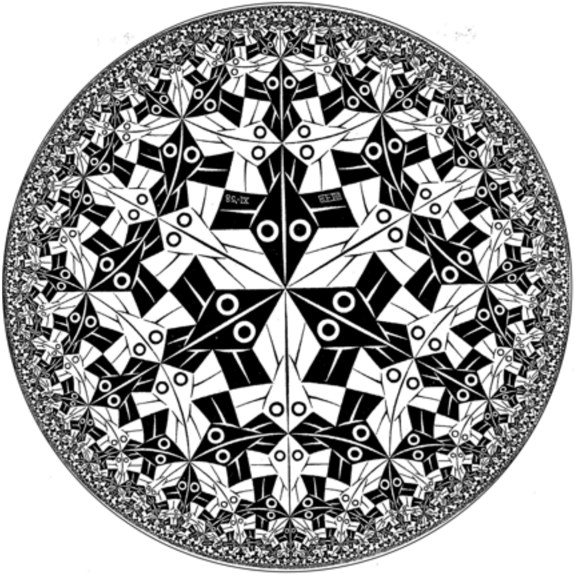


©M.C. Escher

Die Euklidische Ebene neu frisiert und Cirkellimiets

Wolfgang Soergel

Mathematisches Institut
Universität Freiburg

September 2025

Inzidenzgeometrie:

Ein Paar (X, G) aus

- einer Menge X von **Punkten** und
- einer Menge $G \subset \mathrm{Pot}(X)$ von **Geraden**

derart, daß

Inzidenzgeometrie:

Ein Paar (X, G) aus

- einer Menge X von **Punkten** und
- einer Menge $G \subset \mathrm{Pot}(X)$ von **Geraden**

derart, daß

- jede Gerade mindestens zwei Punkte hat und
- durch je zwei verschiedene Punkte genau eine Gerade geht.

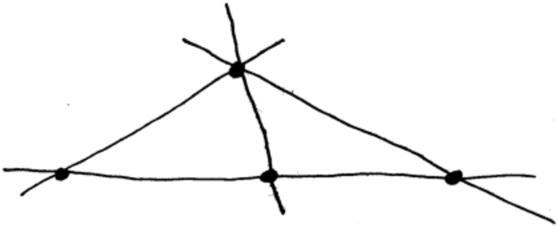
Inzidenzgeometrie:

Ein Paar (X, G) aus

- einer Menge X von **Punkten** und
- einer Menge $G \subset \mathrm{Pot}(X)$ von **Geraden**

derart, daß

- jede Gerade mindestens zwei Punkte hat und
- durch je zwei verschiedene Punkte genau eine Gerade geht.

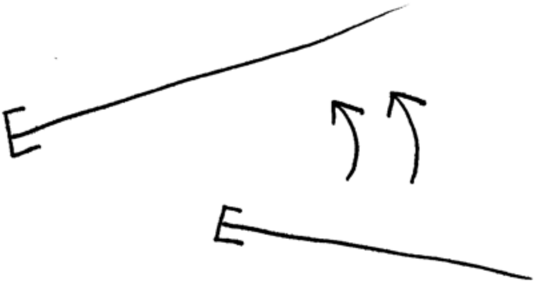


Zwischenrelation:

Eine Vorgabe Z von zwei zueinander opponierten Anordnungen auf jeder Gerade derart, daß eine Gerade nie nur ein Segment eines Dreiecks treffen kann.

Kongruenzgruppe:

Eine Untergruppe $K \subset \mathtt{Aut}(X, G, Z)$ derart, daß es für je zwei Halbgeraden $A, B \subset X$ genau zwei **Kongruenzen** $k, h \in K$ gibt mit $k(A) = B = h(A)$.

