

Experimente im MU

Jochen Kalser

10. September 2025



KANTONSSCHULE AM BURGGRABEN

Experimente zur Bereicherung des Mathematik-Unterrichts

In diesem Workshop werden einige Experimente vorgestellt, die sich **mit elementaren Hilfsmitteln** durchführen lassen und den Mathematik-Unterricht bereichern können.

Die Versuche sind so gewählt, dass sie die am Gymnasium behandelten Funktionstypen **von der Einführung des Funktionsbegriffs bis zu Anwendungen in der Analysis** verdeutlichen.

Auch wird exemplarisch aufgezeigt, wie sich **Smartphones als mobile Labore** verwenden lassen. Optimalerweise installieren Teilnehmende hierzu vorab die App `phyphox` der RWTH Aachen (abgerufen am 28.07.2025) auf ihren Smartphones. Anhand der Messdaten verschiedener Smartphones können dann weitere statistische Überlegungen in die Analyse einfließen.

1 Bewegungsdiagramme als Eier-legende-Woll-Milch-Säue

- v - t -Diagramm mit phyphox
- s - t -Diagramm mit elementaren Mitteln

2 Experimente zu spezifischen Funktionstypen

- Lineare Funktion
- Quadratische Funktion
- Exponentialfunktion
- Logarithmusfunktion
- Trigonometrische Funktionen

3 Weitere Experimente mit phyphox

- Winkelmessung
- Messung der Schallgeschwindigkeit
- Stosszahl bei teilelastischem Stoss

v-t-Diagramm mit phyphox - Material und Quellen

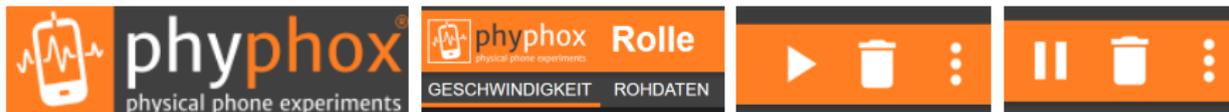
Smartphone mit phyphox, Kartonrolle, Schaumstoffschnipsel, Zollstock, Brett oder Tisch, Untersetzer, Notebook



Wiki-Eintrag ([phyphox.org](https://www.phyphox.org), abgerufen am 28.07.2025)

Video-Anleitung ([phyphox, YouTube.com](https://www.youtube.com), abgerufen am 28.07.2025)

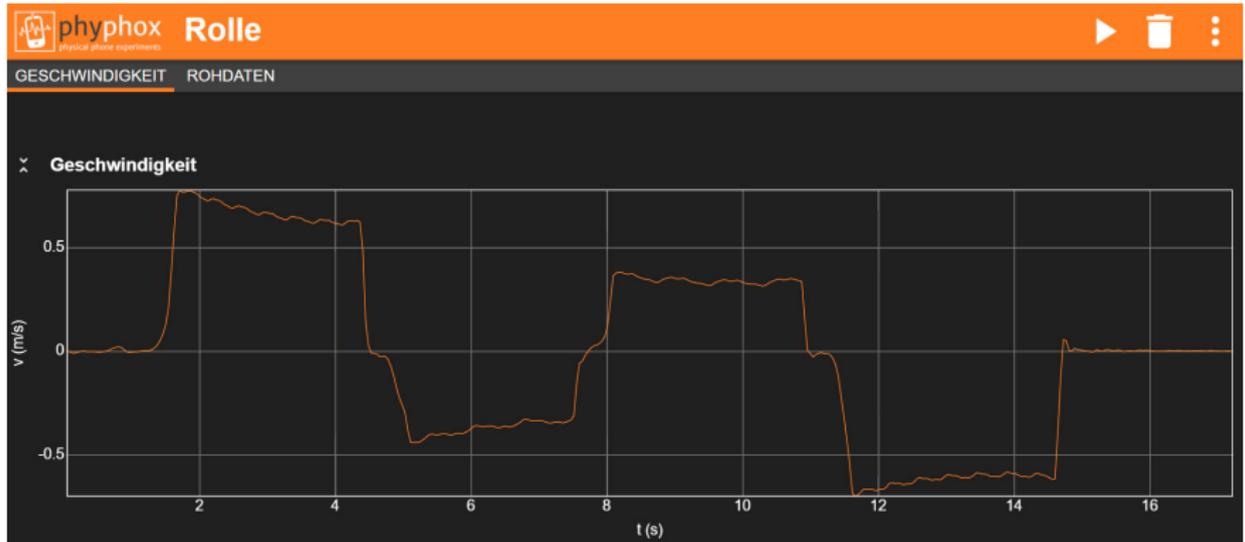
v-t-Diagramm mit phyphox - Vorbereitung



- 1 phyphox auf Smartphone installieren
- 2 Mobile Hotspot auf Smartphone aktivieren und WLAN des Notebooks mit mobile Hotspot verbinden
- 3 App phyphox starten, Experiment Rolle unter Mechanik aufrufen sowie Rollenradius messen und eingeben
- 4 Fernzugriff unter vertikalen Punkten erlauben sowie Browser öffnen und URL eingeben
Für den Fernzugriff müssen Smartphone und Notebook im gleichen Netzwerk sein!
Schulnetze lassen den Fernzugriff nicht zu, weshalb der Hotspot benötigt wird.
- 5 Smartphone mit Schaumstoffschnipseln in der Kartonrolle fixieren
- 6 Aufzeichnung durch Klicken auf Dreieck im Browser starten und durch Klicken auf Doppelbalken stoppen

