

# Die chaotischen Eigenschaften des logistischen Wachstums

Tag über Mathematik und Unterricht, 10. September 2025

*Hinweis: Ein ausführliches pdf-Dokument mit dem Inhalt dieses Vortrages befindet sich auf der TMU-Webseite. Es enthält weitere Ausführungen, sämtliche Beweise, Beispiele und Übungsaufgaben, sowie Hinweise zu weiterführender Literatur.*

# Der Simulator

Ein Computerprogramm zur Simulation dynamischer Systeme

- *Eine Kurzanleitung zur Installation befindet sich auf der TMU-Webseite*
- Mathematische und technische Dokumentation D/E
- Benutzerhandbuch D/E
- 10 Schulprojekte aufbauend auf dem Simulator (später)

Oder Open Source Quellcode, Voraussetzung:

- MS .NET Framework, Version 8
- Community Version Visual Studio  $\geq 17.14$  (gratis)

Kontakt: [h.biner@bluewin.ch](mailto:h.biner@bluewin.ch)

# Anfänge der Chaostheorie: Das N-Körperproblem



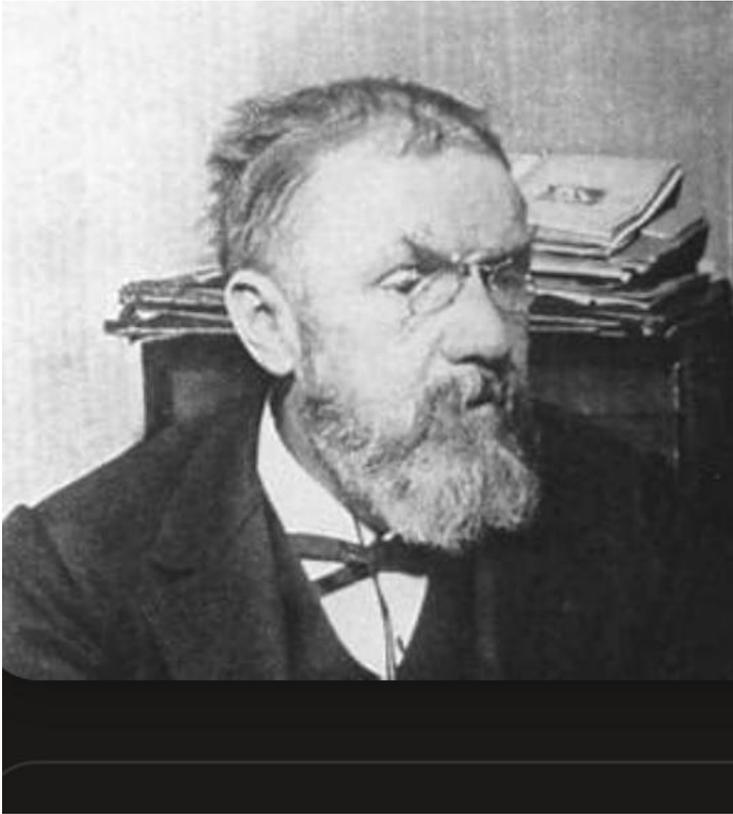
Viele grosse Mathematiker haben sich mit dem Problem befasst.

Der schwedische König Oscar II. 1889

Internationaler Wettbewerb:

Wie bewegen sich  $N > 2$  Himmelskörper, welche sich gegenseitig gemäss Gravitationsgesetz beeinflussen?

# Gewinner: Henri Poincaré (1854 – 1912)



$N=3$ : Es gibt keine allgemeine analytische Lösung! Obwohl das Bewegungsgesetz *einfach* ist, können die Bahnen der Körper *sehr kompliziert* aussehen. Was Poincaré untersuchte, war ein *chaotisches System*.

Es ist nicht prognostizierbar, obwohl es einem Bewegungsgesetz folgt.

*Projekt: Die Planetenbewegung und das Dreikörperproblem (Demo)*

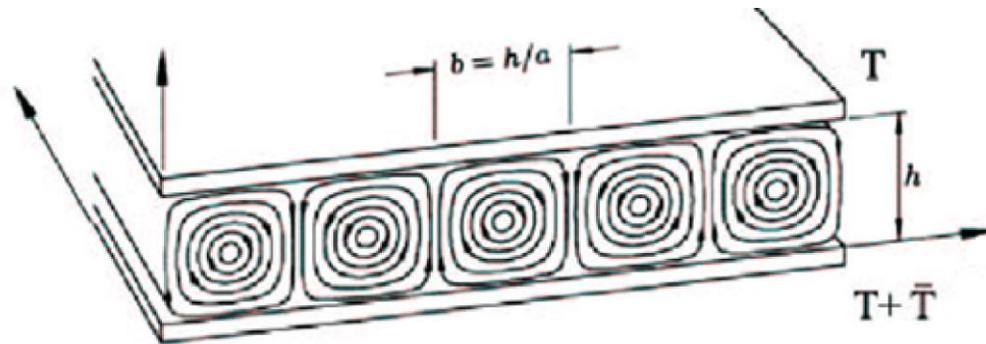
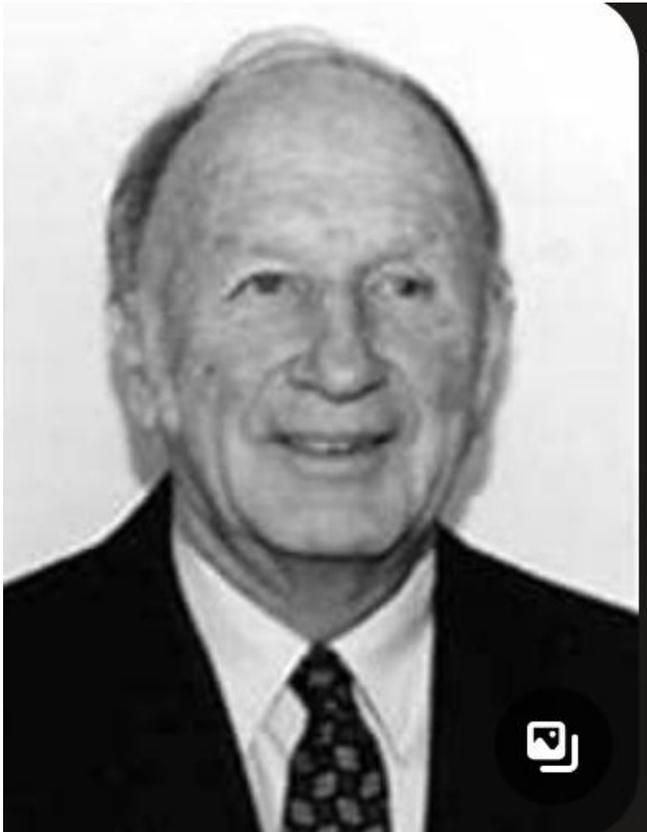
# Simulator: 3 Körper im Universum

The image shows a screenshot of a simulation software interface titled "Universe". The main window displays a black background with three complex, overlapping trajectories in yellow, green, and blue, illustrating chaotic motion. The right-hand side features a control panel with the following sections:

- Universe:** Normiertes Universum (dropdown)
- Konstellation:** IA2 (dropdown), with a "Setze Konstellation" button below.
- Neuer Stern:** Star 1 (dropdown), with a "Neuer Stern" button below.
- Sternfarbe:** Gold (dropdown), with a yellow color swatch.
- Masse:** 1.0000, with a slider below.
- Position:** 0.0000 (x), 0.0000 (y), with input fields.
- Geschwindigkeit:** -0.0307 (x), -0.0126 (y), with input fields and a slider below.
- Speichern:** A button to save the current configuration.
- Anzahl Schritte:** 109800 / 89.56, with "Fortsetzen" and "Stop" buttons below.

