(\gamma+n)}}{1 - \left(1 - \frac{1}{G_n(\gamma;x)}\right)}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Des Weiteren ist

$$\left(1 - \frac{1}{G_n(\gamma;x)}\right) = -\cfrac{\frac{x}{(\gamma+n)(\gamma+n+1)}}{1} + \cfrac{\frac{x}{(\gamma+n+1)(\gamma+n+2)}}{1} + \cdots + \cfrac{\frac{x}{(\gamma+n+m-1)(\gamma+n+m)}}{1 - \left(1 - \frac{1}{G_{n+m}(\gamma;x)}\right)}. \tag{5.5}$$

Um den Satz für $F_n(\gamma;x) \neq 0$ zu beweisen, genügt es zu zeigen, dass

$$\left(1 - \frac{1}{G_n(\gamma;x)}\right) = -\cfrac{\frac{x}{(\gamma+n)(\gamma+n+1)}}{1} + \cfrac{\frac{x}{(\gamma+n+1)(\gamma+n+2)}}{1} + \cdots \tag{5.6}$$

ist. Bezeichnen wir die Näherungszähler und –nenner des Kettenbruches (5.6) als p_m und q_m, so muss dazu gelten:

$$\lim_{m\to\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{G_n(\gamma;x)}\right) - \frac{p_m}{q_m} \right] = 0.$$

[1] Wie die „Kettenbrucherweiterung“ funktioniert, wird bei Bedarf im **Anhang C** erklärt.

Unter der Verwendung des Kettenbruches (5.5) bzw. der Rekursionsformeln **Satz 2.1, S.3** wird daraus

$$\lim_{m\to\infty}\left[\frac{p_m-\left(1-\frac{1}{G_{n+m}(\gamma;x)}\right)p_{m-1}}{q_m-\left(1-\frac{1}{G_{n+m}(\gamma;x)}\right)q_{m-1}}-\frac{p_m}{q_m}\right]=\lim_{m\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{G_{n+m}(\gamma;x)}\right)\left(\frac{p_m}{q_m}-\frac{p_{m-1}}{q_{m-1}}\right)}{\frac{q_m}{q_{m-1}}-\left(1-\frac{1}{G_{n+m}(\gamma;x)}\right)}=0. \tag{5.7}$$

Um dies zu verifizieren, werden wir zeigen, dass

$$\lim_{m\to\infty}G_{n+m}(\gamma;x)=1,\quad \lim_{m\to\infty}\left(\frac{p_m}{q_m}-\frac{p_{m-1}}{q_{m-1}}\right)=0\quad\text{und}\quad \lim_{m\to\infty}\frac{q_m}{q_{m-1}}\neq 0$$

ist, woraus (5.7) offenkundig seine Richtigkeit erhalten, also der Satz für $F_n(\gamma;x)\neq 0$ bereits bewiesen sein wird. Ersteres folgt leicht aus der **Definition 5.2** und der Tatsache, dass mit $m\to\infty$ sowohl $F_{n+m+1}(\gamma;x)$ als auch $F_{n+m}(\gamma;x)$ gegen 1 geht. Die zweite Aussage ist eine notwendige Bedingung dafür, dass der Kettenbruch (5.6) konvergent ist. Wir können diesen Kettenbruch durch Kettenbrucherweiterung in den folgenden, gleichwertigen Kettenbruch überführen:

$$-\frac{\frac{x}{\gamma+n}}{\left|\gamma+n+1\right.}+\frac{x}{\left|\gamma+n+2\right.}+\frac{x}{\left|\gamma+n+3\right.}+\cdots.$$

Dieser ist nach dem Konvergenzkriterium von Pringsheim **Satz 5.1** für genügend grosse n konvergent, woraus die Richtigkeit der zweiten Aussage folgt. Was die dritte Aussage anbelangt, ist

$$q_m=q_{m-1}+\frac{x}{(\gamma+n+m-1)(\gamma+n+m)}q_{m-2}\quad\Rightarrow\quad\frac{q_m}{q_{m-1}}=1+\frac{\varepsilon_m}{\frac{q_{m-1}}{q_{m-2}}},$$

wobei die Teilzähler $|\varepsilon_m|$ für genügend grosse m beliebig klein werden können. Um die dritte Aussage zu beweisen, genügt es zu zeigen, dass stets $\frac{q_m}{q_{m-1}}\geq\frac{1}{2}$ ist. Es folgt ein Beweis durch Induktion. Der Induktionsanfang für $m=1$ ist erfüllt, da $\frac{q_1}{q_0}=1$ ist. Wir nehmen nun an, dass die Induktionsannahme für $(m-1)$ hält, also $\frac{q_{m-1}}{q_{m-2}}\geq\frac{1}{2}$ ist. Dabei können wir, indem wir n genügend gross wählen, voraussetzen, dass stets $|\varepsilon_m|\leq\frac{1}{8}$ gilt. Der kleinstmögliche Wert, den $\frac{q_m}{q_{m-1}}$ anhand dieser Voraussetzungen annehmen kann, erhält man nach der obigen Gleichung offenbar, wenn $\varepsilon_m=-\frac{1}{8}$ und $\frac{q_{m-1}}{q_{m-2}}=\frac{1}{2}$ ist. Setzt man diese Werte ein, wird

$$\frac{q_m}{q_{m-1}}\geq 1+\frac{-\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}.$$

Da $\frac{3}{4}>\frac{1}{2}$ ist, hält die Induktionsvoraussetzung also auch für m. Kann der Leser oder die Leserin den effektiven Grenzwert bestimmen? Die dritte Aussage ist damit bewiesen und der Fall $F_n(\gamma;x)\neq 0$ erledigt.