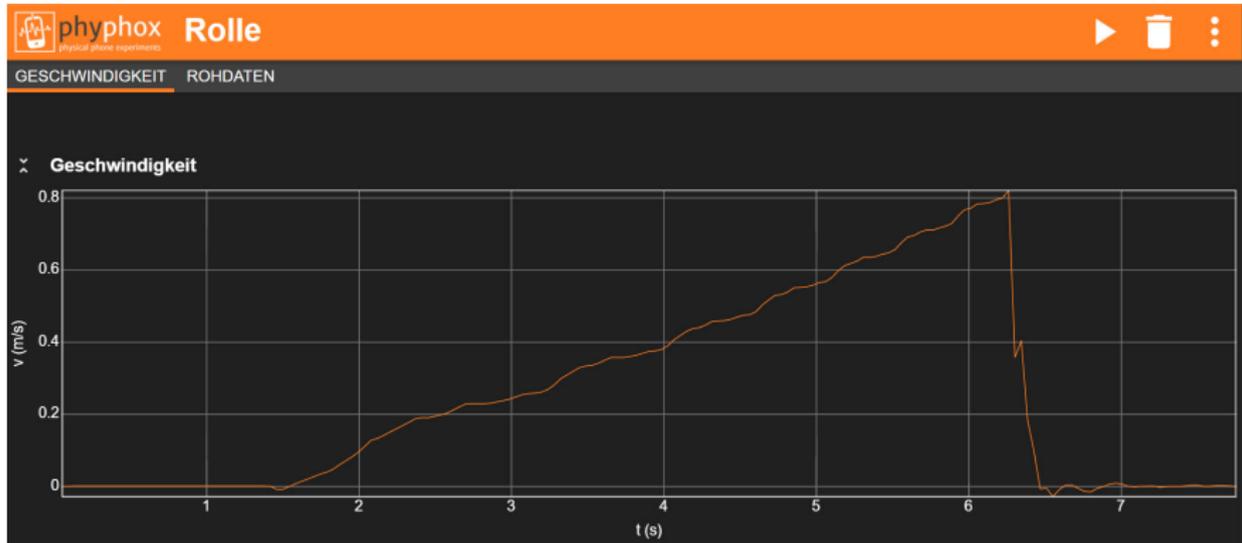
v-t-Diagramm mit phyphox - Beispiel 1

Abschnittsweise gleichförmige Bewegungen mit Vorzeichenwechseln der Geschwindigkeit für Interpretation der gerichteten Rechteckflächen



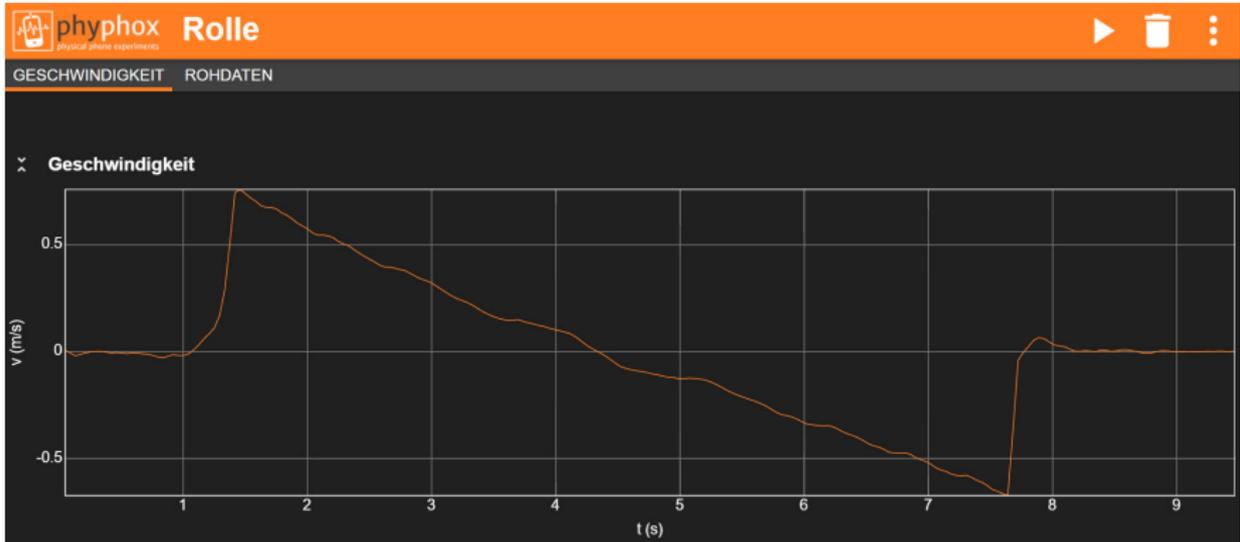
v - t -Diagramm mit phyphox - Beispiel 2

Gleichmässig (positiv) beschleunigte Bewegung ohne Vorzeichenwechsel der Geschwindigkeit für Interpretation der gerichteten Dreiecksfläche



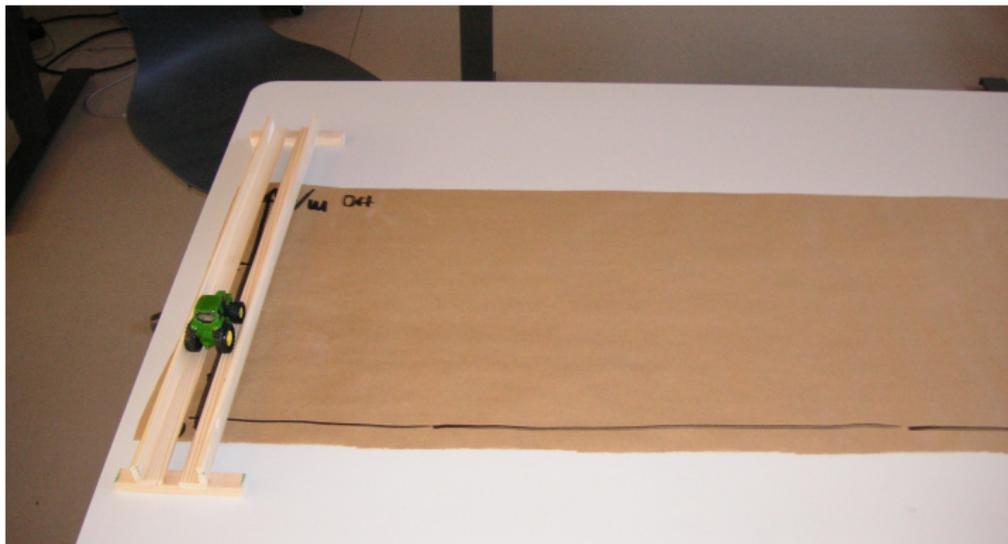
v - t -Diagramm mit phyphox - Beispiel 3

Gleichmässig (negativ) beschleunigte Bewegung mit Vorzeichenwechsel der Geschwindigkeit für Interpretation der gerichteten Dreieckflächen