# Ein chaotisches Wettermodell

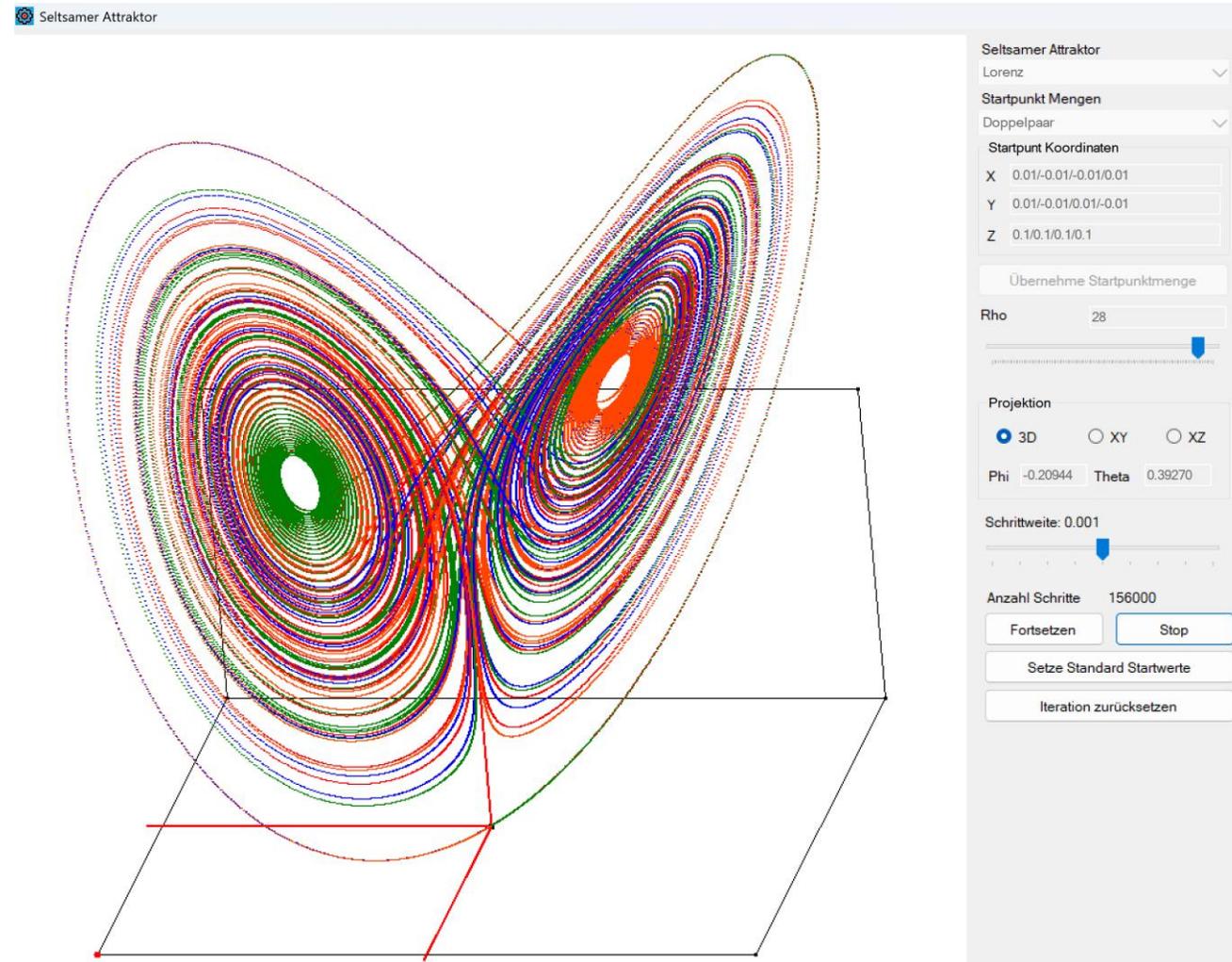
Der Mathematiker Edward Lorenz (1917 – 2008) untersucht 1963 die Konvektionsströmungen in der Atmosphäre mit einem vereinfachten Modell.



$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = \rho x - y - xz \\ \dot{z} = -\beta z + xy \end{cases}$$

*Projekt: Seltsame Attraktoren und die  
Wetterprognose des Edward Lorenz (Demo)*

# Simulator: Der Lorenz-Attraktor



# 1838: Verhulst-Dynamik

Exponentielles Wachstum:  $x_{n+1} = ax_n, x_n \in \mathbb{R}^+, a > 0 \Rightarrow x_n = a^{n-1}x_1$



Pierre-François Verhulst



Pierre-François Verhulst (1804 – 1849) als Alternative:

Logistisches Wachstum (LW):

$$x_{n+1} = f(x_n) = ax_n(1 - x_n), x_n \in [0,1], a > 0$$

$$f'(x) = a(1 - 2x) = 0 \text{ für } x = 0.5 \Rightarrow a \in ]0,4]$$

*(Demo)*

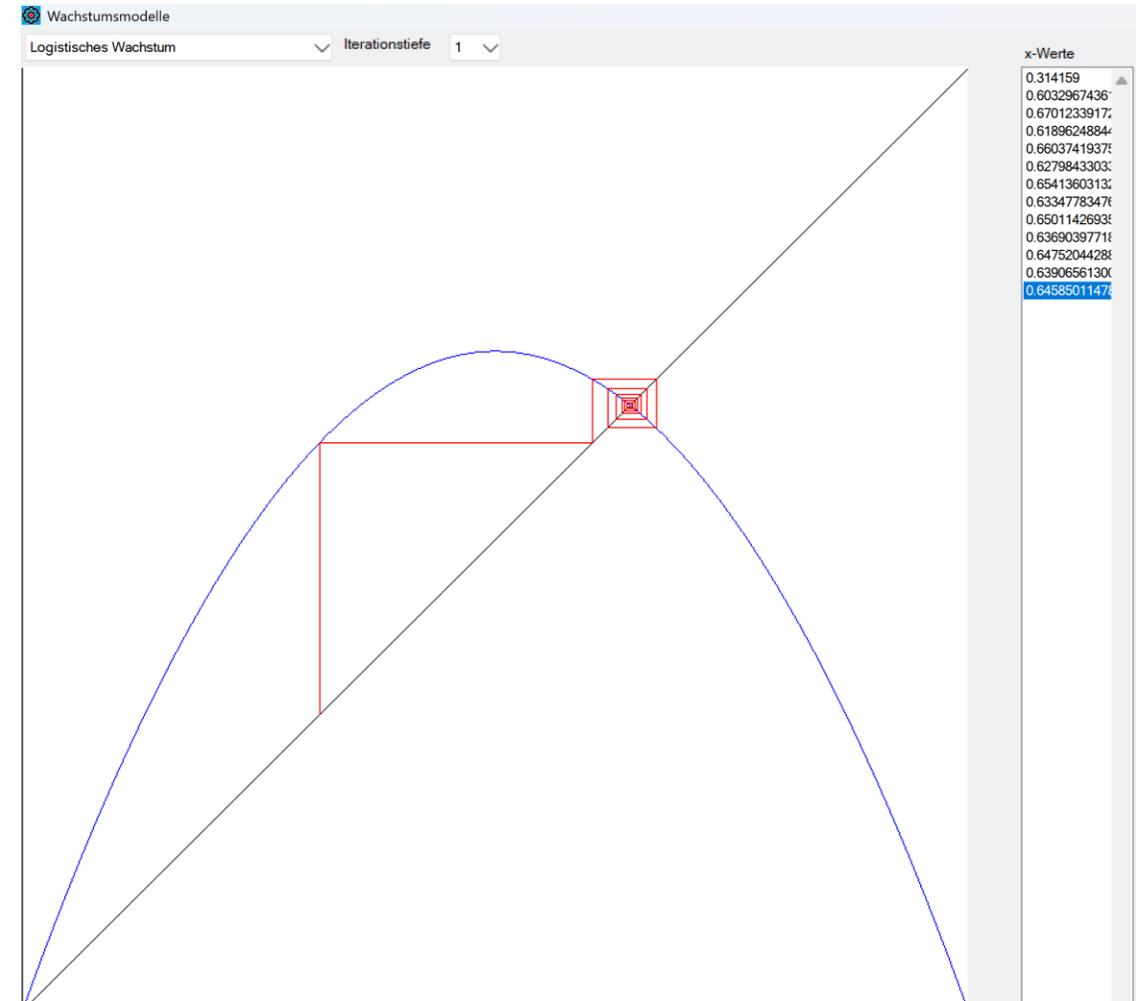
# Fixpunkte bzw. Gleichgewichtslagen

*Fixpunkte* (Gleichgewichtslagen):

