Mathematische Fundstücke

Überraschendes für den Unterricht

Olaf Schnürer

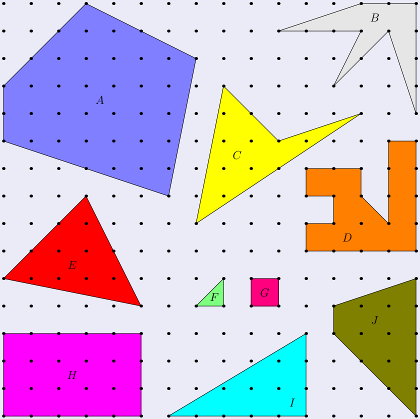
Kantonsschule am Burggraben, St. Gallen

September 2025

Übersicht

Flächen

Aufgabe



1. Bestimme jeweils die Fläche des Polygons und trage sie in die folgende Tabelle ein.

Polygon	Fläche	I	R
A	32	28	10
B			
⋮			

2. Es gibt eine interessante Formel, mit der man all diese Flächen berechnen kann. Trage dafür jeweils zusätzlich ein:
   - I = die Anzahl der Gitterpunkte im Inneren des Polygons;
   - R = die Anzahl der Gitterpunkte auf dem Rand des Polygons.
3. Finde die Formel, mit der man jeweils die Fläche aus I und R berechnen kann.

Hinweise:

- Welche Zahlen sind in die Boxen einzutragen?

$$\text{Fläche} = \boxed{} \cdot I + \boxed{} \cdot R + \boxed{}$$

- Welchen Beitrag zur Fläche sollte jeder innere Punkt bzw. jeder Randpunkt etwa liefern?

Satz von Pick

Satz (Georg Pick (10. August 1859 in Wien; 26. Juli 1942 im KZ Theresienstadt))

Der Flächeninhalt F jedes **einfachen Gitter**polygons ist

$$F = I + \frac{R}{2} - 1$$

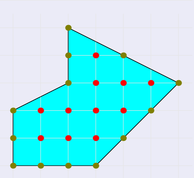
Dabei bezeichnen

- I die Anzahl der Gitterpunkte im **I**nneren des Polygons und
- R die Anzahl der Gitterpunkte auf seinem **R**and.

Beispiel

Für das rechts dargestellte Gitterpolygon gelten

$I = 11$ $\qquad$ $R = 13$



Satz von Pick:

$$\begin{aligned} F &= I + \frac{R}{2} - 1 \\ &= 11 + \frac{13}{2} - 1 \\ &= 16.5 \text{ Häuschen} \end{aligned}$$

Satz (von Pick)

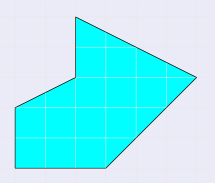
Der Flächeninhalt F jedes einfachen Gitterpolygons ist $F = I + \frac{R}{2} - 1$.

Heuristische Erklärung, Merkhilfe:

$$F \approx 1 \cdot I + \frac{1}{2} R_{\text{keine Eckpunkte}} + \sum_{e \text{ Eckpunkt}} \left(\frac{1}{2} - \frac{\text{Drehwinkel bei } e}{360^\circ}\right)$$

$$= I + \frac{1}{2}(R_{\text{keine Eckpunkte}} + R_{\text{Eckpunkte}}) - \frac{\sum_e \text{Drehwinkel bei } e}{360^\circ}$$

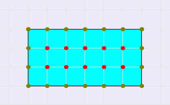
$$= I + \frac{1}{2} R - 1$$



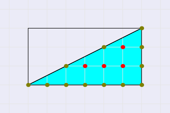
- Jeder Punkt im Innern liefert etwa die Fläche 1, denn das ihn umgebende Häuschen liegt meist ganz im Inneren des Polygons.
- Jeder Randpunkt, der kein Eckpunkt ist, liefert etwa die Fläche $\frac{1}{2}$, denn das ihn umgebende Häuschen liegt meist je zur Hälfte innnerhalb und ausserhalb des Polygons.
- Jeder Eckpunkt liefert etwa die Fläche $\left(\frac{1}{2} - \frac{\text{Drehwinkel } \alpha \text{ am Eckpunkt}}{360^\circ}\right)$.
  Die Summe aller Drehwinkel ist genau 360°, denn eine einmal das Polygon abwandernde Person dreht sich genau einmal um ihr Achse.

Beweis-Skizze.

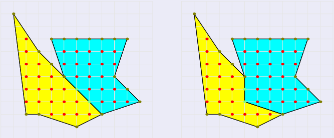
- Der Satz gilt für jedes Gitterrechteck mit achsenparallelen Seiten.



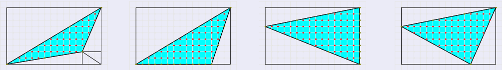
- Der Satz gilt für jedes (rechtwinklige) Gitterdreieck mit zwei achsenparallelen Seiten.



- Additivität: Entsteht ein einfaches Gitterpolygon P aus zwei einfachen Gitterpolygone P_1 und P_2 durch Zusammenfügen, so gilt der Satz genau dann für alle drei dieser Polygone, wenn er für zwei dieser Polygone gilt (2-out-of-3 property).



- Der Satz gilt für jedes Gitterdreieck.



- Der Satz gilt für jedes Gitterpolygon (per Triangulierung – Existenz zu beweisen...).