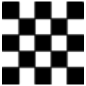


Axiomatik der Ebene:

Bis auf Isomorphismus gibt es genau zwei Quadrupel (X, G, Z, K) bestehend aus

- einer Inzidenzgeometrie (X, G) mit mindestens einer Gerade,
- einer Zwischenrelation Z, bei der jede nichtleere beschränkte Teilmenge jeder Gerade eine kleinste obere Schranke hat (Supremumseigenschaft) und
- einer Kongruenzgruppe $K \subset \mathrm{Aut}(X, G, Z)$,

die Euklidische Ebene und die Hyperbolische Ebene.



Euklid, Lobatchevski, Hilbert, Pasch, . . . ,
[Karzel, Sörensen, Windelberg 1973], [Filler 1993],
[S. Skriptum Elementargeometrie]

Wir nennen ein Tripel (X, G, Z, K) mit den oben gelisteten Eigenschaften eine **fasteuklidische Geometrie** und beweisen beispielhaft zwei erste Eigenschaften.

Wir nennen ein Tripel (X, G, Z, K) mit den oben gelisteten Eigenschaften eine **fasteuklidische Geometrie** und beweisen beispielhaft zwei erste Eigenschaften.

- Fasteuklidische Geometrien haben unendlich viele Punkte $|X| = \infty$.

  Beweis: Je zwei Halbgeraden haben gleichviele Punkte und es gibt Halbgeraden mit mindestens zwei Punkten. Also umfaßt jede Halbgerade eine weitere Halbgerade als echte Teilmenge.

Wir nennen ein Tripel (X, G, Z, K) mit den oben gelisteten Eigenschaften eine **fasteuklidische Geometrie** und beweisen beispielhaft zwei erste Eigenschaften.

- Fasteuklidische Geometrien haben unendlich viele Punkte $|X| = \infty$.

  Beweis: Je zwei Halbgeraden haben gleichviele Punkte und es gibt Halbgeraden mit mindestens zwei Punkten. Also umfaßt jede Halbgerade eine weitere Halbgerade als echte Teilmenge.

- Fasteuklidische Geometrien haben mehr als eine Gerade $|G| > 1$.

  Beweis: Für jede Halbgerade $A \subset G$ gibt es genau eine Kongruenz $k \in K$ mit $k \neq \mathrm{id}_X$ und $k(A) = A$. Es folgt $k(G) = G$ und $k^2 = \mathrm{id}_X$. Da für die angeordnete Menge G aus $(k|_G)^2 = \mathrm{id}_G$ folgt $k|_G = \mathrm{id}_G$ und da nach Annahme gilt $k \neq \mathrm{id}_X$, haben wir $G \subsetneq X$.

Motivation

- Beweis von Pythagoras in der Linearen Algebra unbefriedigend.
- Man mag darüber streiten, ob der Begriff einer **Bewegung** oder der des **Abstands** grundlegender ist. Ich plädiere dafür, von Bewegungen auszugehen.
- Ich finde das hier vorgestellte Axiomensystem ebenso elegant wie anschaulich. Es setzt allerdings Kenntnisse über Mengenlehre und Gruppen voraus.

Euklidische Ebene

Eine **euklidische Ebene** ist eine fasteuklidische Geometrie, in der das Parallelenaxiom gilt. Das formale Standardbeispiel ist

X	$= \mathbb{R}^2$
G	die Menge aller affinen Geraden
Z	die beiden offensichtlichen Anordnungen auf jeder Geraden
K	die Gruppe aller Isometrien

Skalarprodukt durch Bewegung

- Gegeben Richtungsvektoren $\vec{v}, \vec{w}$ einer euklidischen Ebene betrachte den Flächeninhalt

$$F(\vec{v}, \vec{w})$$

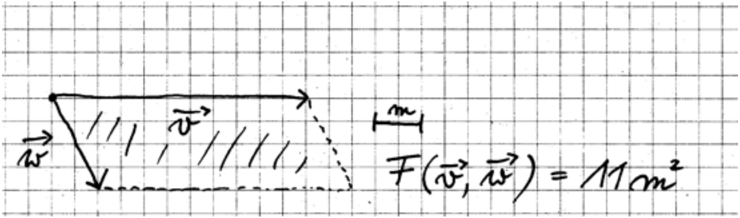
des von ihnen aufgespannten Parallelogramms.