$$f(\xi) = a\xi(1 - \xi) = \xi$$

$$\Rightarrow \xi = 0, \xi = 1 - \frac{1}{a}$$

Für  $a = 2.8$  ist  $\xi = 0.6428 \dots$



# Wann ist ein Fixpunkt attraktiv?

Sei  $f(\xi) = \xi$  und  $|f'(\xi)| < 1$

$\Rightarrow \exists L$  mit  $|f'(x)| \leq L < 1$  wenn  $x \in U_\varepsilon(\xi)$

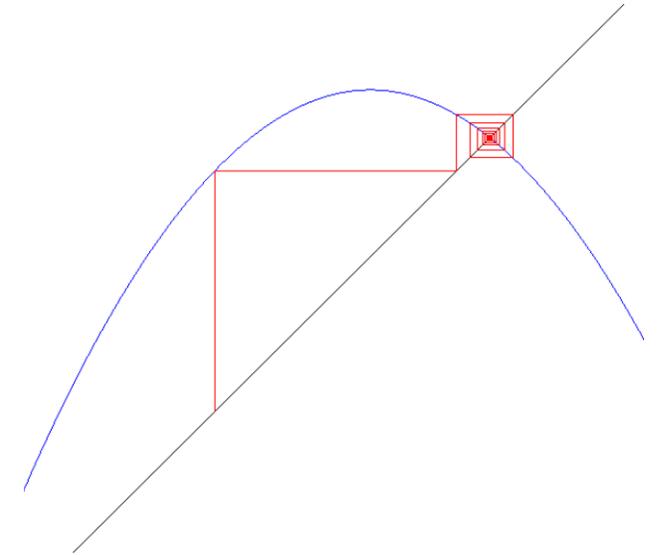
Sei  $x_m \in U_\varepsilon(\xi)$

$$|x_{m+1} - \xi| = |f(x_m) - f(\xi)| = |f'(\eta)| \cdot |x_m - \xi| \leq L|x_m - \xi|, \eta \in U_\varepsilon(\xi)$$

$$|x_{n+m} - \xi| = |f^n(x_m) - f^n(\xi)| \leq L^n|x_m - \xi| \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+m} - \xi| = 0$$

**Satz:** Sei  $f(\xi) = \xi$  und  $|f'(\xi)| < 1 \Leftrightarrow$  Der Fixpunkt  $\xi$  ist ein Attraktor

$\lambda := |f'(\xi)|$  heisst *Multiplikator* des Fixpunktes  $\xi$



# Attraktoren beim LW

Fixpunkte:  $\xi = 0, \xi = 1 - \frac{1}{a}$

$$f'(\xi) = a(1 - 2\xi)$$

$|f'(0)| = a \Rightarrow 0$  ist attraktiv für  $a < 1$

$\left|f'\left(1 - \frac{1}{a}\right)\right| = |2 - a| < 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{a}$  ist attraktiv für  $a \in ]1, 3[$

# Attraktoren werden repulsiv

Was geschieht für  $a > 3$ ? (Demo)

0 und  $1 - \frac{1}{a}$  werden repulsiv

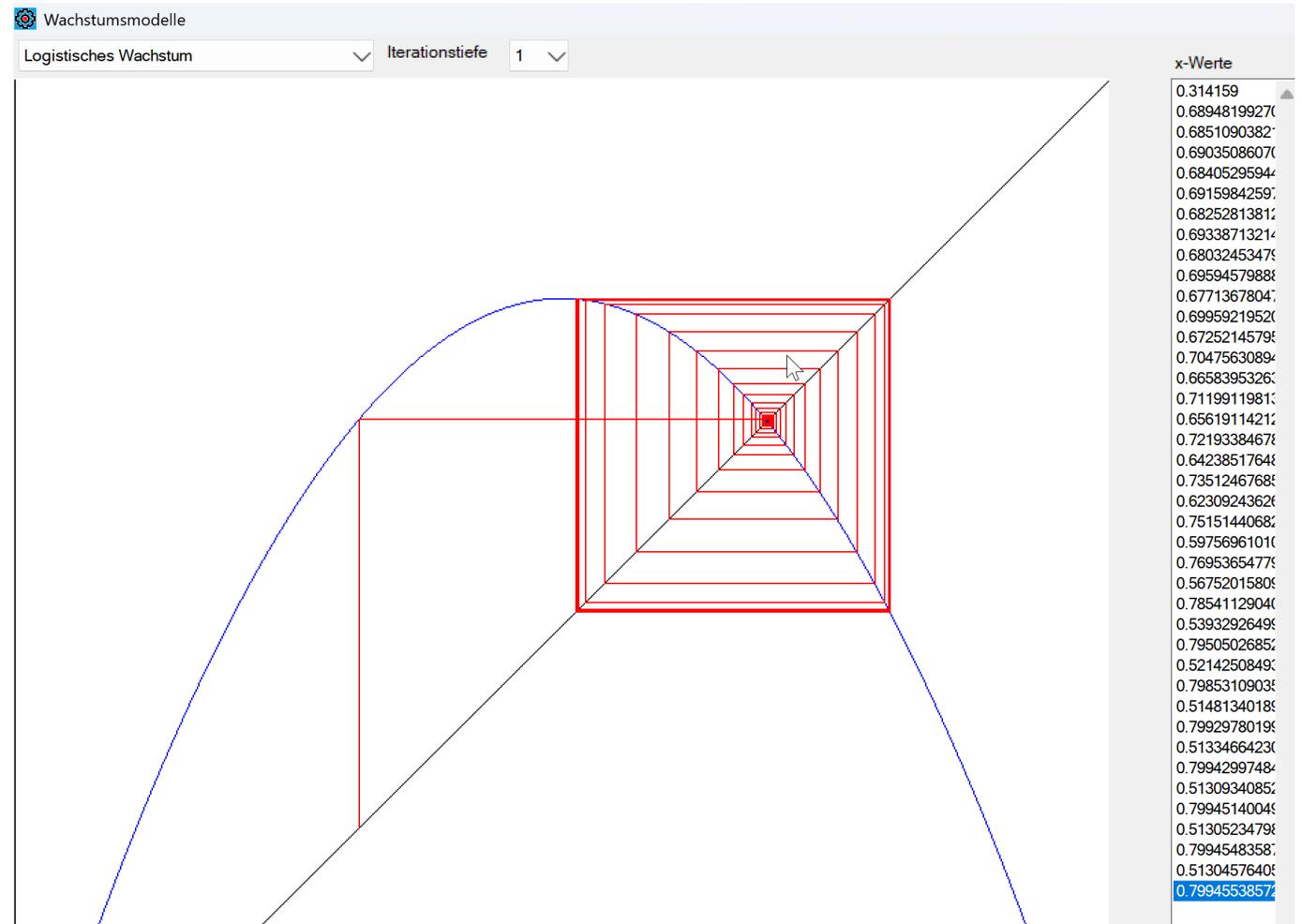
Offenbar gibt es einen attraktiven

2-Zyklus:

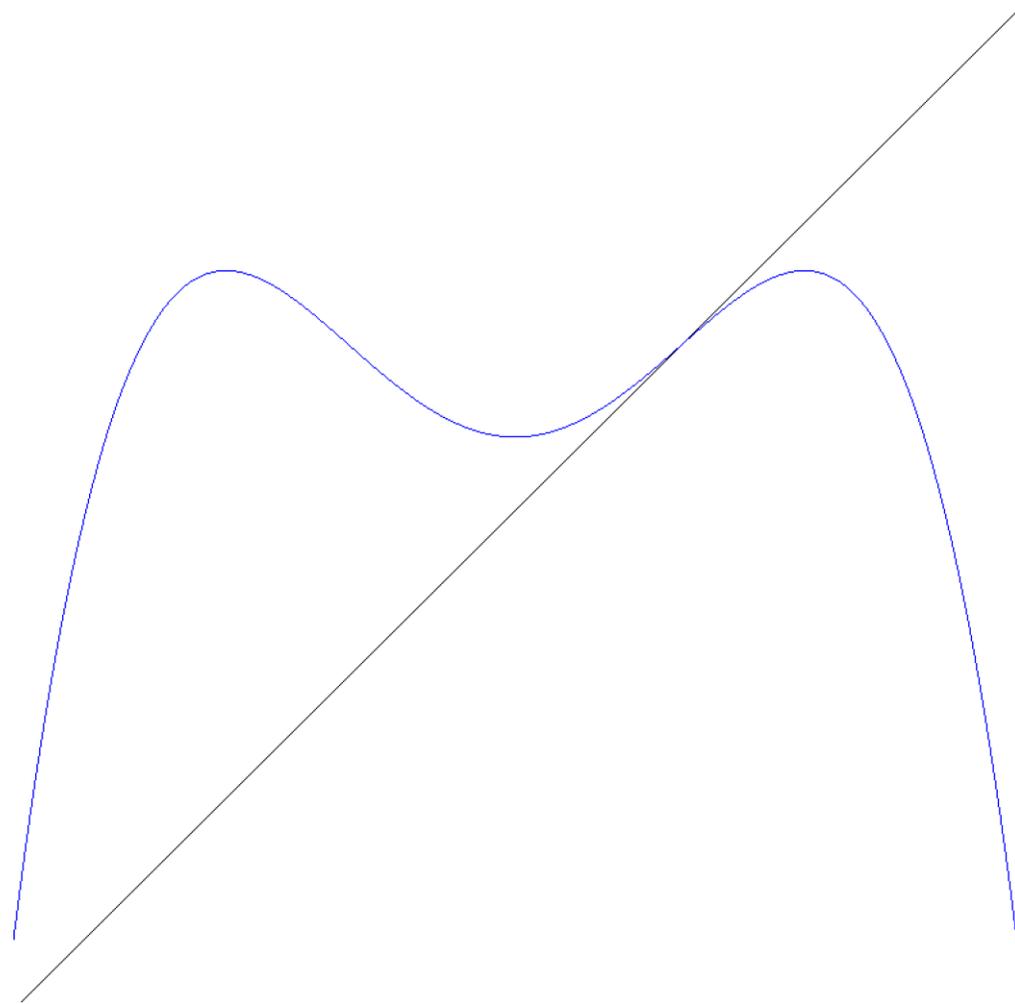
$$f(\xi_1) = \xi_2, f(\xi_2) = \xi_1$$

$$f^2(\xi_i) = \xi_i$$

(Demo)



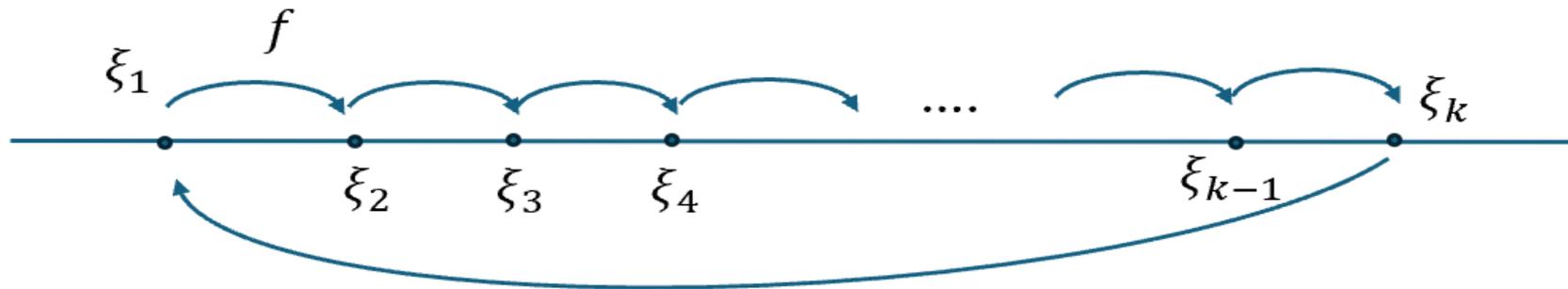
# Übergang zu einem attraktiven 2-Zyklus



# Zyklen

$\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k\}$  ist ein  $k$ -Zyklus  $\Leftrightarrow f(\xi_i) = \xi_{i+1}, i < k$  und  $f(\xi_k) = \xi_1$

$$f^k(\xi_i) = \xi_i, \forall i$$



$$|f^{k'}(\xi_i)| = \left| f' \left( f^{k-1}(\xi_i) \right) \cdot f' \left( f^{k-2}(\xi_i) \right) \cdot \dots \cdot f'(\xi_i) \right| = \prod_{i=1..k} |f'(\xi_i)|$$

Ist dieses Produkt  $< 1$ , dann ist der Zyklus *attraktiv*.

# 2-Zyklen beim LW

$f^2(\xi) = \xi$ , Gleichung vierten Grades.  $\xi_1 = 0, \xi_2 = 1 - \frac{1}{a}$

Direkter Ansatz 2-Zyklus: 
$$\begin{cases} \xi_3 = f(\xi_4) = a\xi_4(1 - \xi_4) \\ \xi_4 = f(\xi_3) = a\xi_3(1 - \xi_3) \end{cases}$$

$$\xi_3 - \xi_4 = -a(\xi_3 - \xi_4) + a(\xi_3^2 - \xi_4^2), \quad \xi_3 \neq \xi_4$$

$$1 = -a + a(\xi_3 + \xi_4) \Rightarrow \xi_4 = \frac{1}{a} + 1 - \xi_3$$

$$\xi_{3,4} = \frac{1 + a \pm \sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a}$$

## 2-Zyklus attraktiv?

$$\xi_{3,4} = \frac{1 + a \pm \sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a} \Rightarrow a > 3$$

$$|f'(\xi_3)f'(\xi_4)| = |a(1 - 2\xi_3) \cdot a(1 - 2\xi_4)| < 1$$

$$|a^2 - 2a - 4| < 1$$

Nullstellen:  $a = 1 \pm \sqrt{6}$ ,  $a \approx 3.449 \dots$

Der 2-Zyklus ist attraktiv für  $a \in ]3, 3.449 \dots [$

# Gibt es mehrere attraktive Zyklen?

Wie viele attraktive Zyklen kann es für ein bestimmtes  $a \in ]0,4]$  geben?

Kann es sein, dass man je nach Startpunkt bei unterschiedlichen Zyklen landet?

*(Demo)*

# *Bassin* eines Attraktors

Sei  $\xi$  ein Attraktor von  $f$

Frage: Welche Startpunkte landen bei  $\xi$ ?