Es verbleibt nur noch zu beweisen, dass der Satz auch dann gilt, wenn ein x' existiert, sodass eines oder mehrere der $F_n(\gamma;x')=0$ sind. Wir setzen dazu voraus, dass mindestens ein $F_n(\gamma;x')=0$ ist. Die Problematik besteht nun darin, dass mindestens ein $G_n(\gamma;x')$ an der Stelle x' divergent ist; wir können demnach nicht mehr wie vorhin argumentieren, dass $G_0(\gamma;x)$ an der Stelle x' dem gewünschten Kettenbruch entspricht. Wir bemerken aber sogleich, dass nicht unendlich viele $F_n(\gamma;x')=0$ bzw. $G_n(\gamma;x')$ divergent sein können, denn es ist

$$\lim_{n\to\infty}F_n(\gamma;x)=1.$$

Dieser Grenzwert zieht ferner nach sich, dass unter zwei aufeinanderfolgenden $F_n(\gamma;x)$ nicht beide gleich 0 sein können, da sonst nach der Rekursion (5.2) alle weiteren $F_n(\gamma;x)=0$ wären. Insgesamt muss also ein grösstmöglicher Index k existieren, sodass $F_k(\gamma;x')=0$ ist, wobei $F_{k-1}(\gamma;x')$, $F_{k+1}(\gamma;x')$ und alle weiteren $F_{k+\ell}(\gamma;x')$ von 0 verschieden sind. Wir können also immerhin mit gewohnter Argumentation, die wir bereits bei $G_0(\gamma;x)$ verwendet haben, den durch die Rekursion (5.3) entstehenden Kettenbruch für $G_{k+1}(\gamma;x')$ herleiten:

$$G_{k+1}(\gamma;x')=\frac{1}{\left|1\right.}+\frac{\frac{x'}{(\gamma+k+1)(\gamma+k+2)}}{\left|1\right.}+\frac{\frac{x'}{(\gamma+k+2)(\gamma+k+3)}}{\left|1\right.}+\cdots.$$

Ferner muss, weil $G_k(\gamma;x')$ divergent ist, nach der Rekursion (5.3) die Gleichung

$$\frac{x'}{(\gamma+k)(\gamma+k+1)}G_{k+1}(\gamma;x') = \frac{\frac{x'}{(\gamma+k)(\gamma+k+1)}\Big|}{\Big|1} + \frac{\frac{x'}{(\gamma+k+1)(\gamma+k+2)}\Big|}{\Big|1} + \frac{\frac{x'}{(\gamma+k+2)(\gamma+k+3)}\Big|}{\Big|1} + \cdots = -1$$

erfüllt sein. Sie impliziert jetzt, dass auch $G_{k-1}(\gamma;x')$, das offenbar den Wert 0 hat, dem aus der Rekursion (5.3) entspringenden Kettenbruch

$$\frac{1}{\Big|1} + \frac{\frac{x'}{(\gamma+k-1)(\gamma+k)}\Big|}{\Big|1} + \frac{\frac{x'}{(\gamma+k)(\gamma+k+1)}\Big|}{\Big|1} + \frac{\frac{x'}{(\gamma+k+1)(\gamma+k+2)}\Big|}{\Big|1} + \cdots$$

gleich ist, denn er konvergiert gegen 0. Sind nun alle $G_n(\gamma;x')$ mit $n < k-1$ konvergent, so gilt die Rekursion (5.3) für $n < k-1$ und entsprechend lässt sich $G_0(\gamma;x')$ zum Kettenbruch (5.4) mit $n = k-1$ entwickeln. Setzen wir dann den Kettenbruch für $G_{k-1}(\gamma;x')$ in den Kettenbruch (5.4) ein, so wird $G_0(\gamma;x')$ dem gewünschten Kettenbruch gleich. Existieren aber $n < k-1$, sodass $F_n(\gamma;x') = 0$, also $G_n(\gamma;x')$ divergent ist, können wir mit derselben Argumentation wie vorhin zeigen, dass $G_{n-1}(\gamma;x')$ dem aus der Rekursion (5.3) entspringendem Kettenbruch entspricht; und wieder wäre $G_0(\gamma;x')$ durch dieselbe Argumentation dem gewünschten Kettenbruch gleich. Unabhängig davon, ob irgendein $F_n(\gamma;x') = 0$ ist, bleibt $G_0(\gamma;x')$ also dem gewünschten Kettenbruch gleich. Dabei ist wichtig anzumerken, dass $G_0(\gamma;x')$ stets konvergent ist, insofern $F_0(\gamma;x') \neq 0$ gilt. Der Satz ist damit vollständig bewiesen. ∎

Mit dieser Vorarbeit sind wir nun endlich bereit, dieses Unterkapitel abzuschliessen:

Theorem 5.1.

$$\tan(x) = \frac{x}{\Big|1} - \frac{x^2}{\Big|3} - \frac{x^2}{\Big|5} - \cdots - \frac{x^2}{\Big|2k-1} - \cdots; \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \ell\pi : \ell \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$\tanh(x) = \frac{x}{\Big|1} + \frac{x^2}{\Big|3} + \frac{x^2}{\Big|5} + \cdots + \frac{x^2}{\Big|2k-1} + \cdots; \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dieses Resultat findet sich bereits bei Lambert [14]. Er war der Erste, der die Kettenbruchdarstellung des $\tan(x)$ bewies bzw. entdeckte und damit unter anderem als Erster die Irrationalität der Kreiszahl π nachwies; während sich diejenige für $\tanh(x)$ – wenngleich nicht in dieser Form – bereits bei Euler [5] findet. Lamberts Beweismethode ist zwar etwas umständlich und unterliegt bei Weitem nicht der hiesigen Allgemeinheit – hingegen aber nach Pringsheim [15] einer „für die damalige Zeit (1767) geradezu exceptionellen Strenge“. Dieser Aufsatz enthält ein lesenswerter Einblick rund um den lambertschen Beweis.