□

Aufgabe

Vervollständige die Skizze zu einem Beweis.

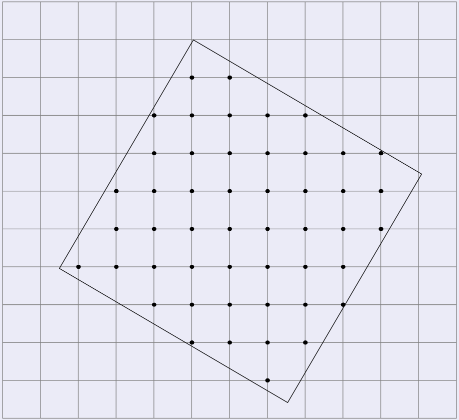
Warum ich den Satz von Pick mit meinen Klassen mache (wenn auch vielleicht ohne Beweis)

- Viele Schüler kommen selbst auf die korrekte Formel.
- Der Satz ist überraschend und hätte grössere Bekanntheit verdient.
- Er hat eine überzeugende heuristische Erklärung.
- Der (ausgearbeitete) Beweis ist für Schüler nachvollziehbar und lehrreich (divide et impera, Induktion); begabte Schüler können ihn anhand der Skizze selbst erarbeiten.
- Er hat nette Anwendungen (neben der offensichtlichen).

Zwei Folgerungen aus Pick (mehr dazu im Anhang)

Folgerung (aus Pick)

Wenn man ein $n \times n$-Quadrat beliebig in der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ platziert, so überdeckt es höchstens $(n+1)^2$ Punkte des Gitters $\mathbb{Z}^2$. (Diese Grenze ist scharf.)



Aufgabe

- Beweise dies! . . . ist ja schliesslich ein Workshop hier; Beweis siehe Anhang.
- Kann man dies verallgemeinern?

Folgerung (aus Pick)

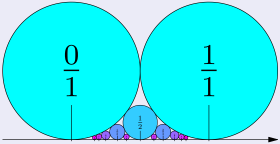
In jeder Farey-Folge (mit vollständig gekürzt geschriebenen Gliedern) ist

- die „Determinante“ aufeinanderfolgender Brüche -1 und
- jedes Folgenglied ist der Mediant (= die „naive“ Summe) seiner beiden Nachbarn.

Beispiel

Die Farey-Folge F_6 ist (Alle rationalen Zahlen in $[0,1]$ mit Nenner ≤ 6, vollständig gekürzt, aufsteigend geordnet.)

$$F_6 = \frac{0}{1} < \frac{1}{6} < \frac{1}{5} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{5}{6} < \frac{1}{1}$$



- „Determinante“ benachbarter Folgeglieder, z. B.

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 5 = -1$$

  Dies hat zur Folge, dass sich die zugehörigen Ford-Kreise berühren.

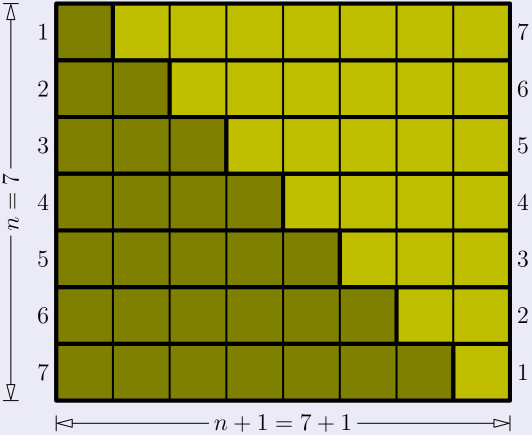
- Medianteneigenschaft, z. B.

$$\frac{3}{4} \oplus \frac{5}{6} = \frac{3+5}{4+6} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

  (Vergleiche: Stern-Brocot-Baum.)

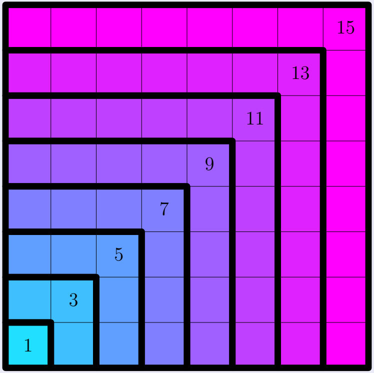
Übersicht

Beweise durch Bilder – Beweise ohne Worte – Proofs without words



Gaußsche Summenformel

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$



Jede Anfangssumme ungerader Zahlen ist Quadratzahl.

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 64 = 8^2$$

bzw. allgemein

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

Ist das ein Beweis?

Nikomachos' Beobachtung

- Nikomachos: Summen geeigneter Folgen ungerader Zahlen sind Kubikzahlen.
- Vorherige Beobachtung: Jede Anfangssumme ungerader Zahlen ist Quadratzahl.

$$\underbrace{\overbrace{1}^{\text{1 Summand}}}_{=1=1^3} + \underbrace{\overbrace{3+5}^{\text{2 Summanden}}}_{=8=2^3} + \underbrace{\overbrace{7+9+11}^{\text{3 Summanden}}}_{=27=3^3} + \underbrace{\overbrace{13+15+17+19}^{\text{4 Summanden}}}_{=64=4^3} + \underbrace{\overbrace{21+23+25+27+29}^{\text{5 Summanden}}}_{=125=5^3} = 15^2$$

Also

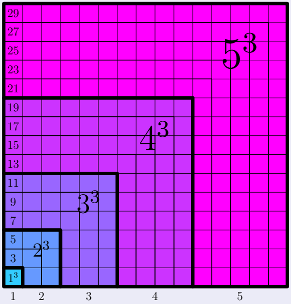
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 15^2$$

Dem Bild entnimmt man, wie man die quadrierte Zahl darstellen kann:

$$15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

Also

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2$$



Satz (von Nikomachos)

Für jede natürliche Zahl n gilt

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$$

Mit der gaußschen Summenformel kann man die rechte Seite umschreiben zu $\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2 = \binom{n+1}{2}^2$.