$\mathcal{B}(\xi) := \{x \in X: \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \xi\}$  heisst *Bassin von  $\xi$*

Beispiel:  $a = 2.8$ , Attraktor  $\xi = 0.6428 \dots$

$\mathcal{B}(\xi) = ]0,1[$

# Die Rolle des kritischen Punktes

## Satz

Sei  $f$  das LW.  $\xi$  ein  $k$ -Zyklus von  $f$ . Sei  $c$  der kritische Punkt von  $f$ , d.h.  $f'(c) = 0$ .

Behauptung:  $c \in \mathcal{B}(\xi)$

*Bemerkung:*  $f'(c) = a(1 - 2c) = 0 \Leftrightarrow c = 0.5 \Rightarrow$  es gibt nur *einen* kritischen Punkt!

*Beweis:* Siehe pdf-Dokumentation

# Anzahl attraktiver Zyklen beim LW?

Der kritische Punkt ist der ideale Startwert, um attraktive Zyklen zu finden

Das LW hat nur *einen* kritischen Punkt  $\Rightarrow$

Es gibt *höchstens einen* attraktiven Zyklus für das LW!

# Der Fall $a = 4$

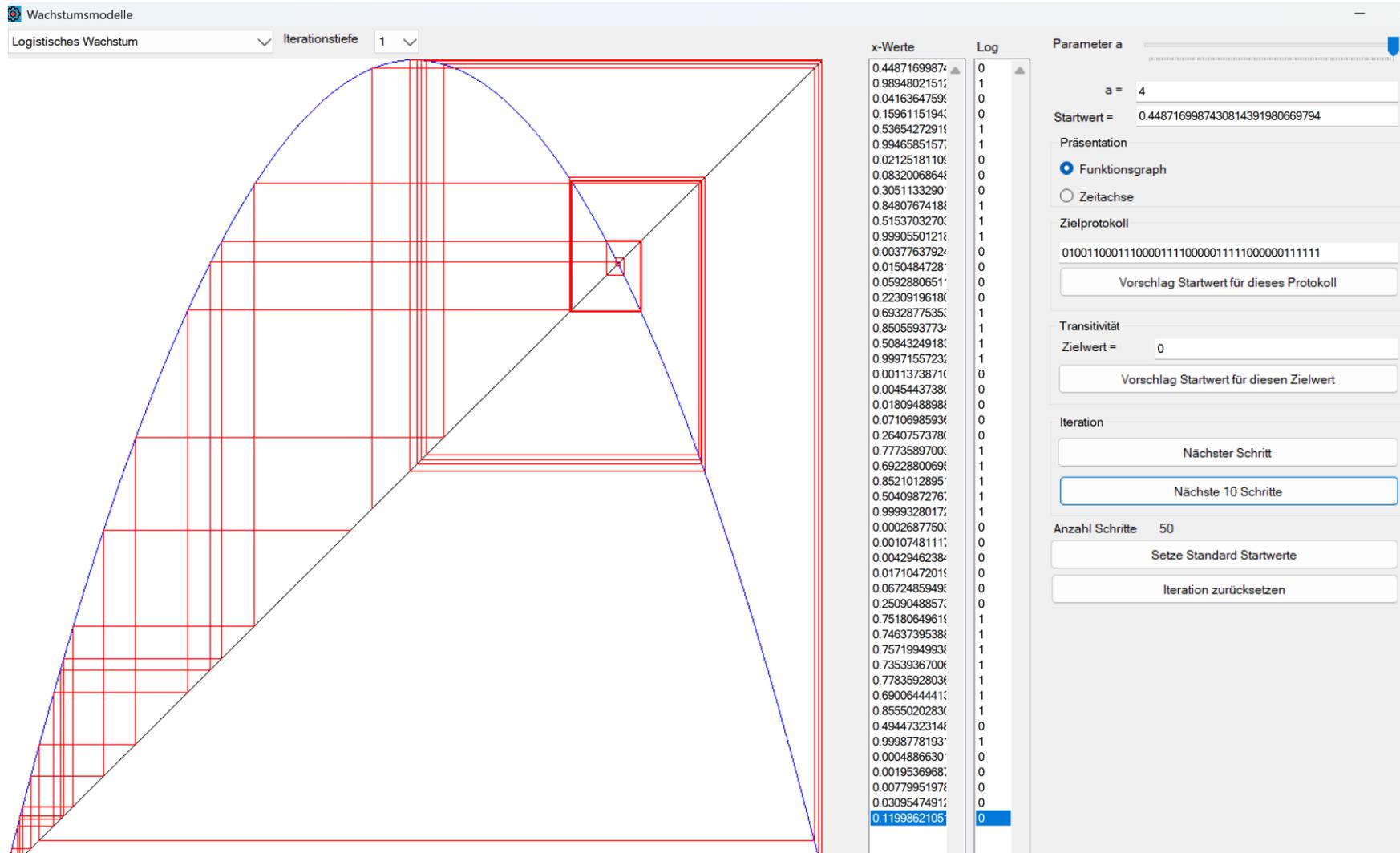
$$f(x) = 4x(1 - x)$$

$$f(0.5) = 1 \text{ und } f(1) = 0$$

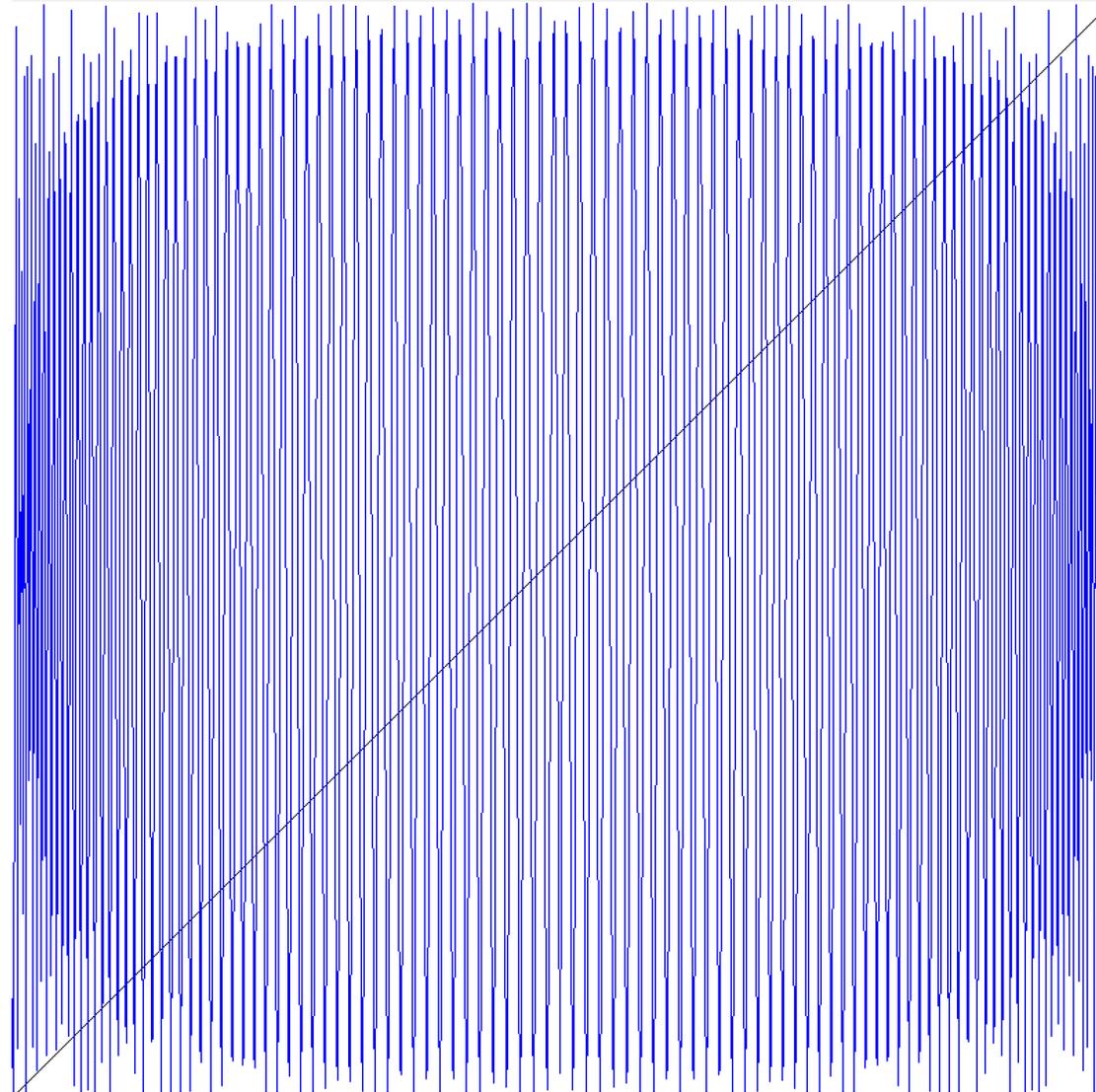
Aber 0 ist repulsiv!

