Mit Dufour das Land vermessen

TMU 2024, Kantonsschule Freudenberg

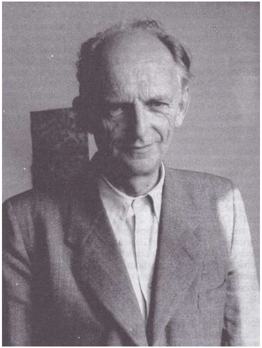
Philipp Spindler

11.09.2024

Zitat

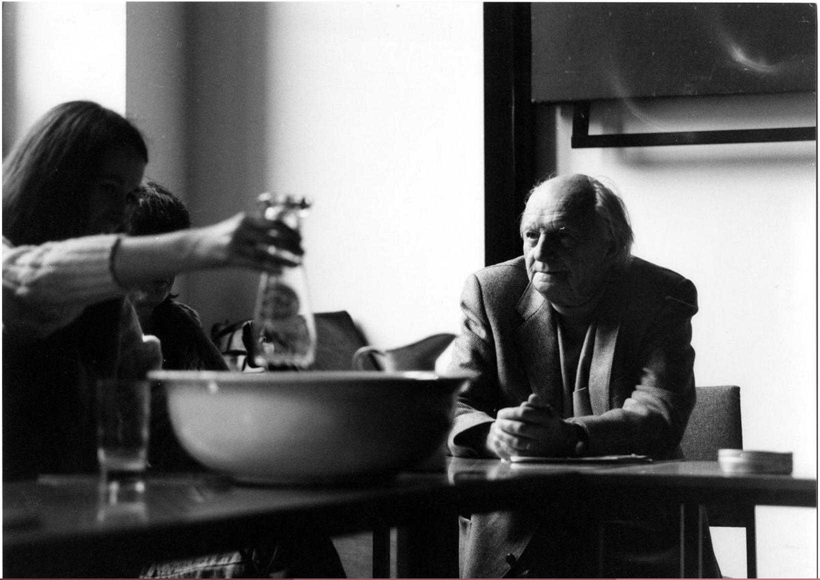
"Nur von unten her lernt man *Fragen* sehen und produktiv mit ihnen fertig werden; lernt Gefasstsein auf das Unerwartete, lernt Einfällehaben, gewinnt Ermutigung, lernt mit Freude: Gibt es Dringenderes? 'Wissen ist Macht' – das reicht heute nicht mehr: Heute, glaube ich, muss die Formel anders lauten: *Verstehen ist Menschenrecht*."

MARTIN WAGENSCHEIN
(1896 - 1988)



Wagenschein

Biographie



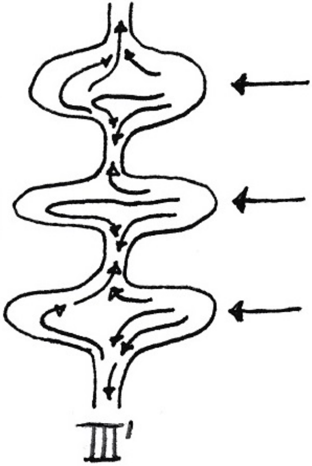
Wagenschein

“Verstehen ist Menschenrecht”

Kinder fordern, dass ihrem Verstehenwollen Nahrung gegeben wird

Anliegen: Vermittlung zwischen Erfahrung und Wissen

Schüler in die Lage versetzen, in der das noch unverstandene Problem so vor ihm steht, wie es vor der Menschheit stand, als es noch nicht gelöst war.



Einstieg, Sogfrage

Nicht unten im “Turm des Faches” beginnen.

Einstieg über eine herausfordernde Frage.

Vordringen nach unten und nach oben.

$$\overbrace{\text{genetisch – sokratisch – exemplarisch}}^{\text{genetisch}}$$

Wagenschein

Genetischer Unterricht

Genetisch:

(1) psychologisch: neues Wissen an Vorkenntnisse anknüpfen
(2) sachlogisch: Unterricht folgt der Sachlogik der Lerninhalte
(3) historisch: Berücksichtigung des historischen Werdegangs der Wissenschaft

Genetischer Unterricht versucht, diesen Aspekten gerecht zu werden.