Beweis. Wir beweisen zuerst die Kettenbruchdarstellung des $\tan(x)$. Dazu bedienen wir uns an der Potenzreihendarstellung des $\sin(x)$ und $\cos(x)$:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots,$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots.$$

Wie man jetzt leicht feststellt, ist

$$F_1\left(\tfrac{1}{2}; -\tfrac{x^2}{4}\right) = 1 - \frac{1}{\frac{3}{2}\cdot 4}\cdot\frac{x^2}{1!} + \frac{1}{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot 4^2}\cdot\frac{x^4}{2!} - \cdots + (-1)^k \frac{1}{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2k+1}{2}\cdot 4^k}\cdot\frac{x^{2k}}{k!} + \cdots.$$

Offenbar ist das k^{te} Glied stets gleich

$$(-1)^k \frac{1}{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2k+1}{2}\cdot 4^k}\cdot\frac{x^{2k}}{k!} = (-1)^k \frac{x^{2k}}{\frac{4^k}{2^k}\cdot k!\cdot 3\cdot 5\cdots(2k+1)} = (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!},$$

also

$$F_1\left(\tfrac{1}{2}; -\tfrac{x^2}{4}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} = \frac{\sin(x)}{x}; \quad \forall x \neq 0. \tag{5.8}$$

In analoger Weise erhält man

$$F_0\left(\tfrac{1}{2};-\tfrac{x^2}{4}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}=\cos(x). \tag{5.9}$$

Daraus folgt nach dem **Satz 5.4**

$$\tan(x)=\frac{xF_1\left(\frac{1}{2};-\frac{x^2}{4}\right)}{F_0\left(\frac{1}{2};-\frac{x^2}{4}\right)}=xG_0\left(\tfrac{1}{2};-\tfrac{x^2}{4}\right)=\frac{\frac{x}{2}\Big|}{\Big|\frac{1}{2}}-\frac{\frac{x^2}{4}\Big|}{\Big|\frac{3}{2}}-\frac{\frac{x^2}{4}\Big|}{\Big|\frac{5}{2}}-\cdots-\frac{\frac{x^2}{4}\Big|}{\Big|\frac{2k-1}{2}}-\cdots.$$

Erweitern wir die Kettenbrüche, sodass die Näherungsbrüche gleichwertig bleiben, erhalten wir schlussendlich

$$\tan(x)=\frac{x\Big|}{\Big|1}-\frac{x^2\Big|}{\Big|3}-\frac{x^2\Big|}{\Big|5}-\cdots-\frac{x^2\Big|}{\Big|2k-1}-\cdots;\quad \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+\ell\pi:\ell\in\mathbb{Z}\right\},$$

wobei hier wichtig anzumerken ist, dass die Nullstellen von $F_0\left(\frac{1}{2};-\frac{x^2}{4}\right)=\cos(x)$ nicht in der Definitionsmenge sein dürfen.

Nun folgt der Beweis zur Kettenbruchdarstellung des $\tanh(x)$. Dazu betrachten wir vorerst die Definitionen für $\cosh(x)$, $\sinh(x)$ und $\tanh(x)$:

$$\sinh(x)\coloneqq\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad \cosh(x)\coloneqq\frac{e^x+e^{-x}}{2}\quad\text{und}\quad \tanh(x)\coloneqq\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

Weil

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}+\cdots$$

ist, gilt folglich:

$$\sinh(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\cdots$$

$$\cosh(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2k}}{(2k)!}+\cdots.$$

Zieht man den Vergleich zu (5.8) herbei, fällt unmittelbar auf, dass

$$F_1\left(\tfrac{1}{2};\tfrac{x^2}{4}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k+1)!}=\frac{\sinh(x)}{x};\qquad \forall x\neq 0$$

ist, denn alles was ändert, sind die negativen Vorzeichen, die sämtlich positiv werden. Vergleicht man mit (5.9), erhält man analog

$$F_0\left(\tfrac{1}{2};\tfrac{x^2}{4}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}=\cosh(x),$$

also folgt

$$\tanh(x)=\frac{x\Big|}{\Big|1}+\frac{x^2\Big|}{\Big|3}+\frac{x^2\Big|}{\Big|5}+\cdots+\frac{x^2\Big|}{\Big|2k-1}+\cdots;\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Da $F_0\left(\frac{1}{2};\frac{x^2}{4}\right)=\cosh(x)$ keine Nullstellen hat, ist die Definitionsmenge $\mathbb{R}$. Der Satz ist vollständig beweisen. ∎

5.4 Irrationalitätsbeweise für $\tan\left(\frac{u}{v}\right)$, $\tanh\left(\frac{u}{v}\right)$, $e^{\frac{u}{v}}$, π und π^2

Nachdem wir die Kettenbruchdarstellungen für $\tan(x)$ und $\tanh(x)$ erarbeitet haben, fällt es erstaunlich leicht, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 5.5. *Sei $\frac{u}{v}$ eine von 0 verschiedene rationale Zahl, wobei $u \in \mathbb{Z}^*$ und $v \in \mathbb{N}^+$ ist. Dann ist sowohl $\tan\left(\frac{u}{v}\right) \notin \mathbb{Q}$ als auch $\tanh\left(\frac{u}{v}\right) \notin \mathbb{Q}$.*

Beweis. Wir setzen voraus, dass $\frac{u}{v}$ eine von 0 verschiedene rationale Zahl bedeutet, wobei $u \in \mathbb{Z}^*$ und $v \in \mathbb{N}^+$ ist. Indem wir in den Kettenbruchdarstellungen des **Theorems 5.1** jetzt $x = \frac{u}{v}$ setzen und die Kettenbrüche durch Kettenbrucherweiterung in gleichwertige überführen, gilt:

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{u}{\left|v\right.} - \frac{u^2}{\left|3v\right.} - \frac{u^2}{\left|5v\right.} - \cdots - \frac{u^2}{\left|(2k-1)v\right.} - \cdots, \\ \tanh\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{u}{\left|v\right.} + \frac{u^2}{\left|3v\right.} + \frac{u^2}{\left|5v\right.} + \cdots + \frac{u^2}{\left|(2k-1)v\right.} + \cdots. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Die Werte der Kettenbrüche sind nach dem **Satz 5.2** irrational, denn bei beiden Kettenbrüchen ist ab einem gewissen Index k stets $[2(k+\ell)-1]v > u^2 + 1$. ■

Daraus folgt jetzt die Tatsache, über die sich vor Lambert bereits Unzählige den Kopf zerbrochen hatten:

Korollar 5.1. *Die beiden Zahlen π und π^2 sind irrationale Zahlen.*

Beweis. Da $\tan(\pi) = 0$ ist, kann π keine rationale Zahl sein, denn sonst wäre nach **Satz 5.5** die natürliche Zahl 0 irrational. Es verbleibt zu zeigen, dass π^2 irrational ist. Dazu nehmen wir an, dass π^2 rational ist. Die Zahl π wäre folglich die Wurzel einer rationalen Zahl[1], also $\pi = \frac{\sqrt{u}}{v}$. Unter der Verwendung von (5.10) wäre demnach

$$0 = \sqrt{u} \cdot \tan\left(\frac{\sqrt{u}}{v}\right) = \frac{u}{\left|v\right.} - \frac{u}{\left|3v\right.} - \frac{u}{\left|5v\right.} - \cdots - \frac{u}{\left|(2k-1)v\right.} - \cdots,$$

wo doch der Kettenbruch in Wahrheit nach **Satz 5.2** einen irrationalen Wert hat, also nicht gleich 0 sein kann. Daher kann unsere Annahme, dass π^2 rational ist, nicht richtig sein. Die Zahl π^2 ist folglich irrational. ■

Mit der Funktion $\tanh\left(\frac{u}{v}\right)$ gelingt es jetzt, die Irrationalität von $e^{\frac{u}{v}}$, also insbesondere die der Eulerschen Zahl e selbst zu beweisen:

Korollar 5.2. *Sei $\frac{u}{v}$ eine von 0 verschiedene rationale Zahl mit $u \in \mathbb{Z}$ und $v \in \mathbb{N}^+$. Dann ist $e^{\frac{u}{v}}$ irrational.*

Beweis. Wir setzen voraus, dass $\frac{u}{v}$ eine von 0 verschiedene rationale Zahl mit $u \in \mathbb{Z}$ und $v \in \mathbb{N}^+$ ist. Nach der Definition des hyperbolischen Tangens gilt

$$\tanh\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\sinh\left(\frac{u}{v}\right)}{\cosh\left(\frac{u}{v}\right)} = \frac{e^{\frac{u}{v}} - e^{-\frac{u}{v}}}{e^{\frac{u}{v}} + e^{-\frac{u}{v}}}.$$

Wäre $e^{\frac{u}{v}}$ rational, so wäre auch $\tanh\left(\frac{u}{v}\right)$ rational, was aber nach dem **Satz 5.5** nicht der Fall ist. Demnach ist $e^{\frac{u}{v}}$ stets eine Irrationalzahl. ■

[1] Jede Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl entspricht der Form $\sqrt{\frac{u'}{v}} = \frac{\sqrt{u'}}{\sqrt{v}}$ mit $u' \in \mathbb{N}$ und $v \in \mathbb{N}^+$. Eine vereinfachte Form erhält man durch Erweitern dieses Bruches mit $\sqrt{v}$: Es gilt $\sqrt{\frac{u'}{v}} = \frac{\sqrt{u}}{v}$ mit $u = u' \cdot v$.

6 Diskussion

Im Verlaufe dieser Arbeit haben wir gesehen, dass sich Kettenbrüche in verschiedenster Weise anwenden lassen – sei es zu numerischen Zwecken im Zusammenhang mit dem Gesetz der besten Näherung oder zu zahlentheoretischen Zwecken bei diophantischen Gleichungen und Irrationalitätsbeweisen. Zwar existieren etwa für die Irrationalitätsbeweise von π und e weniger aufwändige Beweise, die ohne Kettenbrüche auskommen, doch bietet der Kettenbruchansatz oft eine besonders natürliche und intuitive Herangehensweise. Das will nicht etwa heissen, dass die Beweismethoden besonders intuitiv und natürlich sind, sondern dass nahezu jedes Korollar, jeder Satz und jedes Theorem eine Antwort auf eine intuitive und natürliche Frage darstellt. So kann man sich etwa fragen: „Wann haben Kettenbrüche einen irrationalen Wert?“; „Kann man trigonometrische Funktionen wie $\tan(x)$ oder Funktionen wie $\tanh(x)$ als unendliche Kettenbrüche darstellen?“; „Lässt sich mit ihnen die Irrationalität von π und e nachweisen, da diese Zahlen eng mit diesen Funktionen verbunden sind?“. Die relevanten Anwendungen und eben gerade diese intuitive und natürliche Herangehensweise sind der Grund, weshalb der Kettenbruchansatz wertvoll ist.

Abgesehen von den Anwendungen, bei denen die Mathematik ja eigentlich endet, sind es doch die Gegebenheiten, Sätze und Theoreme, welche schöne Muster in sich tragen, die den Kettenbrüchen ihren wahren Wert verleihen – seien es Gegebenheiten wie die elegante Kettenbruchentwicklung des goldenen Schnitts, seien es Sätze wie der **Satz von Galois**, der die palindromische Kettenbruchentwicklung von Quadratwurzeln $\sqrt{d}$ zur Folge hat, oder seien es Sätze über die Kettenbrüche der Funktionen $\tan(x)$ und $\tanh(x)$, in denen die Ungeraden Zahlen aufsteigend vorkommen. Diese Arbeit möge nun mit einem treffenden Zitat enden; in seiner Apologie schreib der Mathematiker **Godfrey H. Hardy**:

> „The mathematician's patterns, like the painter's or the poet's, must be beautiful; the ideas, like the colours or the words, must fit together in a harmonious way. Beauty is the first test: there is no permanent place in the world for ugly mathematics.“
>
> — Hardy, G.H. [16]

Literaturverzeichnis

[2] O. Perron. *Die Lehre von den Kettenbrüchen. Band 2: Analytisch-funktionentheoretische Kettenbrüche.* 3. Aufl. Stuttgart: B. G. Teubner, 1957.

[3] C. Brezinski. *History of Continued Fractions and Padé Approximants.* Bd. 12. Springer Series in Computational Mathematics. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1991.

[4] O. Perron. *Die Lehre von den Kettenbrüchen. Band 1: Elementare Kettenbrüche.* 3. Aufl. Stuttgart: B. G. Teubner, 1954.

[5] L. Euler. „De fractionibus continuis dissertatio". In: *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 9 (1744), S. 98–137.