Skalarprodukt durch Bewegung

- Gegeben Richtungsvektoren $\vec{v}, \vec{w}$ einer euklidischen Ebene betrachte den Flächeninhalt

$$F(\vec{v}, \vec{w})$$

des von ihnen aufgespannten Parallelogramms.



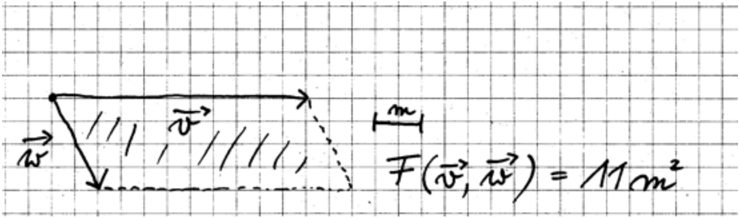
Skalarprodukt durch Bewegung

- Gegeben Richtungsvektoren $\vec{v}, \vec{w}$ einer euklidischen Ebene betrachte den Flächeninhalt

$$F(\vec{v}, \vec{w})$$

  des von ihnen aufgespannten Parallelogramms.
- Bei zusätzlich ausgezeichnetem Drehsinn habe auch den orientierten Flächeninhalt

$$\vec{F}(\vec{v}, \vec{w})$$



Skalarprodukt durch Bewegung

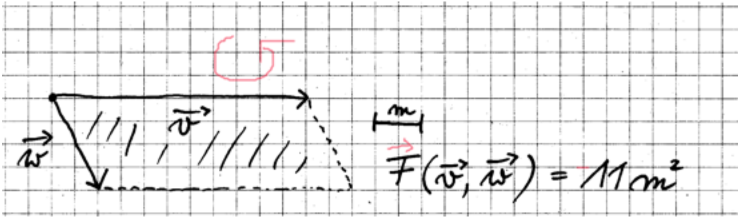
- Gegeben Richtungsvektoren $\vec{v}, \vec{w}$ einer euklidischen Ebene betrachte den Flächeninhalt

$$F(\vec{v}, \vec{w})$$

des von ihnen aufgespannten Parallelogramms.

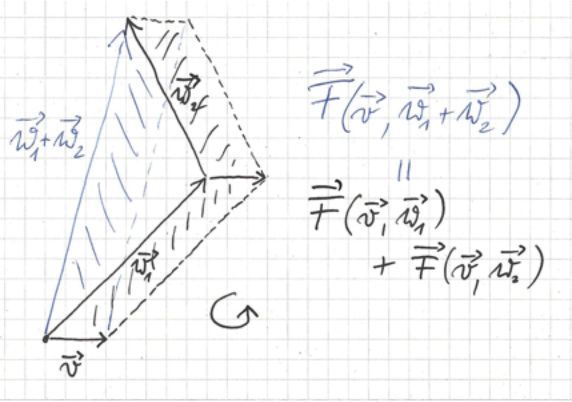
- Bei zusätzlich ausgezeichnetem Drehsinn habe auch den orientierten Flächeninhalt

$$\vec{F}(\vec{v}, \vec{w})$$



- Man prüft, daß der orientierte Flächeninhalt $\vec{F}(\vec{v}, \vec{w})$ bilinear und antisymmetrisch ist.

- Man prüft, daß der orientierte Flächeninhalt $\vec{F}(\vec{v}, \vec{w})$ bilinear und antisymmetrisch ist.