"Einwurzelung": gemeinsame Einbettung des Lernenden und des Lerninhaltes in die Umwelterfahrung des Menschen

Lehrstückunterricht

Methodentrias

	Exemplarisch Eine menschliche Schlüsselerkenntnis	**Genetisch** in ihrem ganzen Werdegang	**Dramaturgisch** und ihrer Dramatik erfahren.
Merkmale	Ursprüngliches Phänomen voller Rätsel. Erschliessen von Konzepten. Zugang zu grösseren Bereichen in der "thematischen Landkarte". Wandel der Sichtweise, epochale Erkenntnis, neuer Begriff.	Gewordenes im Kreislauf des Werdens. Einbezug von Quellen. Sachgenese: Das Phänomen kann sich entfalten. Wissensgenese: Das Verstehen erhält Zeit und Raum. Einwurzelung.	Figuren in ihrem kulturhistorischen Umfeld. Gliederung mit theaterähnlicher Struktur. Dramatische Entwicklung des Erkenntnisprozesses. Spannungsbogen über die ganze Unterrichtseinheit.
Leitfigur	Ein lockender und zugänglicher Menschheitsgipfel wird unter behutsamer Führung erklettert. Dabei wird nicht nur der Berg, sondern das Gebirge in seinen Grundzügen erfahren sowie das Klettern erlernt.	Der Werdegang der Sache und der Werdegang des Verstehens wird nachvollzogen. Der Weg führt vom ersten Staunen bis zur Erkenntnis.	In einem dramatischen Ringen wird der Gegenstand erschlossen, und der Gegenstand ringt um seine Erschliessbarkeit. Der Bildungsprozess ist doppelseitig.

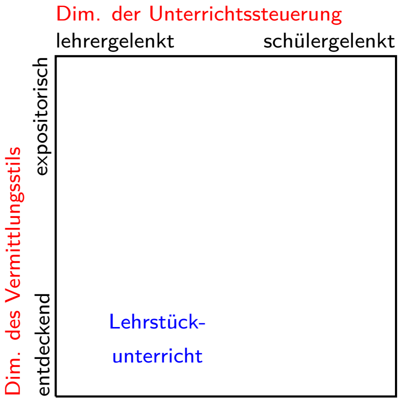
Lehrstückunterricht ist eine Unterrichtsform in Gestalt durchdachter, zu einem inneren Handlungszusammenhang durchkomponierter, themenbezogener und zugleich bereichserschliessender Unterrichtseinheiten zu kulturell bedeutsamen schulischen Themen, Sternstunden der Menschheit oder epochenübergreifenden Menschheitsthemen. Diese Lehrstücke werden nach der exemplarisch-genetisch-dramaturgischen Methodentrias zur Steigerung und Verdichtung von Bildungsprozessen im Sinne von Klafkis kategorialdidaktischer Analyse konzipiert und über eine zeitlich begrenzte Dauer von typischerweise 10 bis 25 Unterrichtsstunden als improvisationsoffene Mitspielstücke inszeniert.

Lehrstückunterricht
Umsetzung

- 10%-Didaktik
  typischerweise 1 Lehrstück pro Klasse pro Jahr
- nicht jedes Thema geeignet
  Unterrichtsverlauf muss sich mit Ideen der Lernenden entwickeln können
- braucht Zeit und Musse
- Raum für überraschende Wendungen
- Lernende gewinnen Vertrauen in eigene Ideen,
  erleben sich als selbstwirksam,
  machen sich Konzepte zu eigen
- idealerweise im Blockunterricht

Lehrstückunterricht

Entscheidungsfeld



nach Hattie:

- Selbsteinschätzung des eigenen Leistungsniveaus (ES: 1.44, Rang 1)
- Erkenntnisstufen (ES: 1.28, Rang 2)
- Formative Evaluation (ES: 0.9, Rang 4)
- Rückmeldung (ES: 0.75, Rang 10)
- Lehrer-Schüler-Beziehung (ES: 0.72, Rang 12)
- Problemlösen (ES: 0.61, Rang 24)
- Fragenstellen (ES: 0.48, Rang 53)
- Motivation (ES: 0.48, Rang 56)
- Kooperatives Lernen (ES: 0.42, Rang 65)

Ouvertüre

Vorgeschichte

Ouvertüre

Guillaume Henri Dufour

- 1787 in Konstanz (Vorderösterreich) geboren
- 1789 Rückkehr der Familie nach Genf
- 1807-1810 Studien in Paris und Metz (Geisteswissenschaft, Physik)
- 1813 schwer verletzt (Scharmützel vor Korfu auf Seiten Frankreichs gegen England)
- 1817 Kantonsingenieur in Genf
- 1823 Passerelle de Sainte-Antoine
  erste Hängebrücke der Welt mit Drahtseilen
- 1832 Leitung der Triangulationen für eine Schweizer Landeskarte
- 1837 Gründung des Eidgenössischen Topographischen Bureaus
- 1847 General der Tagsatzungstruppen,
  Sieg im Sonderbundskrieg
- 1863 Mitbegründer des IKRK
- 1864 Fertigstellung der Dufourkarte

1. Akt

Wozu eine Karte?