Der kritische Punkt fällt auf einen Repellor  $\Rightarrow$   $\nexists$  attraktiver Zyklus (*Demo*)

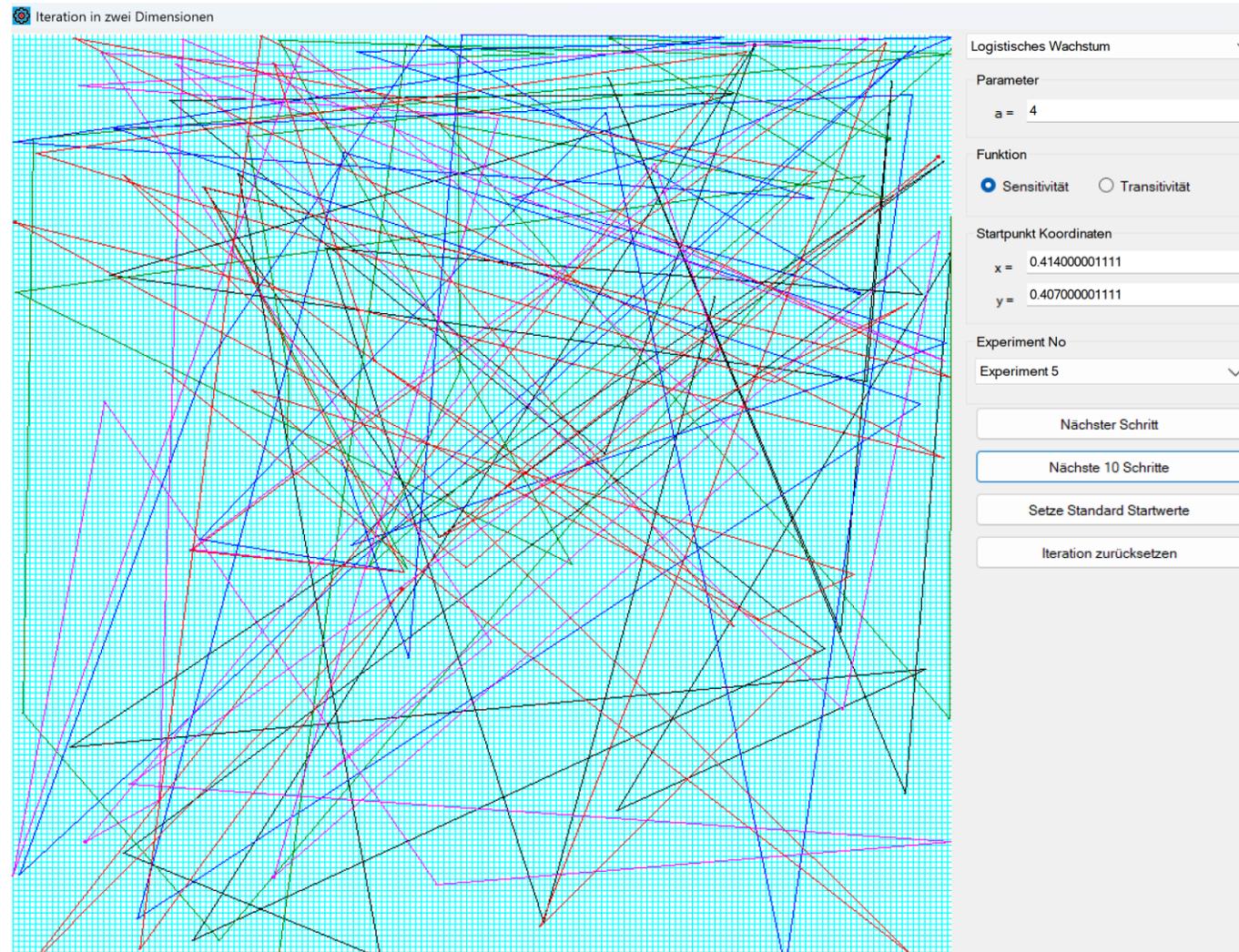
# Jedes Protokoll ist möglich



# Die Repellenen liegen dicht in $X$



# Sensitivität



# Definition eines chaotischen Systems

1989: Robert Devaney (1948 ...)



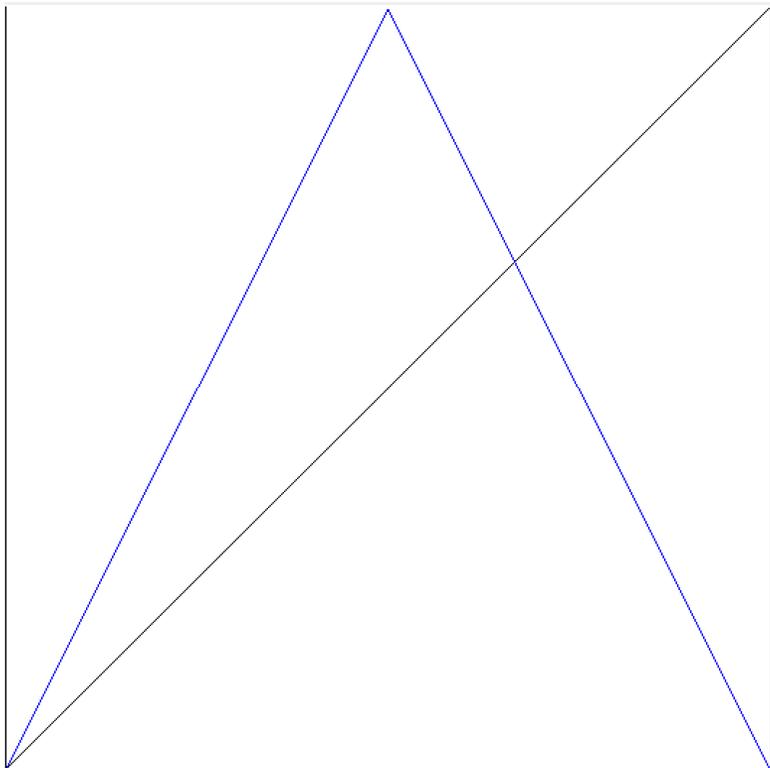
Das System folgt einem Bewegungsgesetz!

Chaotische Eigenschaften:

- Die Repellen liegen *dicht* im Zustandsraum.
- *Sensitivität* bei Änderungen des Startwertes
- *Transitivität*: Jeder Systemzustand kann ausgehend von jeder Startwertumgebung beliebig genau angenommen werden
- $\Rightarrow$  Das System ist *nicht prognostizierbar*

# Die Zeltabbildung

$$z: [0,1] \rightarrow [0,1], z(u) = \begin{cases} 2u, & u \in [0, 0.5[ \\ 2(1-u), & u \in [0.5, 1] \end{cases}$$



Im Dualsystem:

$$z: \begin{cases} 0.s_2s_3s_4s_5 \dots \rightarrow 0.s_2s_3s_4s_5 \dots \\ 0.1s_2s_3s_4s_5 \dots \rightarrow 0.\bar{s}_2\bar{s}_3\bar{s}_4\bar{s}_5 \dots \end{cases}$$

Multiplikator =  $2^n \Rightarrow$

Allfällige Zyklen sind repulsiv!