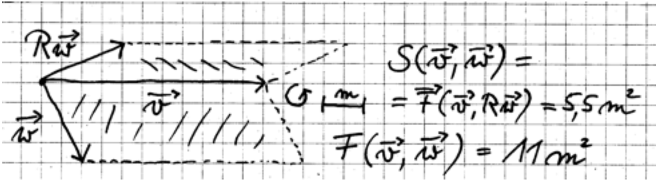


- Nimm Drehung R um positiven rechten Winkel und erkläre das **Skalarprodukt** als die orientierte Fläche

$$S(\vec{v}, \vec{w}) := \vec{F}(\vec{v}, R\vec{w})$$

- Nimm Drehung R um positiven rechten Winkel und erkläre das **Skalarprodukt** als die orientierte Fläche

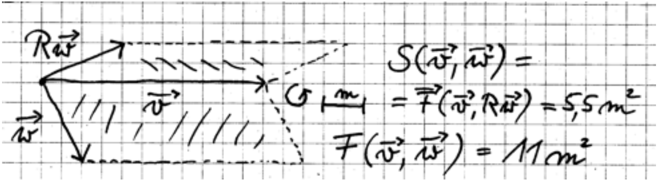
$$S(\vec{v}, \vec{w}) := \vec{F}(\vec{v}, R\vec{w})$$



- Nimm Drehung R um positiven rechten Winkel und erkläre das **Skalarprodukt** als die orientierte Fläche

$$S(\vec{v}, \vec{w}) := \vec{F}(\vec{v}, R\vec{w})$$

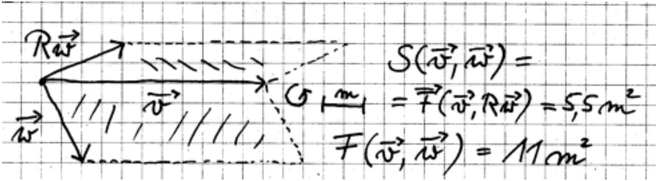
- Bilinear, symmetrisch, unabhängig von Wahl des Drehsinns.



- Nimm Drehung R um positiven rechten Winkel und erkläre das **Skalarprodukt** als die orientierte Fläche

$$S(\vec{v}, \vec{w}) := \vec{F}(\vec{v}, R\vec{w})$$

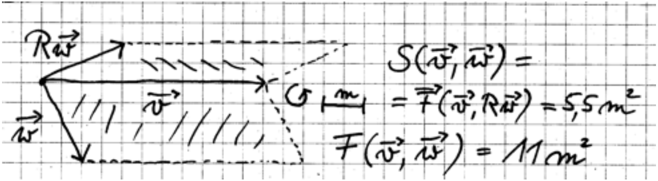
- Bilinear, symmetrisch, unabhängig von Wahl des Drehsinns.
- $S(\vec{v}, \vec{v})$ Fläche von Quadrat mit einer Seite $\vec{v}$.



- Nimm Drehung R um positiven rechten Winkel und erkläre das **Skalarprodukt** als die orientierte Fläche

$$S(\vec{v}, \vec{w}) := \vec{F}(\vec{v}, R\vec{w})$$

- Bilinear, symmetrisch, unabhängig von Wahl des Drehsinns.
- $S(\vec{v}, \vec{v})$ Fläche von Quadrat mit einer Seite $\vec{v}$.
- $S(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ falls $\vec{v} \perp \vec{w}$.