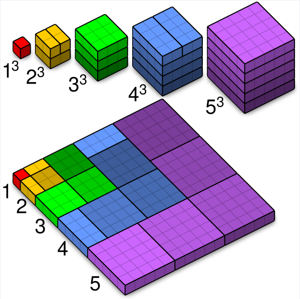
Warum ist dies heuer besonders relevant?

$$\begin{aligned} 2025 &= 45^2 && \text{(Glück gehabt: ist Quadratzahl)} \\ &= (1+2+3+4+5+6+7+8+9)^2 && \text{(Glück gehabt: } 45 = 1 + 2 + \cdots + 9\text{)} \\ &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3 && \text{(Nikomachos)} \end{aligned}$$

Satz (von Nikomachos)

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$$

Beweis? Proof without words?



Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Nikomachos

- Noch kein Beweis, aber eine schöne Illustration, gute Merkhilfe für die Aussage.
- Regt zum Denken an und im Idealfall zu einer sorgfältigen Ausarbeitung des/eines Beweises.

Satz (Liouvilles Verallgemeinerung von Nikomachos)

Sei N eine natürliche Zahl. Betrachte die Liste der Teileranzahlen aller Teiler von N. Dann hat diese Liste die Eigenschaft, dass die Summe der Kuben ihrer Elemente mit dem Quadrat der Summe ihrer Elemente übereinstimmt.

Beispiel

Liste der Teiler von $N = 12$:

$$1, 2, 3, 4, 6, 12$$

Liste der Teileranzahlen dieser Zahlen:

$$1, 2, 2, 3, 4, 6$$

Behauptet wird die Gleichheit

$$1^3 + 2^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 6^3 = (1 + 2 + 2 + 3 + 4 + 6)^2$$

Dies stimmt.

Aufgabe

- Für welche Zahl(en) N erhält man den Satz von Nikomachos zurück?
- Beweise die Verallgemeinerung! („Induktion über die Primfaktorzerlegung“) (siehe Anhang)

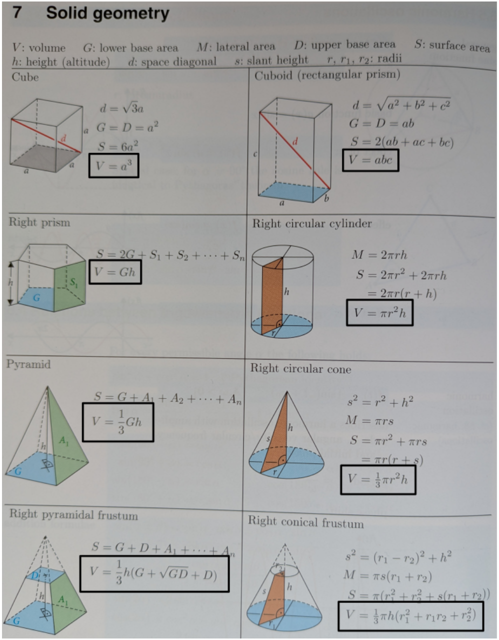
- Die Begriffe „Proof without words“ oder „Beweis durch Bild“ sind etwas irreführend, denn für sich allein genommen sind es oft keine vollständigen Beweise.
- Vielleicht sollte man eher von Visualisierungen von Beweisen oder Beweisideen sprechen.
- Empfehlung: Drei Bücher von Roger B. Nelsen: Proofs Without Words I, II, III, (More/Further) **Exercises in Visual Thinking**.
  Deutschsprachige Ausgabe: Beweise ohne Worte
  Dort finden sich viele schulgeeignete „Proofs without words“.

Übersicht

Volumenformeln

- Wer kennt alle Volumenformeln aus der Formelsammlung auswendig?
- Insbesondere: Volumen von
  - Kegelstumpf?
  - Pyramidenstumpf?
  - Kugel?
- Gibt es eine allgemeine, leicht merkbare Formel, die all diese Volumina korrekt ausrechnet?

(Die Formel sollte schulgeeignet sein, also kein Integral über die charakteristische Funktion oder ähnliches.)