- Übersicht der Handelswege
- Definition eines Landes
- Wissen über Entfernungen $\rightarrow$ Planung von Reisen
- Orientierungshilfe in der Welt
- Repräsentationszweck
- Höhenprofil
- Festhalten von Ortsnamen
- Zugänglichkeit von Orten
- Planung von Strassennetz, Bahnnetz, Stromleitungen
- Flächeninhalte z.B. von Ländern, Kantonen, Grundstücken (für Steuerzwecke)
- Militärische Strategien

Ausschnitt aus der Karte von Jodocus Hondius (1618)

Ausschnitt aus der Karte von Johann Jakob Scheuchzer (1720)

1. Akt

Streckenproblem

Erster Schritt: Eine Strecke vermessen

Anforderungen: schnurgerade, eben, gut begehbar

Hilfsmittel: Schritte zählen, Schnur spannen, Messband, Messrad, Messlatte

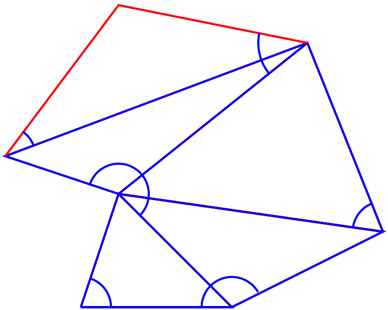
Teststrecke vor der KSA: Messungen

282.53 m
283.35 m
283.35 m
283.50 m
283.50 m
283.57 m

Was geben wir an?

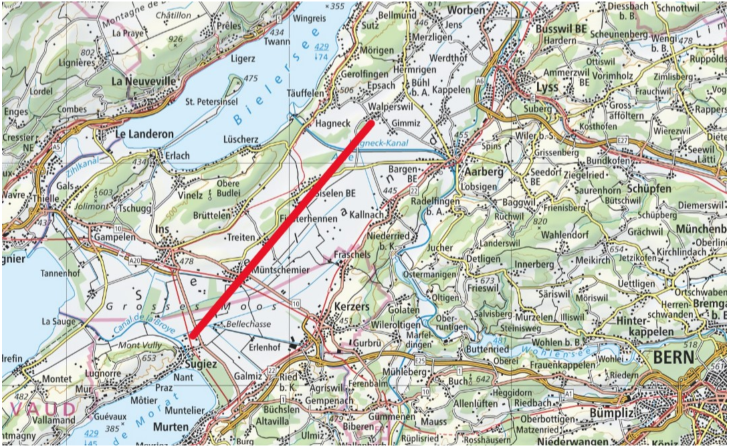
- $s = \varnothing = 283.31$ m
- $s = \text{Median} = 283.43$ m
- Extremwerte streichen
  $s = \varnothing_{\text{Rest}} = 283.44$ m

Zweiter Schritt: Triangulation

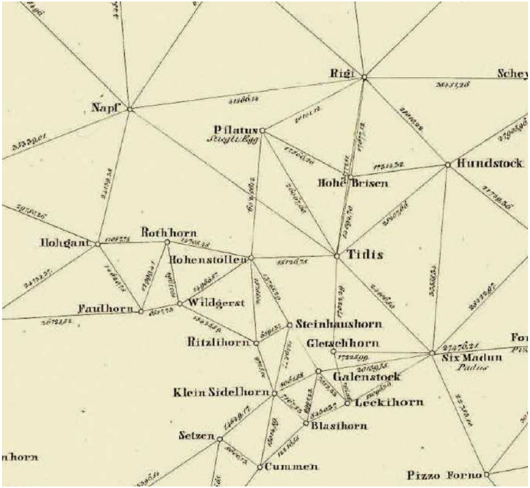


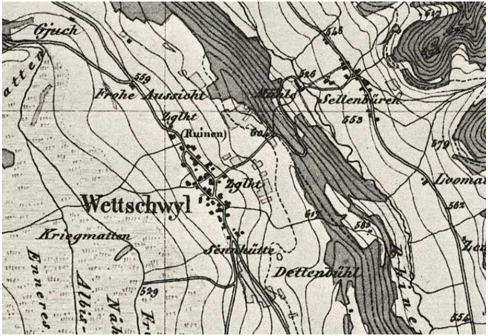
Dreiecke im Kleinformat zeichnen, gemessene Streckenlängen hochrechnen