∄ attraktive Zyklen (*Demo*)

# Die Zeltabbildung ist chaotisch:

Es gibt Zyklen jeder Periode. Diese liegen dicht in  $[0, 1]$  und sind alle repulsiv.

Periodischer  $k$ -Zyklus:

$$0.s_1s_2s_3 \dots s_k(1) s_1s_2s_3 \dots s_k(1)$$

Sensitivität:

Wähle z.B. Startwerte  $0.s_1s_2s_3 \dots s_k s_{k+1} s_{k+2} \dots$

und  $0.s_1s_2s_3 \dots (1) \bar{s}_k \bar{s}_{k+1} \bar{s}_{k+2} \dots$

Transitivität:

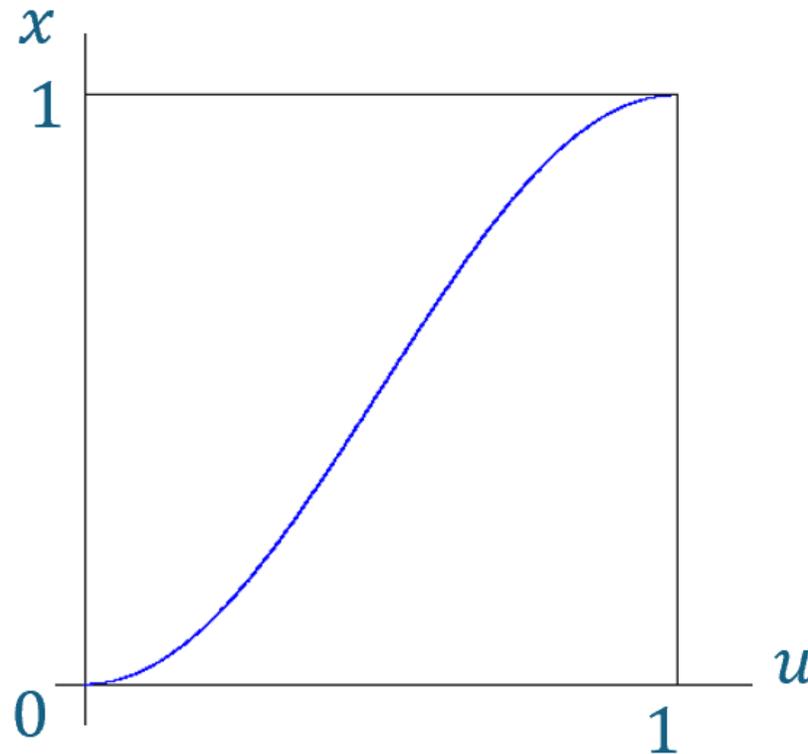
Sei Startwert  $0.s_1s_2s_3 \dots$  Sei Zielwert:  $0.t_1t_2t_3 \dots$

Wähle neuen Startwert:  $0.s_1s_2s_3 \dots (1) t_1t_2t_3 \dots$

# Das LW und die Zeltabbildung

Betrachte die Transformation:

$$T: [0,1] \rightarrow [0,1], x = T(u) = \sin^2 \frac{\pi}{2} u$$



# Angewandt auf das LW für $a = 4$

Sei  $f(x) = 4x(1 - x)$ ,  $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$  und  $z$  die Zeltabbildung

$$\begin{aligned} (f \circ T)(u) &= \\ f\left(\sin^2 \frac{\pi}{2} u\right) &= 4\sin^2 \frac{\pi}{2} u \left(1 - \sin^2 \frac{\pi}{2} u\right) = (2\sin \frac{\pi}{2} u \cdot \cos \frac{\pi}{2} u)^2 = \sin^2 \frac{\pi}{2} \cdot 2u \\ &= \begin{cases} \sin^2 \frac{\pi}{2} \cdot 2u, u \in [0, 0.5[ \\ \sin^2\left(\pi - \frac{\pi}{2} \cdot 2u\right), u \in [0.5, 1] \end{cases} = \begin{cases} \sin^2 \frac{\pi}{2} \cdot 2u, u \in [0, 0.5[ \\ \sin^2 \frac{\pi}{2} \cdot 2(1 - u), u \in [0.5, 1] \end{cases} = (T \circ z)(u) \end{aligned}$$

Beachte:  $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$

# Das LW ist eine Konjugierte der Zeltabbildung

$$f = T \circ z \circ T^{-1}: [0,1] \rightarrow [0,1]$$

$$f^n = (TzT^{-1}) \circ (TzT^{-1}) \dots (TzT^{-1}) = Tz^nT^{-1}$$

$f^n$  ist eine Konjugierte von  $z^n$

$\zeta$  ein Zyklus von  $z \Leftrightarrow \xi = T(\zeta)$  ein Zyklus von  $f$

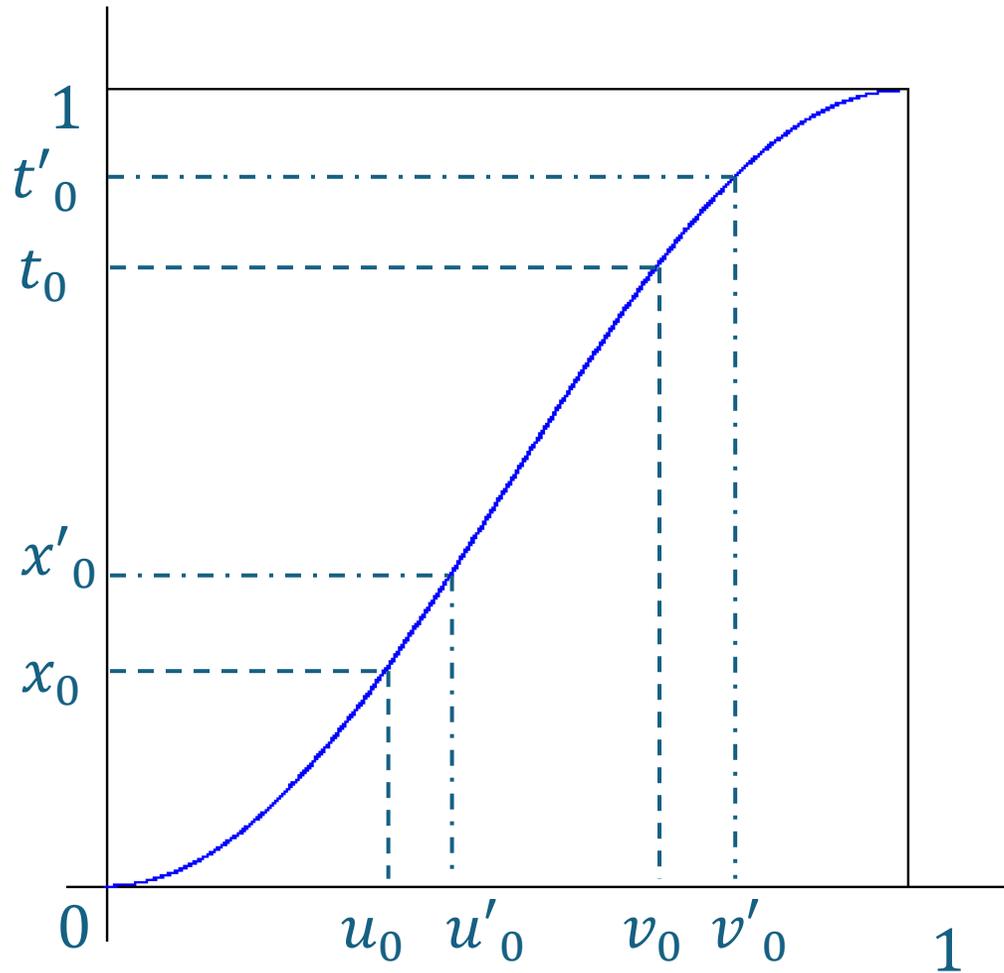
Sei  $\zeta = z^n(\zeta)$  und  $\xi = T(\zeta)$ . Dann folgt:  $f^n(\xi) = Tz^nT^{-1}(\xi) = Tz^n(\zeta) = T(\zeta) = \xi$