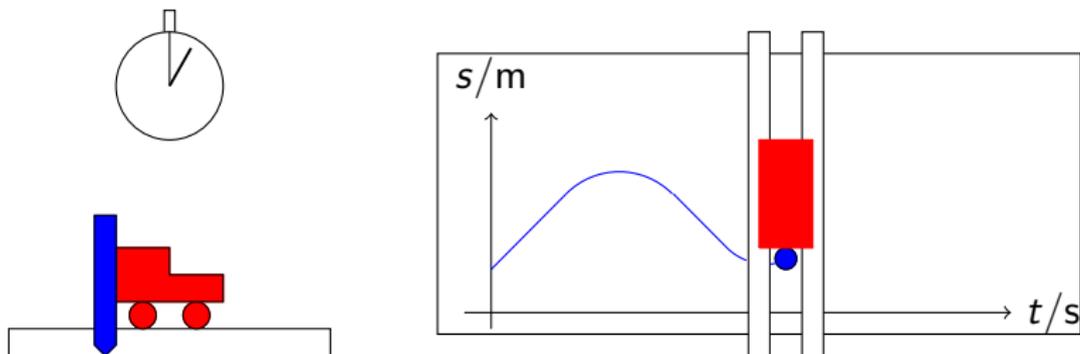
s-t-Diagramm mit elementaren Mitteln - Material

Spielzeugauto, Filzstift, Schiene, Packpapier, langes Lineal, Stoppuhr



Die Leisten für eine solche Schiene können in jedem Baumarkt gekauft werden, um sie dann zuzuschneiden und zusammenzukleben.

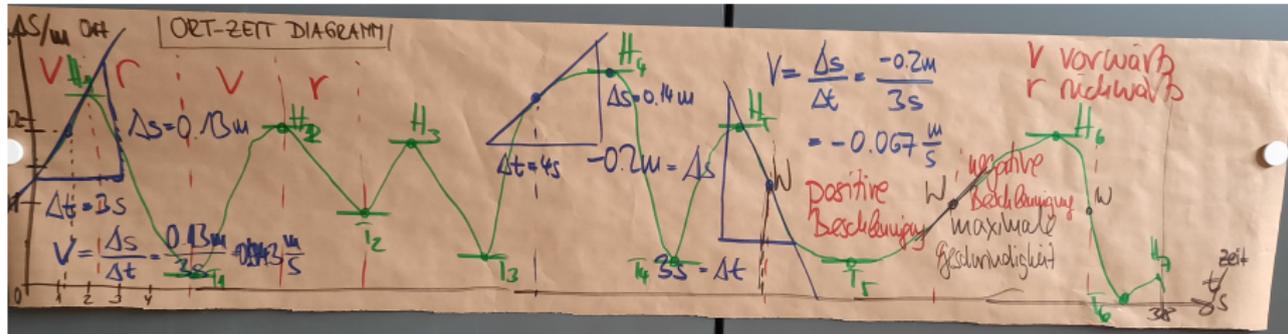
s-t-Diagramm mit elementaren Mitteln - Durchführung



Das Spielzeugauto wird auf der Schiene vorwärts und rückwärts bewegt. Auf dem Papier, das unter der Schiene durchgezogen wird, hinterlässt der am Fahrzeug befestigte Farbstift eine Kurve im Ort-Zeit-Diagramm. Um die Zeitachse zu beschriften, wird die Zeitdauer dieser Aufzeichnung mit einer Stoppuhr gemessen.

Video mit Durchführung dieses Experiments im Unterricht

s-t-Diagramm mit elementaren Mitteln - Beispiel



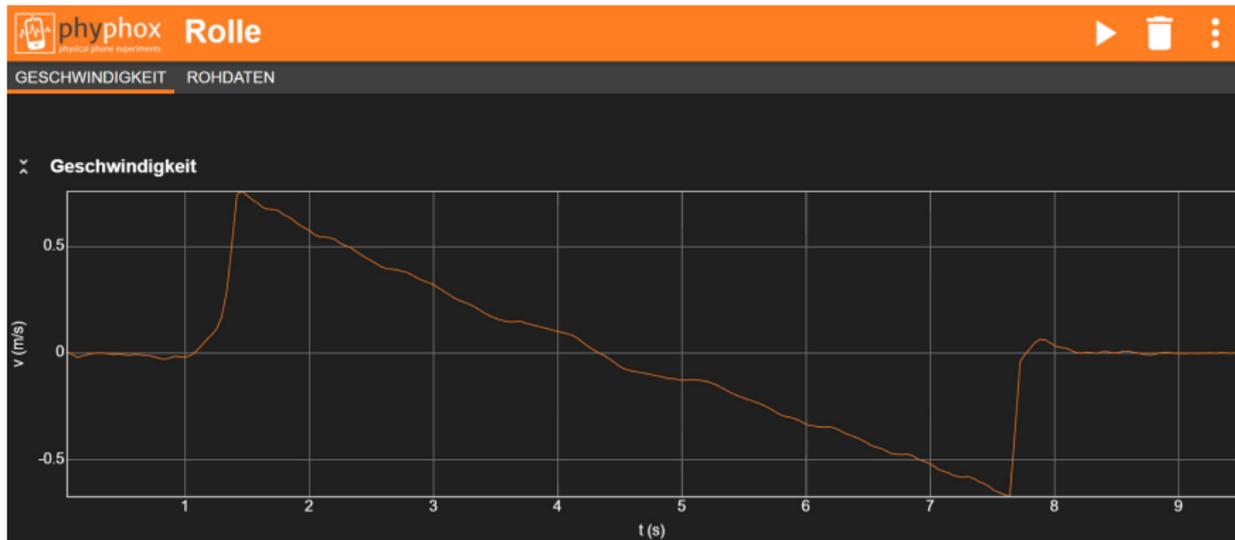
Dieses im Unterricht bearbeitete s-t-Diagramm zeigt, wie Geschwindigkeiten als Steigungen von Tangenten abgelesen, die Krümmung als Beschleunigung interpretiert und die Hoch-/Tief-/Wendepunkt kontextbezogen gedeutet worden sind.