Bei Dufour: September bis November 1834:
Vermessung Basislinie Walperswil - Sugiez, 13053.74 m



Bei Dufour: Triangulationsnetz



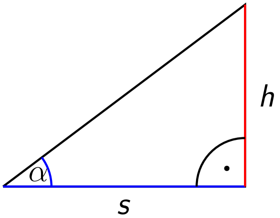


Ausschnitt aus der Karte von Johannes Wild (1853)

1. Akt

Höhenproblem

1. Schritt: Höhen mit erreichbarem Fusspunkt



Strecke s und Höhenwinkel α messen

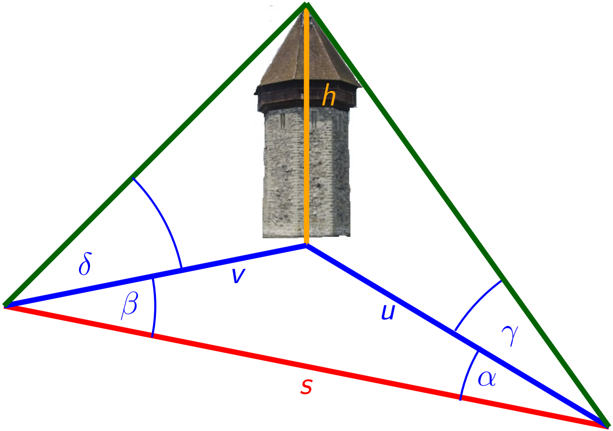
Dreieck im Kleinformat zeichnen, gemessene Strecken hochrechnen

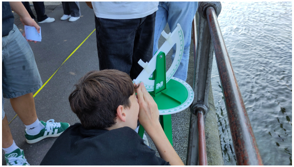
Höhe der KSA (B-Trakt):
Messungen (in m)

16.4	16.373	16.737
16.7	17.25	16.6
16.607	16.6	17.34
16.33	17.43	17.25
15.5	17.25	17.9
17.13		

Was geben wir an?
$h = \text{Median} = 16.72$ m

2. Schritt: Höhen mit unerreichbarem Fusspunkt





Höhe des Wasserturms:
Messungen (in m)

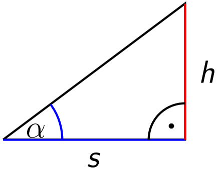
37	43	33.8	33.52	36.5
45.1	32	37.1	36	36
36.5	36.7	34.7	47.5	37.5
43.9	39.8	43.47	37.52	32.52
45.4	44.1	33.52	37.52	44.13
35.63	46.13			

Was geben wir an?
$h = \text{Median} = 37.1$ m

Höhenproblem

aus s und α die Höhe h bestimmen

muss sehr oft gelöst werden $\rightarrow$ Systematisierung

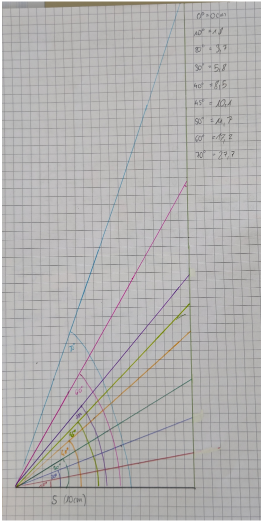


Jedem Winkel α kann ein Faktor $x(\alpha)$ zugeordnet werden, so dass

$$h = s \cdot x(\alpha)$$

Dies bedeutet:

$$x(\alpha) = \frac{h}{s} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$



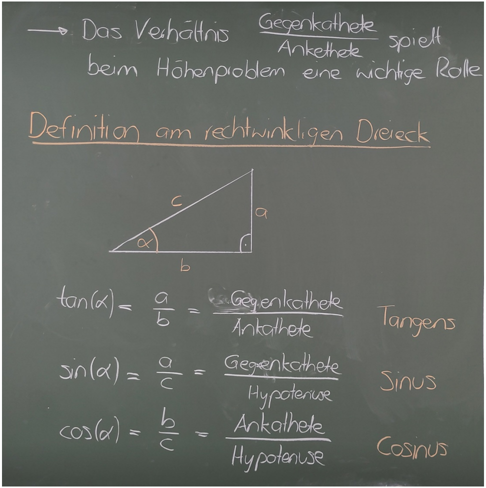
Verhältnisse $\frac{h}{s}$ zeichnerisch

Tabelle der gemittelten Werte:

α	$x(\alpha) = \frac{h}{s}$
$0°$	0
$10°$	0.184
$20°$	0.37
$30°$	0.581
$40°$	0.847
$45°$	1
$50°$	1.20
$60°$	1.74
$70°$	2.75
$80°$	5.72

2. Akt

Trigonometrische Defintionen



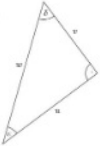
3. Akt

Übungen

Nun wird fleissig geübt....

8.2 Rechtwinklige Dreiecke 37

8.2 Rechtwinklige Dreiecke



11. Berechne im rechtwinkligen Dreieck mit den Seiten u, v und w sowie den Winkeln δ und ε die fehlenden Grössen.

a) $\varepsilon = 37°$, $w = 4$ b) $\delta = 73°$, $w = 6$

c) $\varepsilon = 15°$, $u = 7$ d) $u = 12$, $v = 5$

e) $w = 25$, $u = 24$ f) $v = 3$, $w = \sqrt{18}$

g) $u = 1$, $w = \sqrt{5} - 1$ h) $v = 10$, $\delta = 4 \cdot \varepsilon$

i) $v = 5$, $w = 2 \cdot u$ j) $w = 1$, $u : v = 7 : 13$

12. Berechne (und runde zweckmässig)

a) die Höhe eines Turms, wenn man seine Spitze unter einem (Höhen-)Winkel von 23° erblickt und der (Horizontal-)Abstand zum Turm 478 m beträgt. Das Auge des Betrachters liegt dabei 160 cm höher als der Fusspunkt des Turms.

b) die Horizontaldistanz zum Dorfzentrum, wenn man von einem hohen Aussichtspunkt (1133 m ü. M.) mit einem Winkel von 72° gegenüber der Vertikalen zum Dorfzentrum (694 m ü. M.) hinunterschaut.

c) die Luftdistanz zu einer Bergspitze, wenn sich ein Wanderer auf 1291 m Höhe befindet, der Höhenwinkel des Sehstrahls 4.5° beträgt und der Berg in der Landkarte mit 2011 m ü. M. angegeben ist. (Die Grösse des Wanderers kann hier vernachlässigt werden.)

13. Berechne im gleichschenkligen Dreieck ABC $(a = b)$ die angegebenen Grössen.

a) h_c und γ aus $a = 13$ und $c = 10$

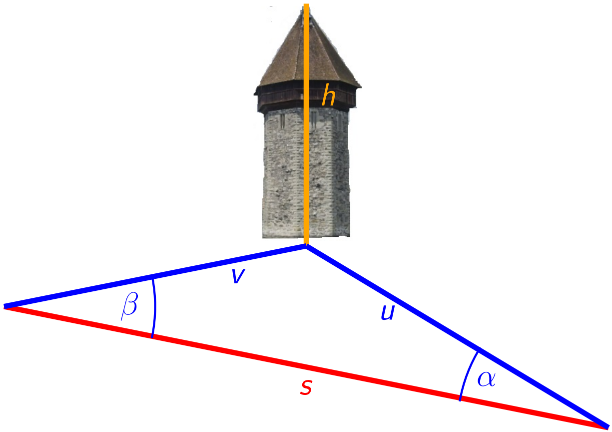
b) c und h_a aus $\gamma = 56°$ und $a = 8$

c) α und a aus $h_a = 9.6$ und $c = 16$

d) α und c aus $h_a = 5.04$ und $h_c = 9$

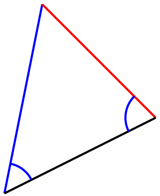
4. Akt

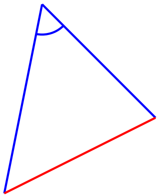
Noch ist nicht alles geklärt...