Sei  $f^n(\xi) = \xi$  und  $\xi = T(\zeta)$ . Dann folgt:  $z^n(\zeta) = T^{-1}f^nT(\zeta) = Tf^n(\xi) = T(\xi) = \zeta$

$$|f^{n'}(\xi)| = \left| \underbrace{T'(z^nT^{-1}(\xi))}_{\zeta} \cdot z^{n'}(\zeta) \cdot \frac{1}{T'(\zeta)} \right| = |z^{n'}(\zeta)|$$

$\zeta, \xi$  haben denselben Multiplikator  $\Rightarrow$  attraktiv/repulsiv wird übertragen!

# Die chaotischen Eigenschaften übertragen sich



Beispiel: Transitivität

Gegeben: Startpunkt  $x_0$  und Zielpunkt  $t_0$  für  $f$

$\Rightarrow$  Startpunkt  $u_0$  und Zielpunkt  $v_0$  für  $z$

$\Rightarrow$  Startpunkt  $u'_0 \approx u_0$  mit Zielpunkt  $v'_0 \approx v_0$

$\Rightarrow$  Startpunkt  $x'_0 \approx x_0$  mit Zielpunkt  $t'_0 \approx t_0$

Folgerung: **Das LW ist für  $a = 4$  chaotisch!**

# Zyklen des LW im Fall $a = 4$

## Satz

Sei  $f$  das LW mit  $a = 4$  und  $n$  eine Primzahl.

Behauptung:

Es gibt  $(2^n - 2)/n$  echte Zyklen der Länge  $n$

Beweisskizze:

Zeige mit vollständiger Induktion: Es gibt  $2^n$  Schnittpunkte von  $z^n$  mit der  $45^\circ$  Geraden  
 $\Rightarrow$  es gibt  $2^n$  Punkte, welche zu einem Zyklus gehören. 2 davon sind Fixpunkte.

Sei  $f^p(\xi) = \xi$  mit  $p < n$  und  $f^n(\xi) = \xi \Rightarrow p/n$ , aber  $n$  eine Primzahl

# Explizite Berechnung der Zyklen

## Satz

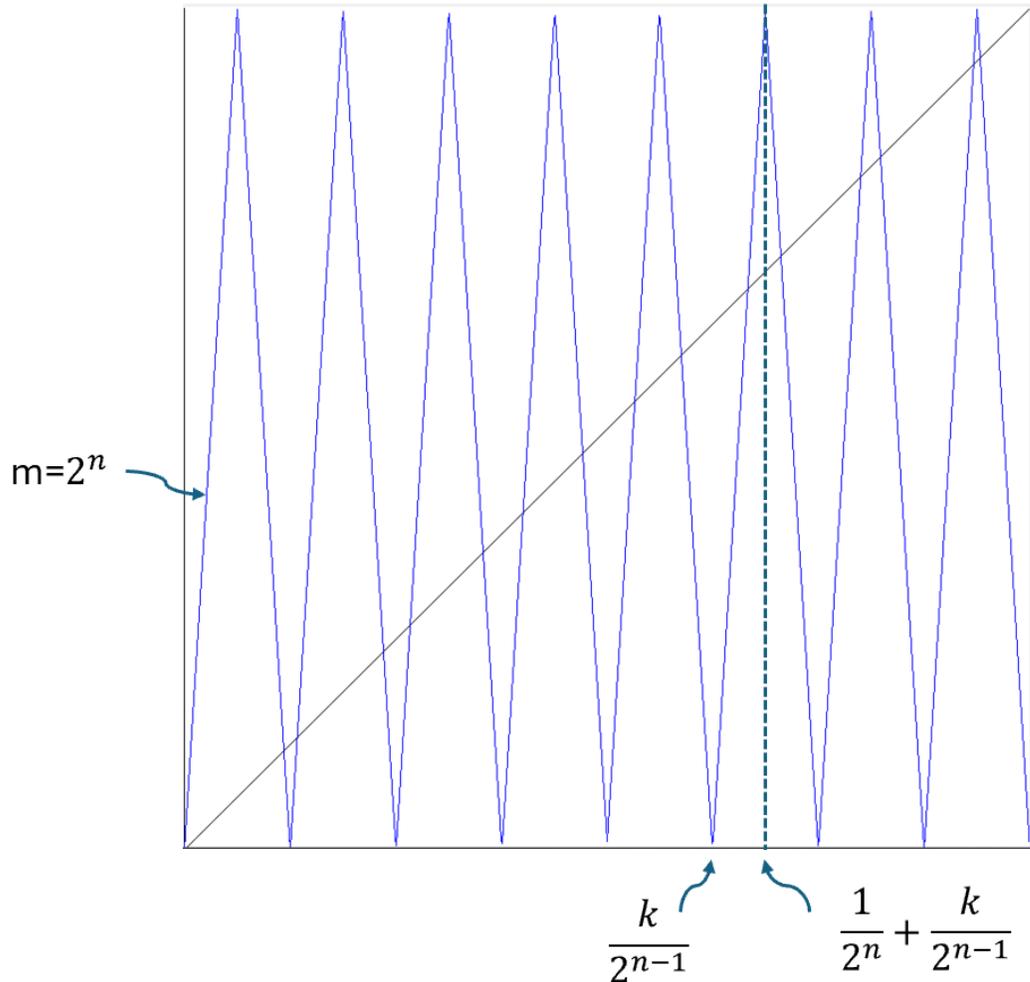
Sei  $f$  das LW mit  $a = 4$ .

Behauptung:

Sämtliche Zyklen haben die Form  $\xi = \sin^2 \frac{\pi k}{2^{n-1}}$  oder  $\xi = \sin^2 \frac{\pi(k+1)}{2^{n+1}}$

Für  $k = 0, \dots, 2^{n-1} - 1$

# Beweis: Zeltabbildung



$$k = 0, \dots, 2^{n-1} - 1$$

Geraden mit positiver Steigung:  $y = 2^n x - 2k,$

Schnittpunkte mit 45° Geraden:  $\xi = \frac{2k}{2^n - 1}$

Geraden mit negativer Steigung:

$$y = -2^n x + 2(k + 1)$$

Schnittpunkte mit 45° Geraden:  $\xi = \frac{2(k+1)}{2^n + 1}$

Das liefert sämtliche Zyklen der Zeltabbildung!

Dann: Konjugation.

# Ausblick

- Periodenverdoppelung
- Weitere Funktionen des Simulators

# Schulprojekte zum Simulator

- **Die chaotischen Eigenschaften des logistischen Wachstums**
- **Der ovale Billardtisch und periodische Bahnen**
- Newton Iteration und die komplexen Einheitswurzeln
- Iteration quadratischer Funktionen in der komplexen Ebene
- Numerische Methoden und gekoppelte Pendel
- Die Planetenbewegung und das Dreikörperproblem
- **Seltsame Attraktoren und die Wetterprognose von Edward Lorenz**
- Fraktale Mengen und Lindenmayer-Systeme
- Zur Geschichte der Chaostheorie
- Programmierung eigener dynamischer Systeme im Simulator

**Danke!**