7 Solid geometry

V: volume G: lower base area M: lateral area D: upper base area S: surface area
h: height (altitude) d: space diagonal s: slant height r, r_1, r_2: radii

Cube

$d = \sqrt{3}a$
$G = D = a^2$
$S = 6a^2$
$\boxed{V = a^3}$

Cuboid (rectangular prism)

$d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$
$G = D = ab$
$S = 2(ab+ac+bc)$
$\boxed{V = abc}$

Right prism

$S = 2G + S_1 + S_2 + \cdots + S_n$
$\boxed{V = Gh}$

Right circular cylinder

$M = 2\pi rh$
$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r+h)$
$\boxed{V = \pi r^2 h}$

Pyramid

$S = G + A_1 + A_2 + \cdots + A_n$
$\boxed{V = \frac{1}{3}Gh}$

Right circular cone

$s^2 = r^2 + h^2$
$M = \pi rs$
$S = \pi r^2 + \pi rs = \pi r(r+s)$
$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$

Right pyramidal frustum

$S = G + D + A_1 + \cdots + A_n$
$\boxed{V = \frac{1}{3}h(G + \sqrt{GD} + D)}$

Right conical frustum

$s^2 = (r_1 - r_2)^2 + h^2$
$M = \pi s(r_1 + r_2)$
$S = \pi(r_1^2 + r_2^2 + s(r_1 + r_2))$
$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)}$

Quelle: Fundamentum Mathematics and Physics

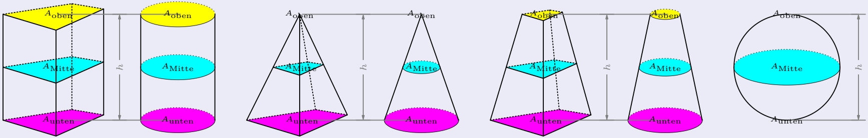
Proposition („Universalformel“ für Volumina; aus Perelman: Unterhaltsame Geometrie)

Die Formel

$$V = \frac{h}{6}\left(A_{\text{unten}} + 4 \cdot A_{\text{Mitte}} + A_{\text{oben}}\right)$$

berechnet das Volumen der sieben unten dargestellten Körpertypen (Prisma, Zylinder; Pyramide, Kreiskegel, Pyramidenstumpf, Kegelstumpf; Kugel), wobei

- h = Höhe;
- A_{oben} = obere Grundfläche;
- A_{Mitte} = Querschnittsfläche in mittlerer Höhe;
- A_{unten} = untere Grundfläche.



Aufgabe

Zeige: Diese Formel liefert jeweils das korrekte Ergebnis.

Aufgabe (Alternative, wenn die Schüler die Formel selbst finden sollen)

Fülle die Lücken in der Lückenformel $V = \frac{h}{\square}\left(\square \cdot A_{\text{unten}} + \square \cdot A_{\text{Mitte}} + \square \cdot A_{\text{oben}}\right)$ so, dass das Volumen der sieben Körpertypen ... richtig berechnet wird.

Woher kommt die „Universalformel" $V = \frac{h}{6}(A_{\text{unten}} + 4A_{\text{Mitte}} + A_{\text{oben}})$?

(Simpson-Regel)

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\Big(f(a) + 4f\big(\tfrac{a+b}{2}\big) + f(b)\Big)$$

Zeige: Sie liefert für alle Polynome vom Grad ≤ 3 das exakte Ergebnis.

Simpson-Regel für Volumina von Rotationskörpern:

(Keplersche Fassregel)

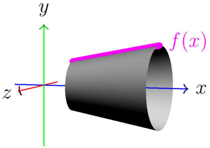
$$V_{\text{Rotationskörper}} = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx \approx \frac{b-a}{6}\Big(\pi(f(a))^2 + 4\pi\big(f\big(\tfrac{a+b}{2}\big)\big)^2 + \pi(f(b))^2\Big)$$

Sie ist exakt für affin-lineare Funktionen f, weil Simpson exakt ist für alle Polynome vom Grad ≤ 2.

Also berechnet die Keplersche Fassregel das Volumen von geraden Kreiskegel(stümpfe)n und Zylindern exakt. In diesen Fällen erhält man genau die oben angegebene Universalformel:

$$V_{\text{Kegelstumpf}} = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx = \underbrace{\frac{b-a}{6}}_{=\frac{h}{6}}\Big(\underbrace{\pi(f(a))^2}_{=A_{\text{unten}}} + 4\underbrace{\pi\big(f\big(\tfrac{a+b}{2}\big)\big)^2}_{=A_{\text{Mitte}}} + \underbrace{\pi(f(b))^2}_{A_{\text{oben}}}\Big)$$

$$= \frac{h}{6}(A_{\text{unten}} + 4A_{\text{Mitte}} + A_{\text{oben}})$$



Per Cavalieri erhält man daraus dieselbe Formel für beliebige Pyramiden(stümpfe) und Prismen.
Die Keplersche Fassregel ist nicht nur für affin-lineare Funktionen exakt, sondern auch für all jene Funktionen, deren Quadrat ein Polynom vom Grad ≤ 3 ist. Daraus folgt, dass die Universalformel auch für die Kugel gilt (und für einige andere Rotationskörper).

Übersicht

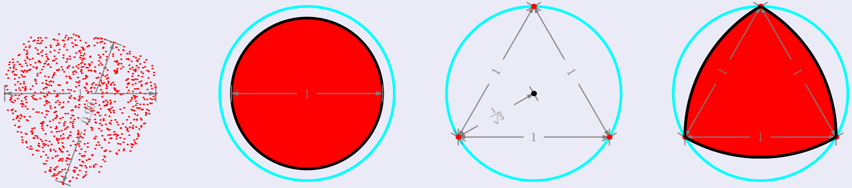
Punkte unter Kreisen verstecken: Pferchkreise

Satz (von Jung; vom Pferchkreis)

Jede Menge von Punkten in der Ebene mit Durchmesser ≤ 1 kann mit einem Kreis des Radius $\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577$ überdeckt werden.