Können die Strecken u und v berechnet werden?

Zwei Probleme des Landvermessens





initiieren den Sinussatz

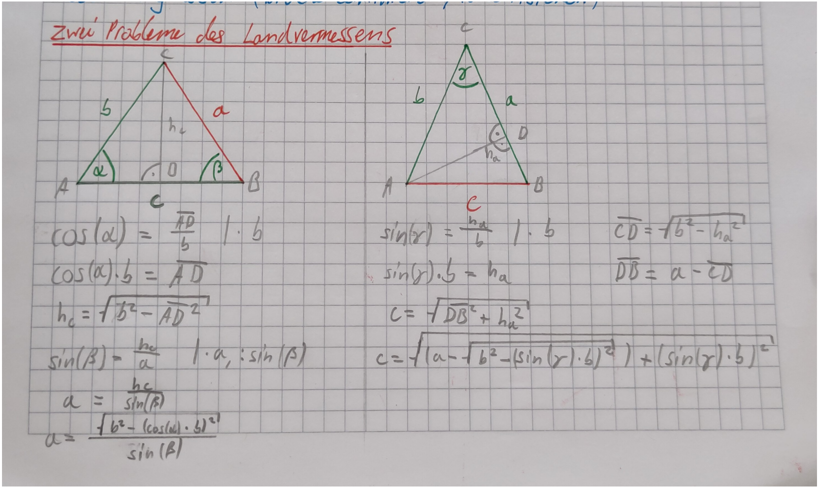
$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

und den Cosinussatz

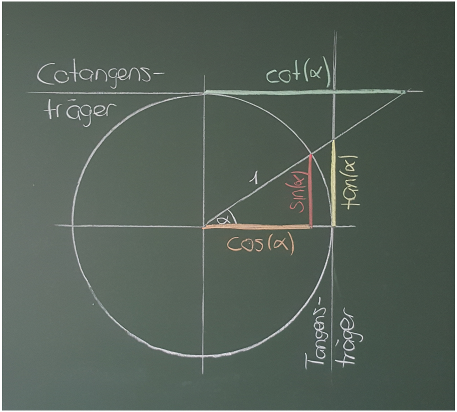
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

4. Akt

Schülerlösungen



Die Landvermessungsprobleme machen eine Definition der Winkelfunktionen für stumpfe Winkel nötig.



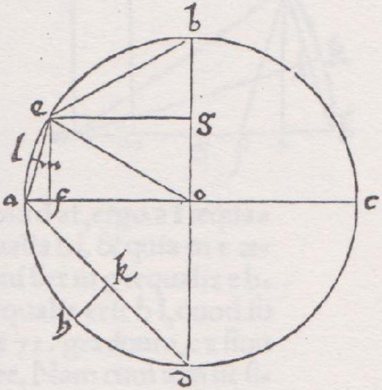
5. Akt

Regiomontan

- 1436 in Königsberg (Bayern) geboren
- heisst Johannes Müller
- 1460: Berechnung einer Sinus-Tafel
  Tafel umfasst 5400 Sinuswerte
  Kreisradius 6 000 000
- Tabelle erst 1541 gedruckt
- 1467 erste Tangens-Tafel mit reiner Zehnerpotenz als Radius
- stirbt vermutlich 1476 an der Pest

Ausgangspunkt der Tabelle

ıuius
etris
radu
latus
ɔ e o,
ɔ b in
ſtans
duũ,
ı e g,
ı a d,
uet a
m ſe=
hor=
duũ,

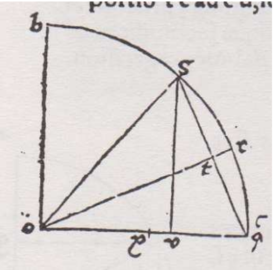


faciunt quadratum a e,quod
s 15.graduum, & propoſitiõe

Arcus.	Sinus.
90	600000000
30	300000000
60	519615242
45	424264069
15	155291427
75	579555496