[6] J. L. Lagrange. „Additions au Mémoire sur la résolution des équations numériques". In: *Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin.* XXIV (1770), S. 581–652.

[7] É. Galois. „Analyse algébrique. Démonstration d'un théorème sur les fractions continues périodiques". In: *Annales de Mathématiques pures et appliquées* 19 (1828-1829), S. 294–301.

[8] H. E. Dudeney. „PUZZLES AT A VILLAGE INN". In: *The Strand Magazine* XLVIII.b (1914), S. 777.

[10] R. Kanigel. *The Man Who Knew Infinity: A Life of the Genius Ramanujan.* 5. Aufl. NewYork: Washington Square Press, 1991, S. 214–215.

[11] P. S. Park. „Ramanujan's Continued Fraction for a Puzzle". In: *The College Mathematics Journal* 22.5 (2017), S. 363–365.

[12] R. Sivaraman. „RECOGNIZING RAMANUJAN'S HOUSE NUMBER PUZZLE". In: *German International Journal of Modern Science* 22 (2021), S. 25–27.

[13] A. Pringsheim. „Ueber die Convergenz unendlicher Kettenbrüche." In: *Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der K. B. Akademie der Wissenschaften zu München.* XXVIII (1898), S. 295–324.

[14] J. H. Lambert. „Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes circu laires et logarithmiques." In: *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin.* XVII (1768), S. 265–322.

[15] A. Pringsheim. „Ueber die ersten Beweise der Irrationalität von e und π." In: *Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der K. B. Akademie der Wissenschaften zu München.* XXVIII (1898), S. 325–337.

[16] G.H. Hardy. *A Mathematician's Apology.* Nachdruck der Originalausgabe aus dem Jahr 1940 mit Vorwort von C.P. Snow. London: Cambridge University Press, 1967, S. 85.

Abbildungsverzeichnis

[1] *Abbildung des Meme: „What is Pi?"* Bildschärfung durchgeführt mithilfe von ChatGPT (GPT-4). URL: %5Curl%7Bhttps://www.facebook.com/groups/physicsisfun109/posts/699282956083885/%7D.

[9] *Abbildung zur Skizze der Strasse.* Erstellt durch den Autor L. Maeder mithilfe von Adobe Illustrator 2025.

A Verallgemeinerung des Kokosnussrätsels

Wir wenden uns wieder dem Kokosnussrätsel aus dem **Unterkapitel 3.3** zu. Die angehende Untersuchung wird sich jetzt nicht mehr auf 3 Piraten beschränken, sondern den allgemeinen Fall von n Piraten betrachten. Der wesentliche Teil des Rätsels lautet in diesem Fall:

Es stranden n Piraten auf einer Insel, auf der es Kokosnüsse und Äffchen gibt. Die Piraten sammeln am Vorabend einen Haufen aus Kokosnüssen zusammen. In der Nacht teilt ein Pirat den Haufen in n kleinere Haufen, wobei eine Kokosnuss übrig bleibt. Er nimmt sich einer dieser Haufen, gibt die übrige Kokosnuss einem Äffchen und führt die restlichen Kokosnüsse wieder zu einem Haufen zusammen. Die nächsten $(n-1)$ Piraten tun es dem ersten gleich. Als die Piraten am nächsten Morgen aufwachen, verteilen sie die restlichen Kokosnüsse gerecht auf alle n von ihnen, wobei keine Kokosnuss übrig bleibt.

Wir bezeichnen die Anzahl Kokosnüsse des initialen Haufens wieder mit X_0, die des nächsten mit X_1 usw. Offenbar gelten wieder die folgenden Beziehungen:

$$X_1 = \left(\tfrac{n-1}{n}\right)(X_0 - 1)\,, \quad \cdots\,, \quad X_{n-1} = \left(\tfrac{n-1}{n}\right)(X_{n-2} - 1)\,, \quad X_n = \left(\tfrac{n-1}{n}\right)(X_{n-1} - 1) = nm; \quad m \in \mathbb{N}^+.$$

Wir wollen jetzt eine explizite Formel für X_k mit $1 \leq k \leq n$ herleiten. Aus den vorherigen Beziehungen erhalten wir durch sukzessives Einsetzen:

$$X_k = \left(\tfrac{n-1}{n}\right)\left[\left(\tfrac{n-1}{n}\right)\left(\ldots\left(\left(\tfrac{n-1}{n}\right)\left(\left(\tfrac{n-1}{n}\right)(X_0 - 1) - 1\right) - 1\right)\ldots\right) - 1\right],$$

wobei der Ausdruck $\frac{n-1}{n}$ und -1 jeweils k-mal vertreten sind. Das ist bereits eine explizite Formel; wir können sie allerdings erheblich vereinfachen:

$$\begin{aligned} X_k &= \left(\tfrac{n-1}{n}\right)^k X_0 - \left[\left(\tfrac{n-1}{n}\right)^k + \left(\tfrac{n-1}{n}\right)^{k-1} + \cdots + \left(\tfrac{n-1}{n}\right)^2 + \left(\tfrac{n-1}{n}\right)^1\right] \\ &= \left(\tfrac{n-1}{n}\right)^k X_0 - \left(\tfrac{n-1}{n}\right)\left[\frac{\left(\frac{n-1}{n}\right)^k - 1}{\left(\frac{n-1}{n}\right) - 1}\right] = \left(\tfrac{n-1}{n}\right)^k X_0 + (n-1)\left[\left(\tfrac{n-1}{n}\right)^k - 1\right]. \end{aligned}$$

Addieren wir die Anzahl Kokosnüsse des letzten Haufens $X_n = nm$, die n Kokosnüsse der Äffchen sowie die von den Piraten gestohlenen Kokosnüsse, so erhalten wir offensichtlich X_0.

$$\begin{aligned} X_0 &= nm + n + \tfrac{1}{n}(X_0 - 1 + X_1 - 1 + X_2 - 1 + \cdots + X_{n-1} - 1) \\ &= nm + n - 1 + \tfrac{1}{n}\left(X_0 + X_1 + \cdots + X_{n-1}\right). \end{aligned}$$