Jede Menge von Punkten mit Durchmesser $\leq d$ kann dann natürlich von einem Kreis mit Radius $\frac{1}{\sqrt{3}}d$ überdeckt werden.

Beispiele von Punktmengen mit Durchmesser 1.



(„zufällig erzeugt“, Kreis mit Radius $\frac{1}{2}$, Eckpunkte des gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge 1, Gleichdick mit Durchmesser 1)

Die beiden Beispiele rechts zeigen, dass der Radius im Satz von Jung kleinstmöglich ist.

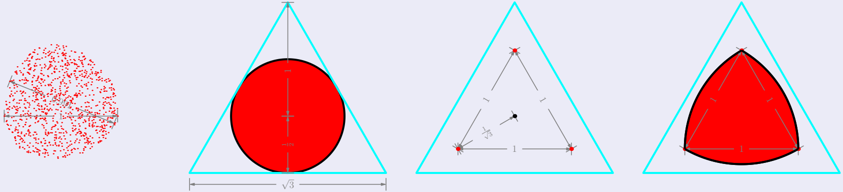
Leider ist der Beweis des Satzes von Jung nicht so einfach bzw. schulgeeignet.
Es gibt aber ein ähnliches, schulgeeignetes Resultat über ein Pferchdreieck.

Punkte unter Dreiecken verstecken – clevere Anwendung von Viviani

Satz (vom Pferchdreieck)

Jede Punktmenge mit Durchmesser ≤ 1 kann von einem gleichseitigen Dreieck der Seitenlänge $\sqrt{3} \approx 1.732$ (und somit der Höhe $\frac{3}{2}$) überdeckt werden.

Beispiele von Punktmengen in der Ebene, deren Durchmesser 1 ist.



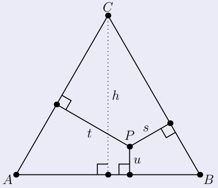
Das zweite Beispiel von links zeigt, dass die Seitenlänge $\sqrt{3}$ für ein Pferchdreieck kleinstmöglich ist.

Der Beweis verwendet den folgenden Satz von Viviani auf clevere Weise.

Satz (von Viviani)

In jedem gleichseitigen Dreieck stimmt die Summe der Abstände jedes Punkts im Inneren zu den Seiten mit der Höhe des Dreiecks überein.

$$h = s + t + u$$

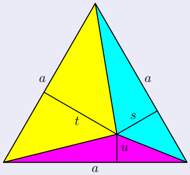


Beweis von Viviani.

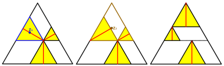
Die Dreiecksfläche ist die Summe der drei farbigen Dreiecksflächen. Wenn a die Seitenlänge des Dreiecks bezeichnet, gilt also

$$\frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}as + \frac{1}{2}at + \frac{1}{2}au$$

Multipliziere dies mit $\frac{2}{a}$.



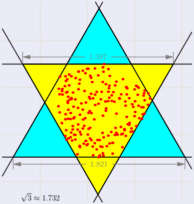
Es gibt auch einen Beweis ohne Worte (drehe um Schwerpunkte geeigneter Dreiecke).

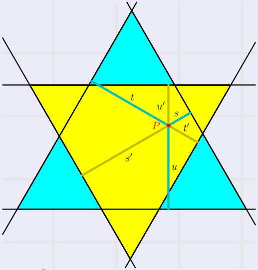


Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Viviani

Beweis des Satzes vom Pferchdreieck.

Gegeben sei eine Punktmenge des Durchmessers ≤ 1 (in der Zeichnung rot).
Das türkise Dreieck sei das kleinste gleichseitige Dreieck mit horizontaler „unterer“ Grundseite, das unsere Punktmenge einsperrt.
Analog sei das gelbe Dreieck definiert, nun mit horizontaler oberer Seite.
Wir zeigen, dass eines dieser beiden Dreiecke die Seitenlänge $\leq \sqrt{3}$ hat.





Sei P ein beliebiger Punkt unserer Punktmenge. Seien s, t, u bzw. s', t', u' wie in der Zeichnung angedeutet seine Abstände zu den drei Seiten des türkisen bzw. gelben Dreiecks, und zwar so, dass s und s' sich gegenseitig verlängern, und analog für t und t' bzw. für u und u'. Auf Grund der Abstandsbedingung gelten (denn sonst gäbe es rote Punkte mit Abstand > 1)

$$s + s' \leq 1 \qquad t + t' \leq 1 \qquad u + u' \leq 1$$

Sei h bzw. h' die Höhe des türkisen bzw. des gelben Dreiecks. Dann gelten nach Viviani

$$h = s + t + u \qquad h' = s' + t' + u'$$

Die Summe dieser beiden Gleichungen ist

$$h + h' = s + s' + t + t' + u + u' \leq 3$$

Also folgt $h \leq \frac{3}{2}$ oder $h' \leq \frac{3}{2}$. Da ein gleichseitiges Dreieck mit Höhe $\frac{3}{2}$ die Seitenlänge $\sqrt{3}$ hat, hat das türkise oder das gelbe Dreieck die Seitenlänge $\leq \sqrt{3}$ und ist somit das gesuchte Pferchdreieck. $\square$

Literatur

- Ross Honsberger:
  - Gems in Mathematics 1
  - Ingenuity in Mathematics
  - Mathematical Gems I, II, III
  - Mathematical Morsels
  - Mathematical Diamonds
- Roger B. Nelsen: Proofs Without Words I, II, III, (More/Further) Exercises in Visual Thinking
- J. I. Perelman: Unterhaltsame Geometrie
- Alexander Bogomolny: Cut the Knot, https://www.cut-the-knot.org/
- Wikipedia (Satz von Pick, Nikomachos, Satz von Jung, Ford-Kreise, Stern-Brocot-Folge, Simpson-Regel)

Diverse „Klassiker“ waren nützlich bei der Themensuche.