5. Akt

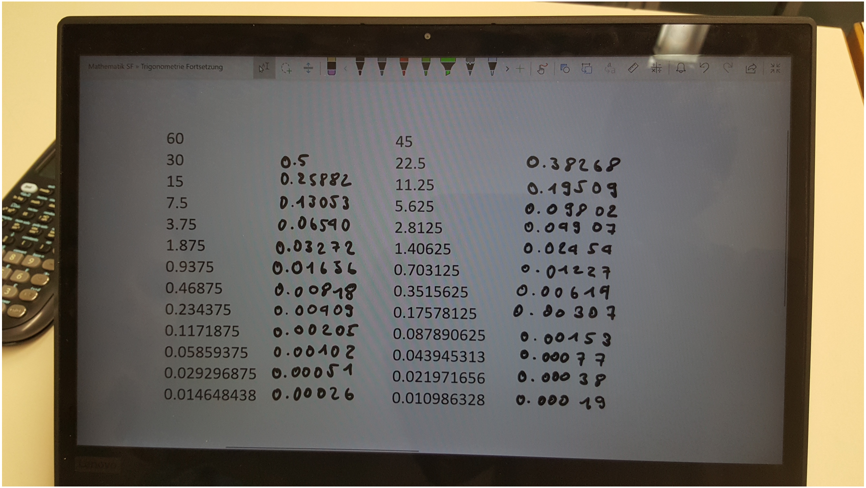
Halbieren des Winkels



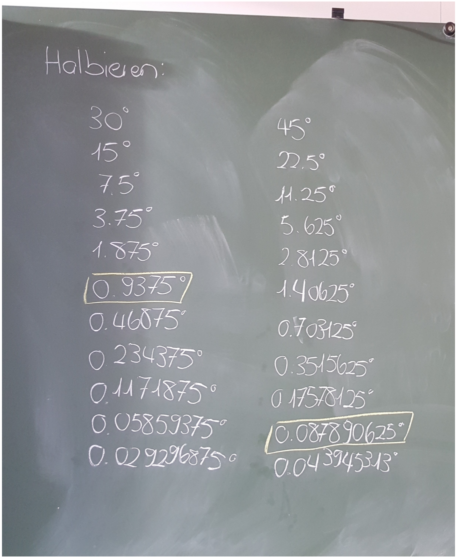
Halbwinkeltheorem

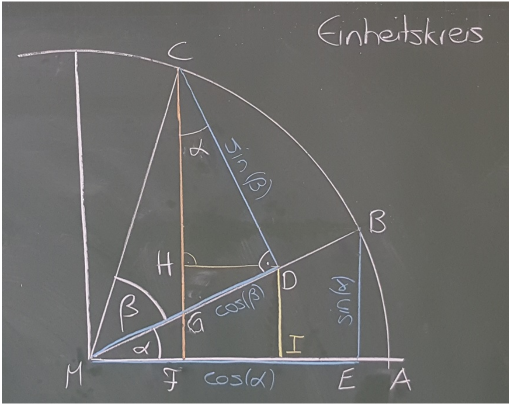
$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}$$

Arcus. G.	m̃.	Sinus.
7	30	78315715
82	30	594866917
3	45	39241877
86	15	598715354
22	30	229610059
67	30	554327720
11	15	117054193
78	45	588471168
37	30	365256858
52	30	476012004
18	45	192863679
71	15	568158078
41	15	395607489
48	45	451103884
33	45	333342140
56	15	498881767
26	15	265373214
63	45	538123645



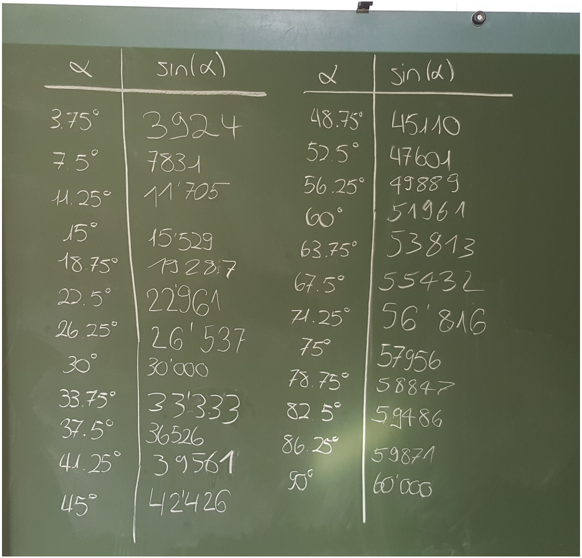
Mathematik SF » Trigonometrie Fortsetzung
60
30 0.5
15 0.25882
7.5 0.13053
3.75 0.06540
1.875 0.03272
0.9375 0.01636
0.46875 0.00818
0.234375 0.00409
0.1171875 0.00205
0.05859375 0.00102
0.029296875 0.00051
0.014648438 0.00026
45
22.5 0.38268
11.25 0.19509
5.625 0.09802
2.8125 0.04907
1.40625 0.02454
0.703125 0.01227
0.3515625 0.00614
0.17578125 0.00307
0.087890625 0.00153
0.043945313 0.00077
0.021971656 0.00038
0.010986328 0.00019