Wir wollen jetzt den Klammerterm explizit bestimmen; sei dazu $F_k \coloneqq X_0 + X_1 + \cdots + X_{k-1}$. Unter Verwendung der expliziten Formeln für X_k gilt also

$$\begin{aligned} F_k &= X_0 + \sum_{i=1}^{k-1}\left[\left(\tfrac{n-1}{n}\right)^i X_0\right] + \sum_{i=1}^{k-1}\left[(n-1)\left(\left(\tfrac{n-1}{n}\right)^i - 1\right)\right] \\ &= X_0 + X_0\left[\frac{\left(\frac{n-1}{n}\right)^k - \left(\frac{n-1}{n}\right)}{\left(\frac{n-1}{n}\right) - 1}\right] + (n-1)\left[\frac{\left(\frac{n-1}{n}\right)^k - \left(\frac{n-1}{n}\right)}{\left(\frac{n-1}{n}\right) - 1} - (n-1)\right]. \end{aligned}$$

Weil der erste Klammerterm gleich $-(n-1)\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} - 1\right]$ ist, folgt

$$\begin{aligned} F_k &= X_0\left[1 - (n-1)\left(\left(\tfrac{n-1}{n}\right)^{k-1} - 1\right)\right] + (n-1)^2\left[1 - \left(\tfrac{n-1}{n}\right)^{k-1} - 1\right] \\ &= X_0\left[n - (n-1)\left(\tfrac{n-1}{n}\right)^{k-1}\right] - (n-1)^2\left(\tfrac{n-1}{n}\right)^{k-1}. \end{aligned}$$

Es ist demnach

$$X_0 = nm + n - 1 + \tfrac{F_n}{n} \quad \Rightarrow \quad nX_0 - F_n - n^2 m = n(n-1),$$

woraus

$$nX_0 - X_0\left[n - (n-1)\left(\tfrac{n-1}{n}\right)^{n-1}\right] + (n-1)^2\left(\tfrac{n-1}{n}\right)^{n-1} - n^2 m = n(n-1)$$

folgt. Wenn man zusammenfasst und mit n^{n-1} multipliziert, ergibt sich schliesslich

$$(n-1)^n X_0 - n^{n+1} m = (n-1)n^n - (n-1)^{n+1}.$$

Das ist die lineare diophantische Gleichung, die es zur Bestimmung von X_0 bei n Piraten zu lösen gilt. Tatsächlich ist die Gleichung für $n = 3$ wie im ursprünglichen Rätsel: $8X_0 - 81m = 38$.

B Zusammenhang zwischen den Lösungen der Pellschen Gleichung

Im **Unterkapitel 4.5** haben wir in der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d} = \left[a_0, \overline{a_1, \ldots, a_{\ell-1}, 2a_0}\right]$ die Lösungen der allgemeinen Pellschen Gleichung $X^2 - dY^2 = \pm 1$ gefunden. Ist die primitive Periodenlänge ℓ gerade, sind nach dem **Satz 4.5** alle Lösungen (X, Y) der Pellschen Gleichung $X^2 - dY^2 = 1$ mit $X, Y \in \mathbb{N}^+$ gegeben durch $(X_k, Y_k) = (p_{k\ell-1}, q_{k\ell-1})$, während $X^2 - dY^2 = -1$ keine besitzt. Ist ℓ ungerade, so lösen $(X_k, Y_k) = (p_{2k\ell-1}, q_{2k\ell-1})$ die Pellsche und $(X_k, Y_k) = (p_{(2k-1)\ell-1}, q_{(2k-1)\ell-1})$ die andere Gleichung. Um Lösungen der beiden Gleichungen zu finden, muss man also durch die Rekursionsformeln schrittweise Näherungszähler und –nenner berechnen. Desto grösser die primitive Periodenlänge ℓ ist, umso ineffizienter ist dieses Verfahren. Ein bemerkenswerter Zusammenhang zwischen den Lösungen ermöglicht es uns aber, diese vergleichsweise schnell zu finden:

Satz B.1. *in Anbetracht der Kettenbruchentwicklung von* $\sqrt{d} = \left[a_0, \overline{a_1, \ldots, a_{\ell-1}, 2a_0}\right]$*, wobei* ℓ *die primitive Periodenlänge ist, besteht der folgende Zusammenhang:*

$$p_{k\ell-1} + q_{k\ell-1}\sqrt{d} = \left(p_{\ell-1} + q_{\ell-1}\sqrt{d}\right)^k.$$

Hat man also die minimale Lösung $(p_{k\ell-1}, q_{k\ell-1})$ der Gleichungen $X^2 - dY^2 = \pm 1$ gefunden – man erhält sie entweder für $k = 1$ oder für $k = 2$ – so lassen sich die folgenden Lösungen um einiges schneller berechnen.

Beweis. Es sei $\left[a_0, \overline{a_1, \ldots, a_{\ell-1}, 2a_0}\right]$ die Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$. Offenbar gilt

$$\frac{p_{n+\ell-1}}{q_{n+\ell-1}} = [a_0, a_1, \ldots, a_{\ell-1}, 2a_0, a_{\ell+1}, \ldots, a_{n+\ell-1}],$$

und da hier insgesamt $(n + \ell)$ Teilnenner vorhanden sind, muss wegen der Periodizität

$$[2a_0, a_{\ell+1}, \ldots, a_{n+\ell-1}] = a_0 + [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}] = a_0 + \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{q_{n-1}a_0 + p_{n-1}}{q_{n-1}}$$

sein. Daher folgt

$$\frac{p_{n+\ell-1}}{q_{n+\ell-1}} = a_0 + \cfrac{1}{\left|a_1\right|} + \cdots + \cfrac{1}{\left|a_{\ell-1}\right|} + \cfrac{q_{n-1}}{\left|q_{n-1}a_0 + p_{n-1}\right|}. \tag{B.1}$$

Nach den Rekursionsformeln allgemeiner Kettenbrüche **Theorem 2.1, S.3** erhalten wir demnach

$$\frac{p_{n+\ell-1}}{q_{n+\ell-1}} = \frac{(q_{n-1}a_0 + p_{n-1})p_{\ell-1} + q_{n-1}p_{\ell-2}}{(q_{n-1}a_0 + p_{n-1})q_{\ell-1} + q_{n-1}q_{\ell-2}}.$$