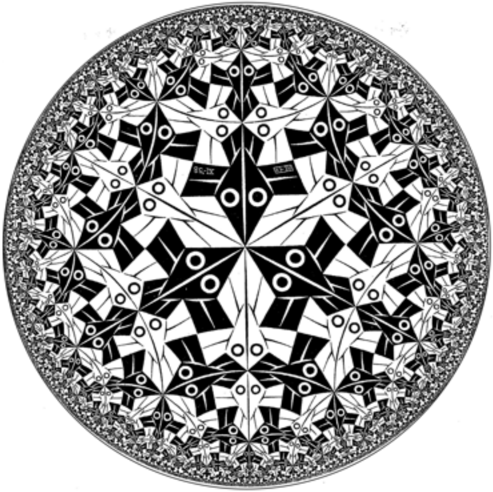


Hyperbolische Ebene

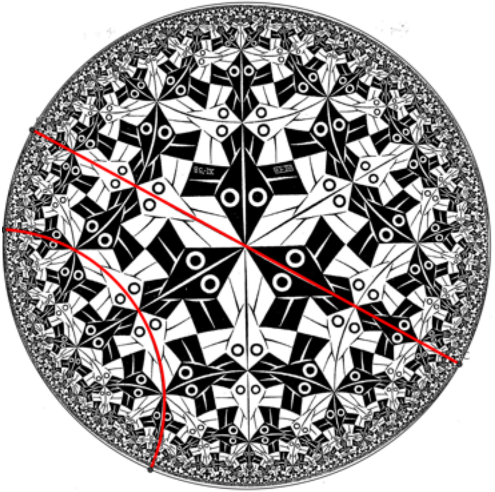
Eine **hyperbolische Ebene** ist eine fasteuklidische Geometrie, in der das Parallelenaxiom nicht gilt. Das formale Standardbeispiel ist

$X = \{z \in \mathbb{C} \mid \lvert z \rvert < 1\}$	die randlose Einheitskreisscheibe
G	alle auf dem Einheitskreis senkrechten Kreissegmente in der Einheitskreisscheibe (und die Geradensegmente durch die Mitte)
Z	die beiden offensichtlichen Anordnungen auf jedem Kreissegment
K	die von allen Kreisspiegelungen an unseren Kreissegmenten $g \in G$ erzeugte Gruppe

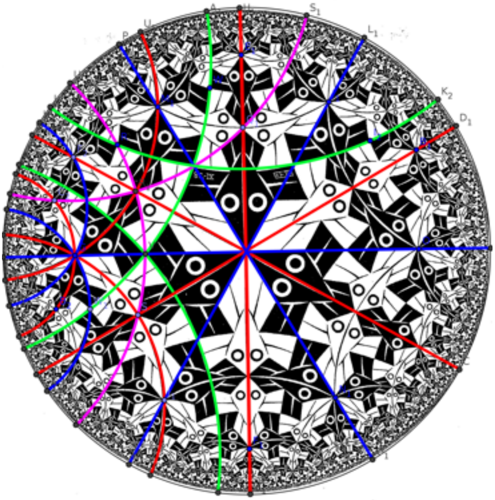
Cirkellimiet 1
Maurice
Cornelius Escher



Zwei
hyperbolische
Geraden



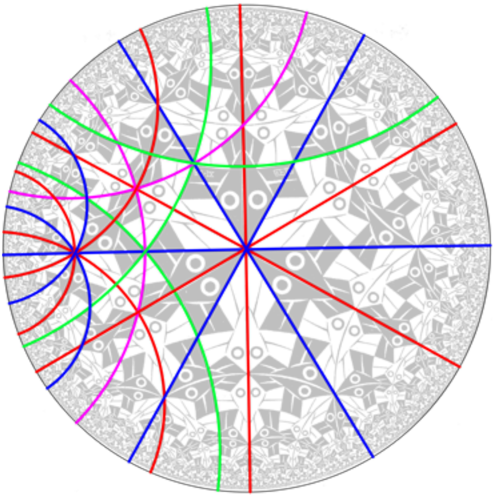
Mehr hyperbolische Geraden



Das System der Geraden einer festen Farbe

(nicht alle sind eingezeichnet)

ist stabil unter Spiegelungen an allen nichtgrünen Geraden



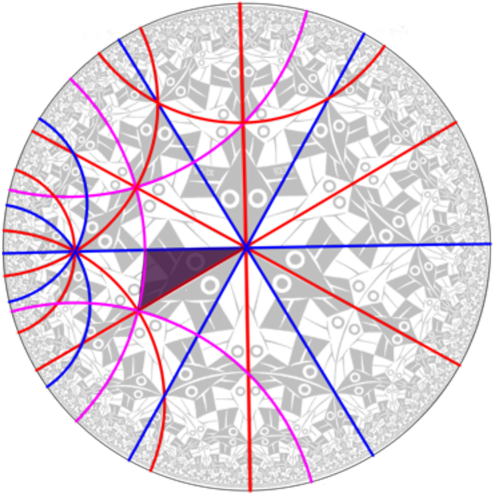
Die von nichtgrünen Spiegelungen erzeugte Untergruppe