- Rademacher–Toeplitz: Von Zahlen und Figuren
- Aigner-Ziegler: Das Buch der Beweise
- Courant-Robbins: What is mathematics?
- Hilbert–Cohn-Vossen: Anschauliche Geometrie

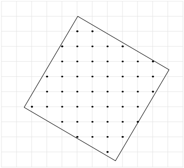
- Ich freue mich über Fragen, Anregungen, Hinweise, Ideen, Literaturhinweise, Lieblingssätze.
- Mein Favorit unter den heutigen Fundstücken ist der Satz von Pick.
  Andere Kandidaten: Eulerscher Polyedersatz, viele Sätze aus der Geometrie.

Vielen Dank!

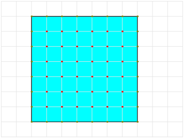
Übersicht

Erste Folgerung aus dem Satz von Pick

Wie viele Gitterpunkte überdeckt eine $n \times n$-Quadrat in der Ebene maximal?



Zufällige Lage eines 7×7-Rechtecks: 49 Punkte überdeckt



Achsenparallele Lage eines 7×7-Rechtecks: 64 Punkte überdeckt

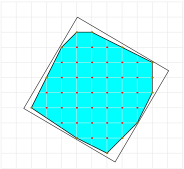


Illustration der Beweisidee

Folgerung (aus Pick)

Wenn man ein $n \times n$-Quadrat beliebig in der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ platziert, so überdeckt es höchstens $(n+1)^2$ Punkte des Gitters $\mathbb{Z}^2$. (Diese Grenze ist scharf.)

Folgerung (aus Pick)

Wenn man ein $n \times n$-Quadrat beliebig in der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ platziert, so überdeckt es höchstens $(n+1)^2$ Punkte des Gitters $\mathbb{Z}^2$.

Diese Grenze ist scharf: Wenn das Quadrat parallel zu den Achsen liegt und seine Ecken Gitterpunkte sind, so überdeckt es genau $(n+1)^2$ Gitterpunkte.

Aufgabe (nicht so einfach; Lösung: siehe nächste Seite)

Beweise diese Folgerung.

- Wende den Satz von Pick auf die konvexe Hülle der überdeckten Punkte an.
- Verwende, dass die Fläche dieser konvexen Hülle kleiner ist als die Fläche des Quadrats.
- Verwende (zuerst ohne Begründung), dass der Umfang dieser konvexen Hülle kleiner ist als der Umfang des Quadrats. Nutze dies, um die Anzahl der Gitterpunkte auf dem Rand der konvexen Hülle nach oben abzuschätzen.

Anschaulich ist die Aussage über den Umfang klar: Ein Gummiband schnappt vom Quadrat auf die konvexe Hülle zusammen.
Abstrakt wird der Umfang jedes konvexen Polygons kleiner, wenn man mit einem geradlinigen Schnitt einen Teil davon abschneidet (Dreiecksungleichung).
In unserem Fall kann man das Quadrat durch mehrfaches Abschneiden auf die konvexe Hülle zurechtstutzen.

Aufgabe

Kannst du das obige Resultat verallgemeinern?

- Gilt dasselbe sinngemäss auch für $m \times n$-Rechtecke?
  Antwort: Ja; warum?
- Welche ähnliche Aussage kann man für ein beliebiges konvexes Polygon der Fläche F und des Umfangs U treffen?

Das Polygon muss kein Gitterpolygon sein.

Frage: Wie viele Gitterpunkte überdeckt ein $n \times n$-Quadrat mindestens? (noch nicht ernsthaft überlegt)

Beweis der ersten Folgerung aus dem Satz von Pick:
Wir stellen uns das Quadrat in beliebiger Lage in der Ebene vor und bezeichnen es als S. Alle von S überdeckten Gitterpunkte bilden eine endliche Menge G.
Zu zeigen ist

$$|G| \leq (n+1)^2$$

Sei K die konvexe Hülle von G. Dann ist K ein Gitterpolygon (hier ist natürlich streng genommen nicht die konvexe Hülle, sondern ihr begrenzender Polygonzug gemeint). Wir werden den Satz von Pick auf dieses Gitterpolygon K anwenden.
Beobachtungen:

- Die Fläche von K ist kleiner als die Fläche von S, in Formeln $F(K) \leq F(S) = n^2$.
- Der Umfang von K ist kleiner als der Umfang von S, in Formeln $U(K) \leq U(S) = 4n$. Dies ist anschaulich klar, wenn man sich den Rand von S als Gummiband vorstellt, das auf K zusammenschnappt.
  Formaler geht es zum Beispiel so:
  - Zerscheidet man ein beliebiges konvexes Polygon mit einem geradlinigen Schnitt in zwei Teile (der Schnitt muss nicht durch Eckpunkte gehen), so hat jedes der neu erhaltenen Polygone kleineren Umfang. Dies folgt sofort aus der Konvexität und der Dreiecksungleichung.
  - Ist nun ein beliebiges konvexes Polygon q in einem anderen konvexen Polygon Q enthalten, so kann man Q sukzessive entlang von Kanten von q zerschneiden, bis q übrigbleibt. Also hat q kleineren Umfang als Q.