Wäre der rechte Bruch irreduzibel, erhielten wir, da $p_{n+\ell-1}, q_{n+\ell-1}$ teilerfremd sind, die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} p_{n+\ell-1} &= (q_{n-1}a_0 + p_{n-1})p_{\ell-1} + q_{n-1}p_{\ell-2} \\ &= q_{n-1}(p_{\ell-1}a_0 + p_{\ell-2}) + p_{n-1}p_{\ell-1}, \\ q_{n+\ell-1} &= (q_{n-1}a_0 + p_{n-1})q_{\ell-1} + q_{n-1}q_{\ell-2} \\ &= q_{n-1}(q_{\ell-1}a_0 + q_{\ell-2}) + p_{n-1}q_{\ell-1}. \end{aligned} \tag{B.2}$$

Sei t der grösste gemeinsame Teiler des Nenners und Zählers dieses Bruches. Wir zeigen nun, dass $t = 1$ und der Bruch also tatsächlich irreduzibel ist. Wegen dem **Lemma 2.1, S. 6** muss in Anbetracht von (B.1)

$$\left[(q_{n-1}a_0 + p_{n-1})p_{\ell-1} + q_{n-1}p_{\ell-2}\right] q_{\ell-1} - p_{\ell-1}\left[(q_{n-1}a_0 + p_{n-1})q_{\ell-1} + q_{n-1}q_{\ell-2}\right] = (-1)^{\ell-1}q_{n-1}$$

gelten, also $t \mid q_{n-1}$ sein. Da t per Definition die Terme in den eckigen Klammern teilt, muss daher $t \mid p_{n-1}p_{\ell-1}$ und $t \mid p_{n-1}q_{\ell-1}$ sein. Ist $t \neq 1$ und kein Teiler von p_{n-1}, muss daher $t \mid p_{\ell-1}$ und $t \mid q_{\ell-1}$ sein. Aber da $\mathbf{ggT}(p_{\ell-1}, q_{\ell-1}) = 1$ ist, müsste $t = 1$ sein – ein Widerspruch. Ist $t \neq 1$ und ein Teiler von p_{n-1}, wäre, da

$t \mid q_{n-1}$ ist, wiederum $t = 1$ – ein Widerspruch. Es muss also $t = 1$ sein. Die jetzt geltenden Gleichungen (B.2) lassen sich nach den Formeln (4.7), **S. 26** noch umschreiben. Diese Formeln besagen

$$p_{\ell-1} = P_\ell q_{\ell-1} + q_{\ell-2} Q_\ell \quad \text{und} \quad d q_{\ell-1} = P_\ell p_{\ell-1} + p_{\ell-2} Q_\ell;$$

und da $\xi_\ell = [2a_0, \overline{a_1, \ldots, a_{\ell-1}, 2a_0}] = \frac{\sqrt{d}+P_\ell}{Q_\ell} = \frac{\sqrt{d}+a_0}{1}$ ist, gilt

$$p_{\ell-1} = a_0 q_{\ell-1} + q_{\ell-2} \quad \text{und} \quad d q_{\ell-1} = a_0 p_{\ell-1} + p_{\ell-2}.$$

Diese Ausdrücke lassen sich in die Gleichungen (B.2) einsetzen. Man erhält:

$$p_{n+\ell-1} = q_{n-1} d q_{\ell-1} + p_{n-1} p_{\ell-1} \quad \text{und} \quad q_{n+\ell-1} = q_{n-1} p_{\ell-1} + p_{n-1} q_{\ell-1}.$$

Multipliziert man die letzte Gleichung mit $\sqrt{d}$ und addiert die beiden, ergibt sich

$$p_{n+\ell-1} + q_{n+\ell-1}\sqrt{d} = \left(p_{n-1} + q_{n-1}\sqrt{d}\right)\left(p_{\ell-1} + q_{\ell-1}\sqrt{d}\right).$$

Für $n = (k-1)\ell$ erhalten wir also:

$$p_{k\ell-1} + q_{k\ell-1}\sqrt{d} = \left(p_{(k-1)\ell-1} + q_{(k-1)\ell-1}\sqrt{d}\right)\left(p_{\ell-1} + q_{\ell-1}\sqrt{d}\right).$$

Der erste Klammerterm ist in derselben Form wie die linke Seite. Wir erhalten somit:

$$p_{k\ell-1} + q_{k\ell-1}\sqrt{d} = \left(p_{(k-2)\ell-1} + q_{(k-2)\ell-1}\sqrt{d}\right)\left(p_{\ell-1} + q_{\ell-1}\sqrt{d}\right)^2.$$

Indem wir das Verfahren insgesamt k-mal durchführen, folgt schliesslich

$$p_{k\ell-1} + q_{k\ell-1}\sqrt{d} = \left(p_{-1} + q_{-1}\sqrt{d}\right)\left(p_{\ell-1} + q_{\ell-1}\sqrt{d}\right)^k = \left(p_{\ell-1} + q_{\ell-1}\sqrt{d}\right)^k.$$

■

C Kettenbrucherweiterung: Multiplikatoren

Im Beweis des **Satzes 5.4, S.33** wurde argumentiert, dass der Kettenbruch

$$\frac{\gamma}{\gamma} + \frac{x}{\gamma+1} + \frac{x}{\gamma+2} + \frac{x}{\gamma+3} + \cdots + \frac{x}{\gamma+n-1} + \cdots \tag{C.1}$$

mittels „Kettenbrucherweiterung“ aus dem Kettenbruch

$$\xi_0 = \frac{1}{1} + \frac{\frac{x}{\gamma(\gamma+1)}}{1} + \frac{\frac{x}{(\gamma+1)(\gamma+2)}}{1} + \frac{\frac{x}{(\gamma+2)(\gamma+3)}}{1} + \cdots + \frac{\frac{x}{(\gamma+n-2)(\gamma+n-1)}}{1} + \cdots \tag{C.2}$$

folgt. Auch bei anderen Kettenbrüchen wurde die Kettenbrucherweiterung verwendet. Dieser Anhang soll dazu dienen, zu verstehen, was damit gemeint ist. Wir können den Wert des Kettenbruches (C.2) als $\xi_0 = \frac{1}{\xi_1} = \frac{\gamma}{\gamma\xi_1}$ schreiben. Wenn wir den Kettenbruch für ξ_0 in dieser Weise erweitern, erhalten wir:

$$\xi_0 = \frac{\gamma}{\gamma} + \frac{\frac{x}{\gamma+1}}{1} + \frac{\frac{x}{(\gamma+1)(\gamma+2)}}{1} + \frac{\frac{x}{(\gamma+2)(\gamma+3)}}{1} + \cdots + \frac{\frac{x}{(\gamma+n-2)(\gamma+n-1)}}{1} + \cdots$$