$$W \subset K$$

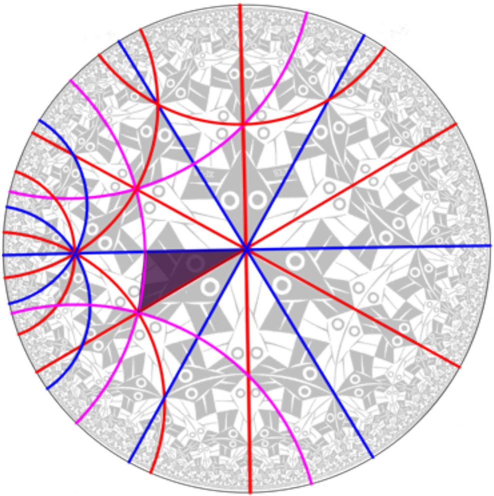
wird auch erzeugt von den drei Spiegelungen

r, b, l

an den Wänden des schwarzen Alkoven.

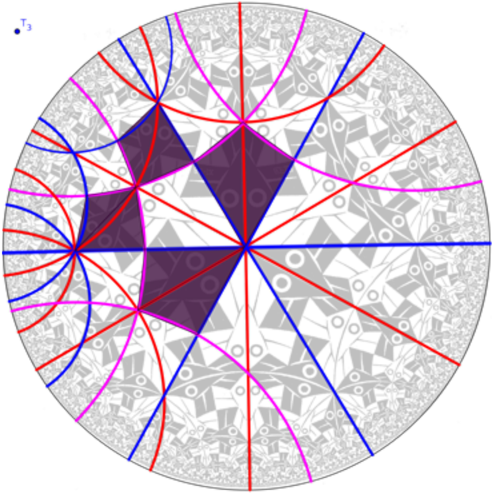


Coxeter: Die Operation von W liefert eine Bijektion zwischen W und der Menge aller Alkoven.

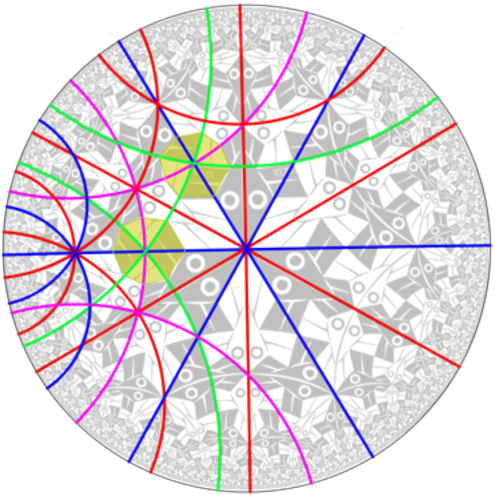


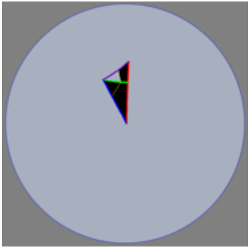
Die Regel
„*r* erhält
Schwarz-Weiß,
b, *l* vertauschen
Schwarz-Weiß“
liefert erste
Annäherung.
Mathematisch
Gruppenhomo-
morphismus