Weil der minimale Abstand zwischen Gitterpunkten 1 ist und $U(K) \leq 4n$ gilt, können auf dem Rand von K maximal $4n$ Gitterpunkte liegen (von jedem Gitterpunkt auf dem Rand muss man entlang des Randes mindestens eine Einheit weit laufen (etwa in mathematisch positivem Sinn, eventuell mit Eck(en)überquerung(en) (Dreiecksungleichung)), bis der nächste Gitterpunkt kommt).

Wenn R die Anzahl der Gitterpunkte auf dem Rand von K bezeichnet, gilt also

$$R \leq 4n$$

Sei I die Anzahl der Gitterpunkte im Inneren von K. Dann besagt der Satz von Pick

$$F(K) = I + \frac{R}{2} - 1$$

Offensichtlich gilt $|G| = I + R$. Unsere obigen Gleichungen und Ungleichungen liefern somit die gewünschte Abschätzung

$$|G| = I + R = \underbrace{I + \frac{R}{2}}_{=F(K)+1} + \underbrace{\frac{R}{2}}_{\leq 2n} \leq \underbrace{F(K)}_{\leq F(S)=n^2} + 1 + 2n \leq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

□

Zweite Folgerung aus dem Satz von Pick

Definition (Farey-Folge)

Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Die ***n*-te Farey-Folge** F_n besteht aus allen rationalen Zahlen im Intervall $[0, 1]$, der Grösse nach geordnet, die sich als Bruch mit einem Nenner $\leq n$ schreiben lassen.

Beispiel

Die Farey-Folge besteht aus 13 Gliedern (hier alle vollständig gekürzt dargestellt).

$$F_6 = \frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1}$$

Beobachtungen:

- Die „Determinante“ benachbarter Folgeglieder (vollständig gekürzt) ist stets -1, z. B.

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 5 = -1$$

  Dies folgt aus dem Satz von Pick.

- (Daraus folgt:) Jedes Glied ist der Mediant (= die „naive Summe“) der beiden vollständig gekürzten Nachbarn, z. B.

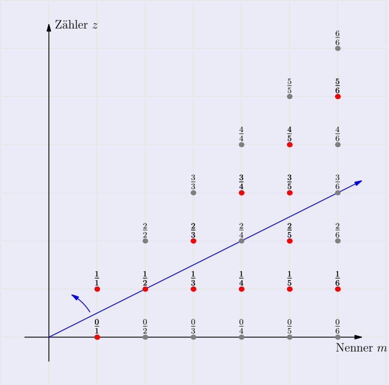
$$\frac{3}{4} \oplus \frac{5}{6} = \frac{3+5}{4+6} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

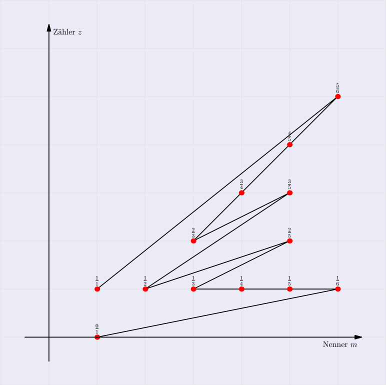
  (Vergleiche: Stern-Brocot-Baum.)

Farey-Folge $\quad F_6 = \frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1}$

(Geometrische Vorstellung)

Der Gitterpunkt (m, z) liefert die rationale Zahl $\frac{z}{m}$ alias die Steigung der Ursprungsgeraden durch (m, z). Die vom Ursprung sichtbaren Punkte sind rot markiert und entsprechen vollständig gekürzten Darstellungen rationaler Zahlen.
Wenn man den blauen Strahl über die Punkte schwenkt, liefern die roten Punkte die Farey-Folge.





Folgerung (aus dem Satz von Pick)

Für jede Farey-Folge F_n gelten:

1. Sind $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ benachbarte, vollständig gekürzt dargestellte Folgeglieder, so gilt

$$\det \begin{pmatrix} b & d \\ a & c \end{pmatrix} = bc - ad = 1$$

2. (Aus dem vorherigen Punkt folgt:) Sind $\frac{a}{b} < \frac{x}{y} < \frac{c}{d}$ benachbarte, vollständig gekürzt dargestellte Folgeglieder, so gilt

$$\frac{x}{y} = \frac{a+c}{b+d}$$

Beweis.

1. Betrachte das Gitterdreieck aus den zugehörigen Punkten (b, a) und (c, d) und dem Ursprung. Dieses hat keine inneren Gitterpunkte und nur drei Gitterpunkte auf dem Rand (warum?).
   Wir können die Dreiecksfläche F einerseits mit dem Satz von Pick berechnen und andererseits mit der üblichen Formel als Hälfte der Determinanten zweier aufspannender Seitenvektoren (die ich vor Pick im Unterricht erkläre).

$$F = I + \frac{R}{2} - 1 = 0 + \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \qquad \text{Pick}$$

$$F = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} b & d \\ a & c \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(bc - ad) \qquad \text{per Determinante}$$

   Zusammengenommen folgt $bc - ad = 1$.