Experimente zu spezifischen Funktionstypen - Übersicht

Funktionstyp	Experimente
lineare Funktion	v - t -Diagramm mit Rolle auf geneigter Ebene Abbrennen einer Kerze
quadratische Funktion	s - t -Diagramm zu Rolle auf geneigter Ebene Fallgesetz mit akustischer Stoppuhr von phyphox Ausfluss aus Flüssigkeitscontainer
Exponentialfunktion	Bierschaumhöhe Abkühlung von Wasser
Logarithmusfunktion	Halbwertszeit Weber-Fechner-Gesetz
trigonometrische Funktionen	Federpendel Audio Oszilloskop von phyphox

Lineare Funktion - Experiment 1

v - t -Diagramm einer Rolle auf geneigter Ebene mit phyphox (siehe oben)



Lineare Funktion - Experiment 2

Geburtstags-/Tortenkerze(n), Feuerzeug, Knetmasse, Filzstift, Lineal, Stoppuhr



t Brenndauer der Kerze

h Resthöhe der Kerze

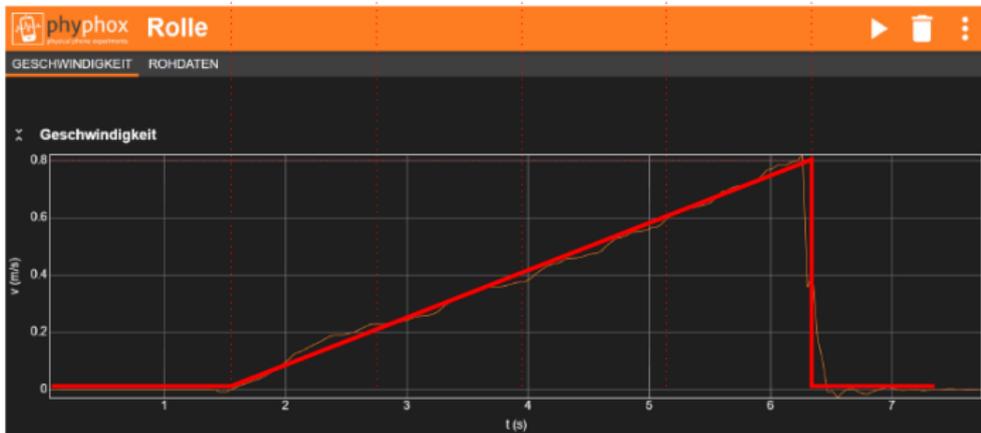
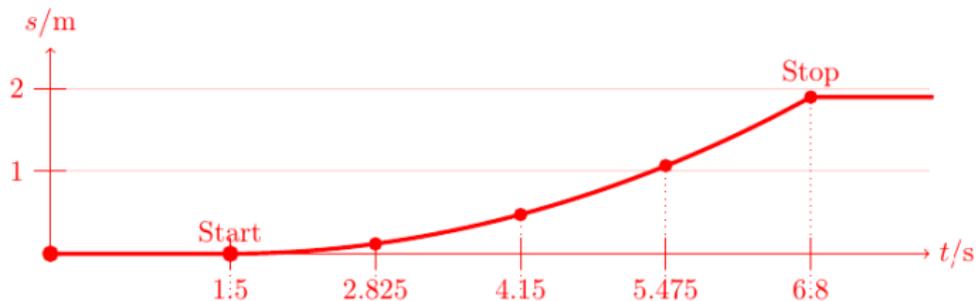
t/min	0	2.5	5.0	7.5	10
h/cm	5	4	3	2	1

im durchgeführten Versuch

Längenmarkierungen auf Kerze anbringen und Zeiten messen

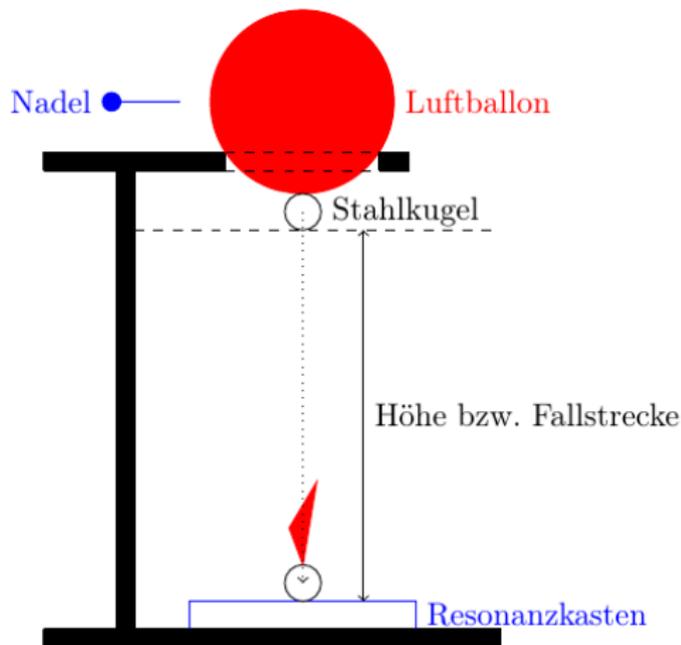
Quadratische Funktion - Experiment 1

s - t -Diagramm über Flächenfunktion bei gleichmässiger Beschleunigung



Quadratische Funktion - Experiment 2

Ballon, Klebband, Stahlkugel oder Stein, Styroporing, Holzplatten, Resonanzkasten, Nadel, Zollstock, Smartphone mit phyphox



Quadratische Funktion - Experiment 2

Überprüfung des Fallgesetzes $s = \frac{1}{2}gt^2$ oder Bestimmung des Ortsfaktors

Mit der akustischen Stoppuhr unter Zeitmessung von phyphox kann die Fallzeit gemessen werden. Die Stoppuhr startet sobald der Ballon durch das Anstechen mit der Nadel platzt und wird durch den Knall beim Aufprall der Stahlkugel oder des Steins auf dem Resonanzkasten gestoppt.

Bei einer Fallstrecke von circa 2m haben sich die Einstellungen mit der Schwelle 0.2 und der Mindestverzögerung 0.5 bewährt. Je nach Smartphone müssen diese Einstellungen aber angepasst werden.

Wenn die Schüler/-innen die Messung mit ihren Smartphones durchführen, kann die Streuung so gewonnener Daten als Ungenauigkeit aufgrund der verschiedenen Messgeräte interpretiert werden.

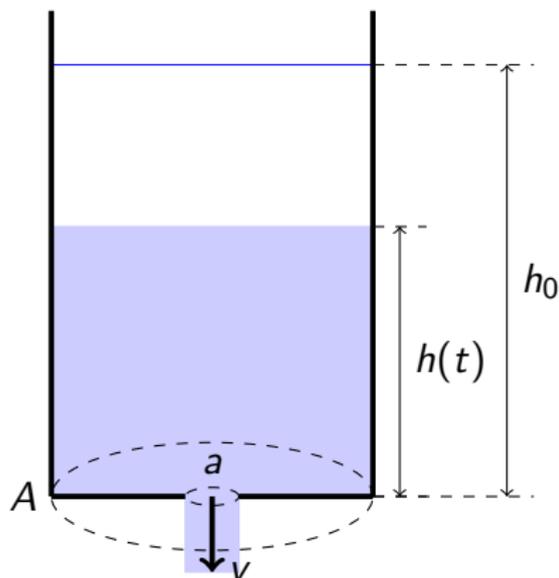
Wiki-Eintrag ([phyphox.org](https://www.phyphox.org), abgerufen am 29.07.2025)

Video-Anleitung ([phyphox, YouTube.com](https://www.youtube.com), abgerufen am 29.07.2025)

Quadratische Funktion - Experiment 3

Fässler, A. (2020, 2. Auflage). Schnelleinstieg Differentialgleichungen. Berlin: Springer Spektrum. 3.12 Flüssigkeitskontainer, Seiten 73-75.