In diesem Kettenbruch erweitern wir abermals einen Kettenbruch, und zwar denjenigen, der $\frac{\frac{x}{\gamma+1}}{\xi_2}$ entspricht. Wir erhalten:

$$\xi_0 = \frac{\gamma}{\gamma} + \frac{x}{\gamma+1} + \frac{\frac{x}{\gamma+2}}{1} + \frac{\frac{x}{(\gamma+2)(\gamma+3)}}{1} + \cdots + \frac{\frac{x}{(\gamma+n-2)(\gamma+n-1)}}{1} + \cdots$$

Es ist leicht zu ersehen, dass die bei dieser Vorgehensweise entstehenden n^{ten} Näherungsbrüche dieselben Werte wie die ursprünglichen behalten. Wir erhalten, indem wir so weiterfahren, offenbar den Kettenbruch (C.1) und dessen Wert ist, da sich die Näherungsbrüche nicht verändern, gleich ξ_0. Der Begriff „Kettenbrucherweiterung“ kommt daher, dass wir bei der Vorgehensweise sukzessiv Kettenbrüche erweitert haben. In der Fachliteratur findet man diesen Begriff jedoch nicht; stattdessen verwendet man für den selben Zweck Multiplikatoren $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$. Sie erlauben es, ohne ein bestimmtes Vorgehen zu beschreiben, denselben Zweck zu erfüllen: Es sei ein allgemeiner Kettenbruch mit Wert ξ_0 gegeben:

$$\xi_0 = a_0 + \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_3}{a_3} + \cdots + \frac{b_n}{a_n} + \cdots.$$

Seinen Näherungszähler bzw. –nenner bezeichnen wir mit p_n bzw. q_n. Wir werden jetzt zeigen, dass die Näherungsbrüche des Kettenbruches

$$a_0 + \frac{\varrho_1 b_1}{\varrho_1 a_1} + \frac{\varrho_1\varrho_2 b_2}{\varrho_2 a_2} + \frac{\varrho_2\varrho_3 b_3}{\varrho_3 a_3} + \cdots + \frac{\varrho_{n-1}\varrho_n b_n}{\varrho_n a_n} + \cdots; \quad \varrho_k \neq 0$$

die gleichen Werte haben wie die Näherungsbrüche des vorherigen, sein Wert also ebenfalls ξ_0 ist. Sein n^{ter} Näherungszähler bzw. –nenner sei r_n bzw. s_n. Es genügt jetzt zu zeigen, dass stets $k_n p_n = r_n$ und $k_n q_n = s_n$ mit $k_n \in \mathbb{R}^*$ gilt. Im Fall $n = 0$ ist $k_0 = 1$. Wir beweisen jetzt mittels Induktion, dass für $n \geq 1$ jeweils $k_n = \varrho_1\varrho_2\cdots\varrho_n$ ist. Berechnet man r_1, s_1 und r_2, s_2 nach den Rekursionsformeln **Satz 2.1, S.3**, ergibt sich die Behauptung für $n = 1, 2$. Wir nehmen an, dass die Behauptung allgemein für $(n-1)$ und n gilt. Nach den Rekursionsformeln ist jetzt

$$r_{n+1} = \varrho_{n+1}a_{n+1}r_n + \varrho_n\varrho_{n+1}b_{n+1}r_{n-1} \quad \text{und} \quad s_{n+1} = \varrho_{n+1}a_{n+1}s_n + \varrho_n\varrho_{n+1}b_{n+1}s_{n-1};$$

also folgt mittels der Induktionsannahme:

$$r_{n+1} = \varrho_1\varrho_2\cdots\varrho_n\varrho_{n+1}\,(a_{n+1}p_n + b_{n+1}p_{n-1}) = \varrho_1\varrho_2\cdots\varrho_n\varrho_{n+1}p_{n+1}$$

und

$$s_{n+1} = \varrho_1\varrho_2\cdots\varrho_n\varrho_{n+1}\,(a_{n+1}q_n + b_{n+1}q_{n-1}) = \varrho_1\varrho_2\cdots\varrho_n\varrho_{n+1}q_{n+1}.$$

Die Behauptung gilt dann also auch für $(n+1)$, was die Aussage $\frac{p_n}{q_n} = \frac{r_n}{s_n}$ beweist. Die Multiplikatoren sind also ein Werkzeug, welches einen Kettenbruch zu einem mit anderen Elementen umwandeln kann, ohne dass der Wert sich ändert. Wählt man sie in geschickter Weise, so kann man auch den Kettenbruch (C.2) in den Kettenbruch (C.1) umwandeln. Der Leser oder die Leserin möge dies bei Bedarf selbst verifizieren.

gym | NEUFELD

Eine Institution des Kantons Bern

Selbständigkeitserklärung Maturaarbeit

Ich erkläre hiermit, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen benutzt habe. Alle Textteile, welche unter Verwendung eines textbasierten Dialogsystems (wie ChatGPT) oder auf andere Weise mit Hilfe einer künstlichen Intelligenz von mir verfasst wurden, sind entsprechend gekennzeichnet. Das Informationsblatt «Plagiatserkennung» ist mir bekannt und somit auch die Konsequenzen eines Teil- oder Vollplagiats.

Ort und Datum:

Ried b. Kerzers, 19.10.2025

Unterschrift der Verfasserin /des Verfassers:

Lé Maede