2. Nach dem soeben bewiesenen Resultat gelten

$$\begin{aligned} & & bx - ay = 1 = cy - dx \\ &\Longrightarrow & (b+d)x = (c+a)y \\ &\Longrightarrow & \frac{x}{y} = \frac{c+a}{b+d} \end{aligned}$$

Im Nachhinein sieht man, dass die Aussage auch gilt, wenn nur $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ vollständig gekürzt sind.

□

Definition (Ford-Kreis)

Der **Ford-Kreis zur rationalen Zahl** q ist wie folgt definiert:

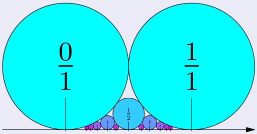
- Schreibe q als **vollständig gekürzten Bruch** $\frac{a}{b}$.
- Der Ford-Kreis hat den Mittelpunkt $(\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2})$ und den Radius $\frac{1}{2b^2}$.

Mit anderen Worten berührt der Ford-Kreis die x-Achse im Punkt q, liegt oberhalb dieser Achse und hat den Radius $\frac{1}{2b^2}$.

Beispiel (Ford-Kreise zu Farey-Folge)

Die Zeichnung zeigt die Ford-Kreise für die Gleider der Farey-Folge

$$F_6 = \frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1}$$



Dass sich hier dieses schöne Bild ergibt, liegt an unserem vorherigen Resultat über die Determinante benachbarter Farey-Folgeglieder und dem folgenden Resultat.

Lemma

Zwei Ford-Kreise zu verschiedenen rationalen Zahlen sind entweder disjunkt oder berühren sich. Sie berühren sich genau dann, wenn gilt

$$bc - ad = \pm 1$$

wobei $\frac{a}{b}$ *und* $\frac{c}{d}$ *vollständig gekürzte Darstellungen der beiden beteiligten rationalen Zahlen sind.*

Der einfache Beweis ist dem Leser überlassen.

Folgerung aus dem Satz von Nikomachos I

Satz (Liouvilles Verallgemeinerung von Nikomachos)

Sei N eine natürliche Zahl. Sei

$$t_1, t_2, \ldots, t_m$$

eine Liste aller Teiler von N (darunter 1 und N). Sei a_i die Anzahl der Teiler von t_i. Dies liefert eine Liste

$$a_1, a_2, \ldots, a_m$$

Dann gilt: Die Summe der Kuben der a_i stimmt überein mit dem Quadrat der Summe der a_i, als Formel

$$\sum a_i^3 = \left(\sum a_i\right)^2$$

Beweis: Wir zeigen die Aussage per „Induktion über die Primfaktorzerlegung" von N. Sicherlich gilt die Aussage für $N = 1$, denn dann besteht die List der Teileranzahlen aller Teiler von N nur aus der Zahl 1 und es gilt wie behauptet $1^3 = 1^2$.
Es genügt nun, Folgendes zu zeigen: Gilt die Aussage für K, so auch für $N = p^n K$, wobei p eine Primzahl ist, die zu K teilerfremd ist.

Folgerung aus dem Satz von Nikomachos II

Sei

$$t_1, t_2, \ldots, t_m$$

die Liste aller Teiler von K und

$$a_1, a_2, \ldots, a_m$$

die Liste der zugehörigen Teileranzahlen.
Dann ist

$$\begin{array}{llll}
t_1, & t_2, & \ldots, & t_m \\
pt_1, & pt_2, & \ldots, & pt_m \\
p^2 t_1, & p^2 t_2, & \ldots, & p^2 t_m \\
\vdots & & & \\
p^n t_1, & p^n t_2, & \ldots, & p^n t_m
\end{array}$$

Folgerung aus dem Satz von Nikomachos III

die Liste aller Teiler von $N = Kp^n$ und

$$\begin{array}{llll}
a_1, & a_2, & \dots, & a_m \\
2a_1, & 2a_2, & \dots, & 2a_m \\
3a_1, & 3a_2, & \dots, & 3a_m \\
\vdots & & & \\
(n+1)na_1, & (n+1)a_2, & \dots, & (n+1)a_m
\end{array}$$

die Liste der zugehörigen Teileranzahlen.
Die Summe der Kuben all dieser Zahlen ist

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{m} (ja_i)^3 &= \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{m} j^3 a_i^3 \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n+1} j^3 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} a_i^3 \right)
\end{aligned}$$

Folgerung aus dem Satz von Nikomachos IV

Das Quadrat der Summe all dieser Zahlen ist

$$\left(\sum_{j=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m} j a_i\right)^2 = \left(\left(\sum_{j=1}^{n+1} j\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)\right)^2 = \left(\sum_{j=1}^{n+1} j\right)^2\cdot\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)^2$$

Laut Nikomachos (für den ersten Faktor) und Induktionsannahme (für den zweiten Faktor) gilt aber

$$\left(\sum_{j=1}^{n+1} j^3\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{m} a_i^3\right) = \left(\sum_{j=1}^{n+1} j\right)^2\cdot\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)^2$$

Dies zeigt die Behauptung. □