Ausflussgefäß (zylindrischer Behälter mit Loch am Boden), Lineal, Stoppuhr



Querschnittflächen A und a
von Zylinder und Loch

Austrittsgeschwindigkeit

$$\rho gh = \frac{1}{2} \rho v^2 \implies v = \sqrt{2gh}$$

Volumenänderung

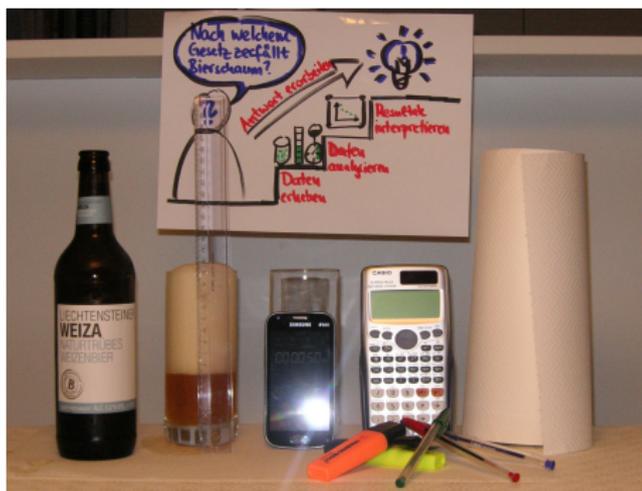
$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{\Delta t} &= A \frac{\Delta h}{\Delta t} \approx -av = -a\sqrt{2g}\sqrt{h} \\ \implies \frac{dh}{dt} &= -\frac{a}{A}\sqrt{2g}\sqrt{h} \end{aligned}$$

$$h(0)=h_0 \implies \boxed{h(t) = \left(\sqrt{h_0} - \frac{a}{2A}\sqrt{2gt}\right)^2}$$

Exponentialfunktion - Experiment 1

Die Höhe von Bierschaum zerfällt im Laufe der Zeit exponentiell.

zylindrisches Glas, Linear, Stoppuhr, (alkoholfreies) Bier, Haushaltspapier



Kramer, M. (2011). Physik als Abenteuer. Band 1. Aulis. Halbwertszeit von Malzbierschaum, Seiten 220-222.

Martin Kramer propagiert einen **handlungsorientierten Unterricht**. Er erläutert im Band 1 von **Physik als Abenteuer** seine handlungs- und erlebnisorientierte Didaktik ausführlich und erwähnt dabei auch **notwendige Voraussetzungen** für das Gelingen eines solchen Unterrichts. Seine drei Bände von **Mathematik als Abenteuer** führen eine Vielzahl derartiger Unterrichtssequenzen an - u.a. das Bierschaumexperiment im Abschnitt 23.2 auf den Seiten 136-143 des Bandes III.

Kramer, M. (2024). Mathematik als Abenteuer. Band I: Geometrie und Rechnen mit Grössen. Hannover: Kallmeyer in Verbindung mit Klett.

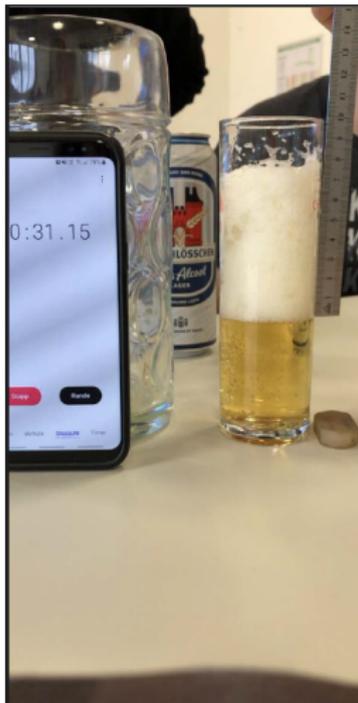
Kramer, M. (2024). Mathematik als Abenteuer. Band II: Algebra und Vektorrechnung. Hannover: Kallmeyer in Verbindung mit Klett.

Kramer, M. (2020). Mathematik als Abenteuer. Band III: Analysis und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Hannover: Kallmeyer in Verbindung mit Klett.