$$W \to \mathcal{S}_2$$

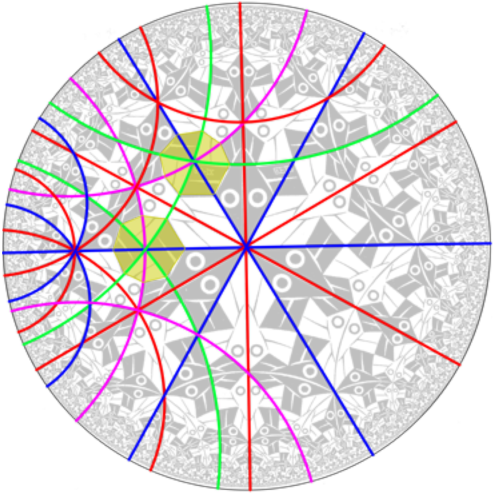


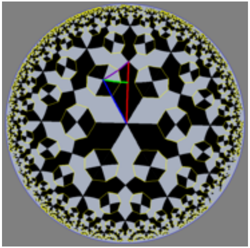
Zeichne mit grünen Geraden die gelben Flossenbereiche ein. Die Vereinigung aller Flossenbereiche ist W-stabil. Auf den Flossenbereichen bleibt Schwarz-Weiß unter ganz W invariant.



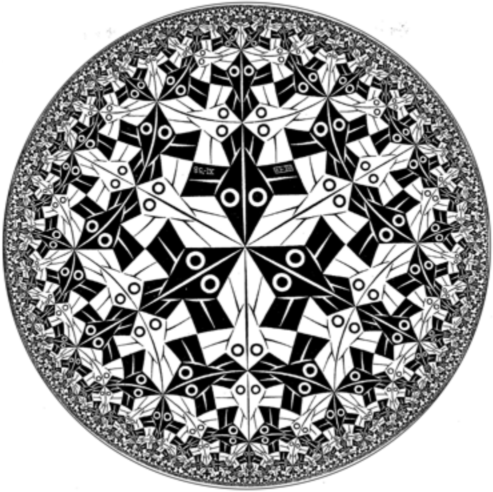


In einem Alkoven Erfindung, Rest Mathe, wenn man alle Fische zu einfarbigen Bereichen vereinfacht.



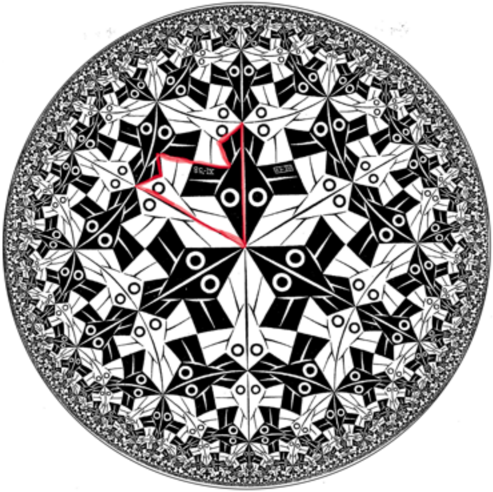


Dank für Hilfe mit Cinderella an PD Dr. Raphael Appenzeller, Universität Heidelberg, Alumnus Kantonsschule Wattwil und ETH Zürich



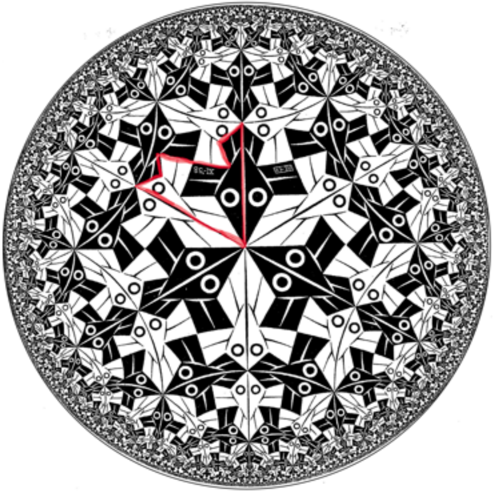
Die strenge Symmetriegruppe ist

$$\ker(W \to \mathcal{S}_2)$$



Die strenge Symmetriegruppe ist

$$\ker(W \to \mathcal{S}_2)$$



Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!