Experiment zur Bierschaumhöhe

PHILIPP WETLI, JULIAN LÜBBIG, ALEXANDRA MARXER, JONAS MEIER

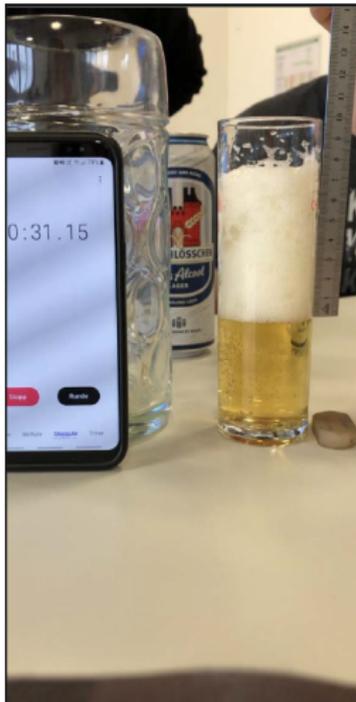
Exponentialfunktion - Experiment 1



Rohdatentabelle

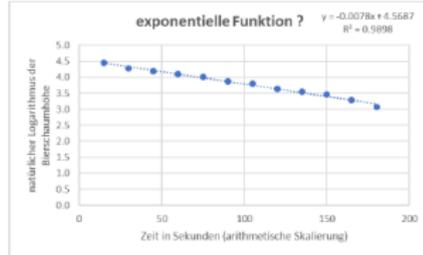
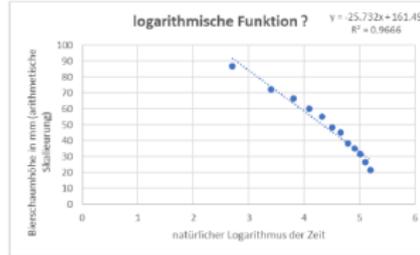
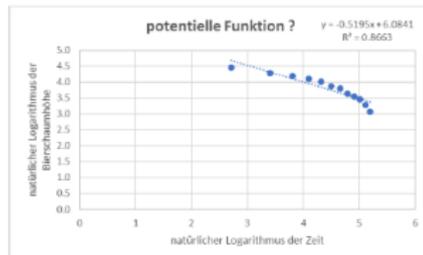
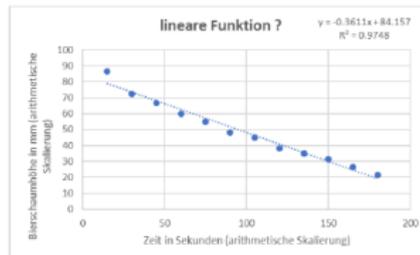
t in s	h1 in mm	h2 in mm	h3 in mm	ln(t)	y = arith. Mittel (h)	ln(y)
15	90	90	80	2.7081	86.6667	4.4621
30	75	77	65	3.4012	72.3333	4.2813
45	70	70	60	3.8067	66.6667	4.1997
60	65	60	55	4.0943	60.0000	4.0943
75	60	55	50	4.3175	55.0000	4.0073
90	50	50	45	4.4998	48.3333	3.8781
105	50	45	40	4.6540	45.0000	3.8067
120	40	40	35	4.7875	38.3333	3.6463
135	40	35	30	4.9053	35.0000	3.5553
150	35	30	30	5.0106	31.6667	3.4553
165	30	25	25	5.1059	26.6667	3.2834
180	25	20	20	5.1930	21.6667	3.0758

Exponentialfunktion - Experiment 1



Diagrammübersicht

Nur in der Darstellung $\ln(y) \sim x$ liegen die Datenpunkte näherungsweise auf einer Geraden.



Parameter des gewählten Modells

Gegeben

Lineare Regression aus Diagramm:

$$\ln(y) = -0.0078 \times x + 4.5687$$

$$\ln(y) = \ln(b) \times x + \ln(a)$$

Gesucht

$$y = a \times b^x$$

Berechnung von a

$$a = e^{4.5687} = 96.4187$$

Berechnung von b

$$b = e^{-0.0078} = 0.9922$$

Abnahme pro Sekunde

$$(b - 1) \times 100 \%$$

$$(0.9922 - 1) \times 100 \% = -0.7770 \%$$

Exponentialfunktion

$$y = 96.4187 \times 0.9922^x$$

Wenn x um eine Einheit steigt, dann sinkt y um 0.78 %.

Im Kontext interpretiert: **In jeder Sekunde zerfallen 0.78 % der Bierschaumhöhe.**

Newtonsches Abkühlungsgesetz: Die Rate der Temperaturänderung eines Körpers ist proportional zu seiner Temperaturdifferenz zur Umgebung, wenn der Wärmeübergangskoeffizient konstant ist:

$$\begin{aligned}\dot{\vartheta}(t) &= -\lambda \cdot (\vartheta(t) - \vartheta_U) \quad \text{mit } \lambda > 0 \quad \text{und} \quad \vartheta(0) = \vartheta_0 \\ \implies \vartheta(t) &= \vartheta_U + (\vartheta_0 - \vartheta_U) \cdot e^{-\lambda \cdot t} = \vartheta_U + (\vartheta_0 - \vartheta_U) \cdot (e^{-\lambda})^t\end{aligned}$$

für die Temperatur ϑ des Körpers zum Zeitpunkt t mit $\vartheta(0) = \vartheta_0$ und konstanter Umgebungstemperatur ϑ_U .

Newtonsches Abkühlungsgesetz (Wikipedia.org, abgerufen am 30.07.2025)

Bei Experimenten zur Abkühlung von Wasser oder zur Erwärmung von Wodka wird das Newtonsche Abkühlungsgesetz empirisch bestätigt. Die Durchführung solcher Experimente benötigt aber relativ viel Zeit.

Exponentialfunktion - Experiment 2

Wasserkocher, Glas, Thermometer, Stoppuhr

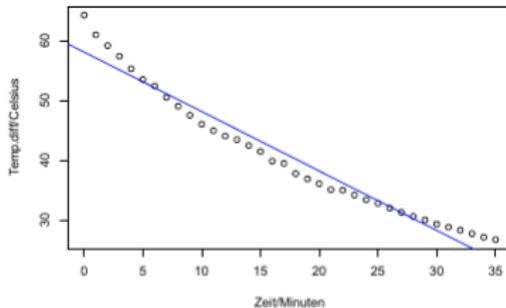


Exponentialfunktion - Experiment 2

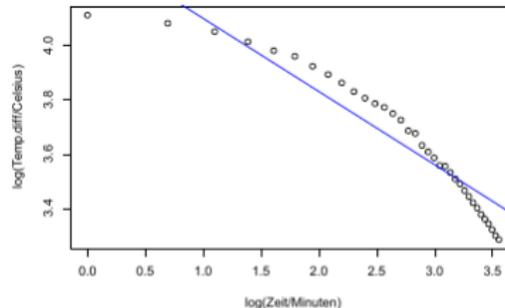
Lufttemperatur im Zimmer: $\vartheta_L = 22.2\text{ }^\circ\text{C}$					
Zeit	Temperatur	Zeit	Temperatur	Zeit	Temperatur
t/min	Wasser	t/min	Wasser	t/min	Wasser
	$\vartheta_W/^\circ\text{C}$		$\vartheta_W/^\circ\text{C}$		$\vartheta_W/^\circ\text{C}$
0	86.6	12	66.3	24	55.6
1	83.3	13	65.7	25	55.0
2	81.5	14	64.7	26	54.2
3	79.7	15	63.7	27	53.5
4	77.6	16	62.1	28	52.8
5	75.8	17	61.7	29	52.2
6	74.7	18	60.0	30	51.5
7	72.8	19	59.1	31	51.0
8	71.3	20	58.3	32	50.5
9	69.8	21	57.8	33	49.9
10	68.3	22	57.2	34	49.3
11	67.2	23	56.4	35	48.9

Exponentialfunktion - Experiment 2

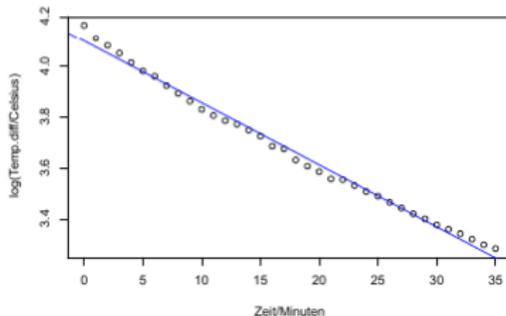
Test auf lineare Funktion



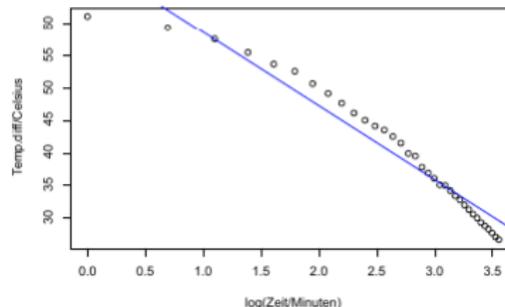
Test auf Potenzfunktion



Test auf Exponentialfunktion



Test auf Logarithmusfunktion



Logarithmische Skalierungen spielen bei der Auswertung von Experimenten wie zur Bierschaumhöhe oder zur Abkühlung von Wasser - insbesondere im Hinblick auf die Modellwahl - eine entscheidende Rolle.

Logarithmen kommen aber auch ins Spiel, wenn in solchen Situationen die Halbwertszeit betrachtet wird. So fragt Kramer (2011) in Physik als Abenteuer nach der Halbwertszeit von Malzbierschaum.

Logarithmusfunktion - Weber-Fechner-Gesetz

„Das Weber-Fechner-Gesetz ist die Formulierung einer psychophysischen Beziehung in der Sinnesphysiologie und besagt, dass ein linearer Zuwachs der (psychisch) subjektiv empfundenen Stärke von Sinneseindrücken dem Logarithmus des Zuwachses der (physikalisch) objektiv messbaren Intensität des Reizes entspricht.“

Mit E für die Stärke der Empfindung und R für die Intensität des Reizes ergibt sich das **Weber-Fechner-Gesetz** $E = c \log \left(\frac{R}{R_0} \right)$. „Hierbei ist c eine für die jeweilige Reizart charakteristische Konstante; R_0 ist eine Integrationskonstante, die zumeist die Intensität an der Reizschwelle als Schwellenreiz festlegt.“ „Doch gilt das Weber-Fechner-Gesetz weder für sehr niedrige Reizstärken nahe der Reizschwelle noch für sehr hohe Reizstärken nahe oder über der Sättigungsschwelle.“

Weber-Fechner-Gesetz (Wikipedia.org, abgerufen am 30.07.2025)

Logarithmusfunktion - Weber-Fechner-Gesetz

Ernst Heinrich Weber untersuchte, „um wie viel ein Reiz verstärkt werden muss, um als stärker empfunden zu werden. 1834 bemerkte er dann, dass bei Reizen gleicher Art diese Unterschiedsschwellen sich nahezu gleichen, wenn man sie als Anteil im Verhältnis zur jeweiligen Intensität der Reize angibt. [Gustav Theodor] Fechner formulierte diese Beziehung in folgender Weise mathematisch:

$$k = \frac{\Delta R}{R} \quad \text{Weber-Gesetz}$$

Der gerade eben noch wahrnehmbare Unterschied ΔR steht zum Vergleichsreiz R in einem bestimmten, gleich bleibenden Verhältnis k . [...] Er [Fechner] erweiterte das Webersche Gesetz 1860 formal durch Integration unter der Annahme, dass k konstant und unabhängig von R ist“, [zum Weber-Fechner-Gesetz.]

Weber-Fechner-Gesetz (Wikipedia.org, abgerufen am 30.07.2025)

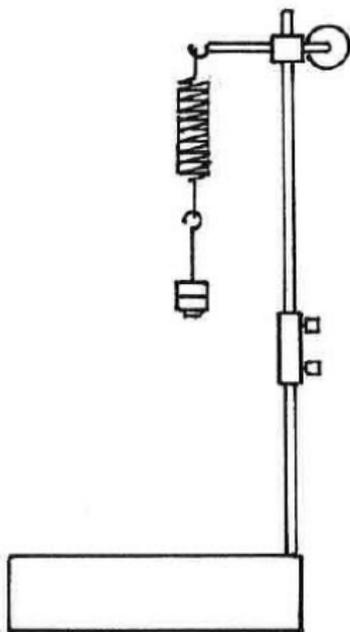
Logarithmusfunktion - Weber-Fechner-Gesetz

„Ein relativer Gewichtsunterschied von ungefähr 2% eines in der ruhenden Hand gehaltenen Gegenstands wird erkannt. So nimmt man die Gewichtszunahme eines Gegenstands von 50 g erst wahr, wenn das Gewicht um 1 Gramm auf 51 g angewachsen ist. Entsprechend muss 500 g Gewicht um 10 g anwachsen, um schwerer zu wirken. Hier verhält sich die Unterschiedschwelle zur Reizintensität also wie $\Delta R/R = 1/50 = 10/500 = 0.02 = 2\%$.“ (Weber-Fechner-Gesetz, Wikipedia.org, abgerufen am 30.07.2025)

Diese Eigenschaft kann mit elementaren Hilfsmitteln empirisch überprüft werden.

Becher, Füllmaterial wie Reis oder Mehl, Waage

Trigonometrische Funktionen - Federpendel



Stativ, Feder, Massenstück

Wie sehen die Bewegungsdiagramme - Ort-Zeit-,
Geschwindigkeit-Zeit- und Beschleunigung-Zeit-
Diagramme - beim Federpendel aus?

Welche ausgezeichneten Stellen gibt es?

Wo ist die Masse schnell bzw. langsam?

Wo wird die Masse stark bzw. schwach beschleunigt?

Vergleich harmonische Schwingung und Kreisbewegung (GFE-Physik,
YouTube.com, abgerufen am 31.07.2025)

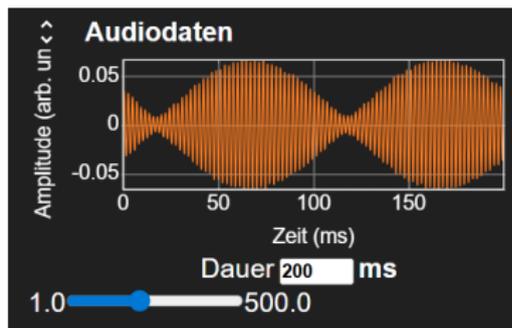
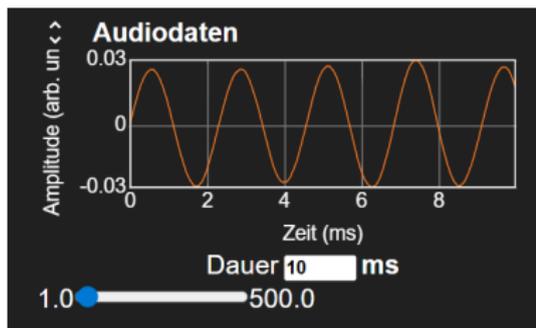
Trigonometrische Funktionen - Audio-Oszilloskop

Smartphone(s) mit phyphox, Stimmgabeln

Mit dem Audio Oszilloskop unter Akustik in phyphox können Töne als Sinus- oder Cosinusfunktionen sichtbar gemacht werden.

Mit dem Tongenerator unter Akustik in phyphox können einfache oder multiple Töne mit bestimmten Frequenzen erzeugt werden.

Bei zwei Tönen mit einem Frequenzunterschied bis etwa 10 Hz oder 20 Hz wird bei deren Überlagerung eine Schwebung hörbar, die wiederum sichtbar gemacht werden kann.

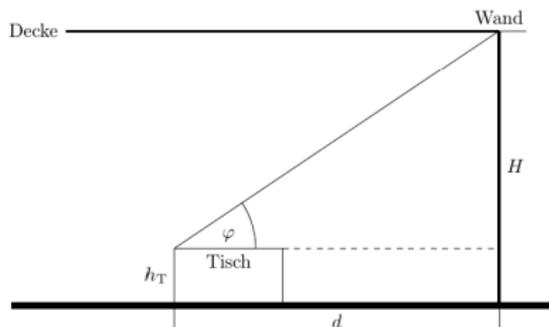
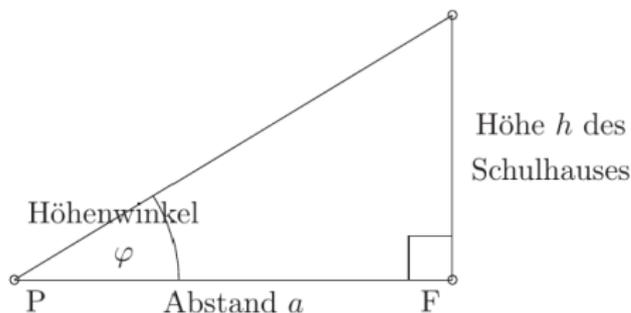


Winkelmessung mit Neigung

Mit Neigung unter Werkzeuge können mit phyphox Neigungswinkel gemessen werden.

Wiki-Eintrag (phyphox.org, abgerufen am 31.07.2025)

So können also zum Beispiel Höhenwinkel gemessen werden, um in einer Anwendung zur Trigonometrie die Höhe des Schulhauses oder die Höhe des Schulzimmers zu bestimmen.



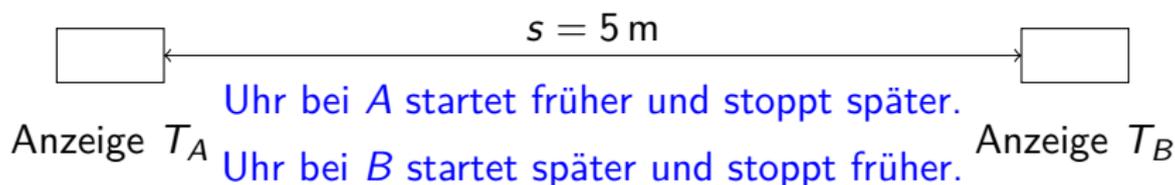
Schallgeschwindigkeit mit akustischer Stoppuhr

zwei Smartphones mit phyphox, Massband

1. Klatschen
an Stelle A
startet Uhren.

Startsignal muss von A nach B.
Stoppsignal muss von B nach A.

2. Klatschen
an Stelle B
stoppt Uhren.



In der Zeit $T_A - T_B$ legt der Schall die Strecke $2s$ zurück.

$$2s = c \cdot (T_A - T_B) \implies c = \frac{2s}{T_A - T_B} = \frac{2 \cdot 5 \text{ m}}{s} = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Messung der Schallgeschwindigkeit - Anleitung inklusive Video
(leifiphysik.de, abgerufen am 31.07.2025)

Stossparameter mit akustischer Stoppuhr

Aufgabe zur geometrischen Reihe: Ein Ball springt nach dem Aufprallen auf den Boden auf 80 % der Fallhöhe zurück. Welchen Weg legt der Ball bis zum Stillstand zurück, wenn er ursprünglich aus einer Höhe von 2 m fallen gelassen worden ist?

Mit (In)elastischer Stoss unter Mechanik können mit phyphox Stosszahlen k wie der oben erwähnte Wert $k^2 = 80\% = 0.80$ für die im Mittel behaltene Energie gemessen werden:

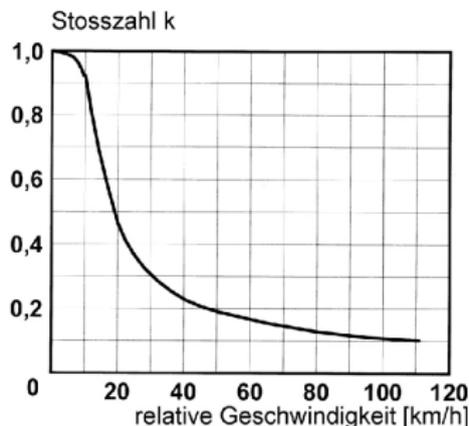
$$k = \frac{v'_2 - v'_1}{v_1 - v_2} \approx \frac{-v'_1}{v_1} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{2gH}} = \sqrt{\frac{h}{H}} = \sqrt{\frac{mgh}{mgH}} = \sqrt{\frac{E_{\text{pot,nach}}}{E_{\text{pot,vor}}}}$$

Um die Stosszahl k zu erhalten, müssen wir nur die Wurzel aus der Messung zur im Mittel behaltene Energie ziehen.

Smartphone mit phyphox, Ball, Luftpumpe

Stossparameter mit akustischer Stoppuhr

Warnung: Streng genommen hängt die Stosszahl von der Aufprallgeschwindigkeit ab! Bei obigem Beispiel mit dem Ball sind die Aufprallgeschwindigkeiten in einem Bereich, in dem der Stossparameter als konstant angesehen werden kann.



Schmitt, K.-U. et al. (2010). Methoden der Trauma-Biomechanik. Berlin: Springer. (abgerufen am 31.07.2025)

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!



Bei Fragen einfach fragen: jochen.kalser@ksbg.ch