Halbieren:
30°
15°
7.5°
3.75°
1.875°
0.9375°
0.46875°
0.234375°
0.1171875°
0.05859375°
0.029296875°
45°
22.5°
11.25°
5.625°
2.8125°
1.40625°
0.703125°
0.3515625°
0.17578125°
0.087890625°
0.043945313°



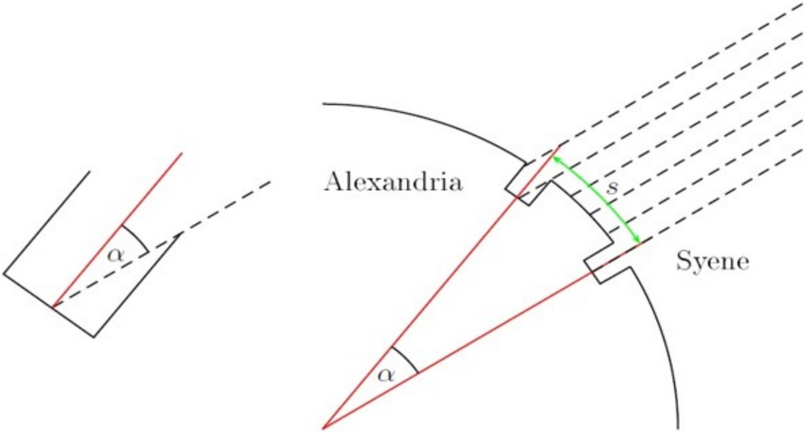
$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \overline{FH}+\overline{HC}=\overline{ID}+\overline{HC}\\ &= \overline{MD}\cdot\sin(\alpha)+\overline{CD}\cdot\cos(\alpha)\\ &= \cos(\beta)\sin(\alpha)+\sin(\beta)\cos(\alpha)\end{aligned}$$

Skelett einer Sinustafel



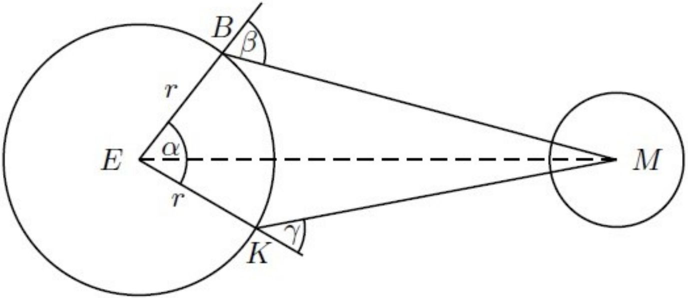
Epilog: Die Vermessung der Welt

Eratosthenes Erdumfang



Epilog: Die Vermessung der Welt

Abstand Erde-Mond

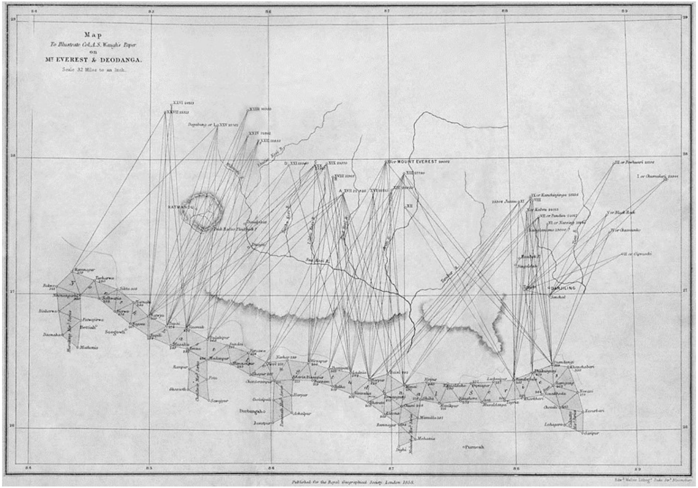


Epilog: Die Vermessung der Welt

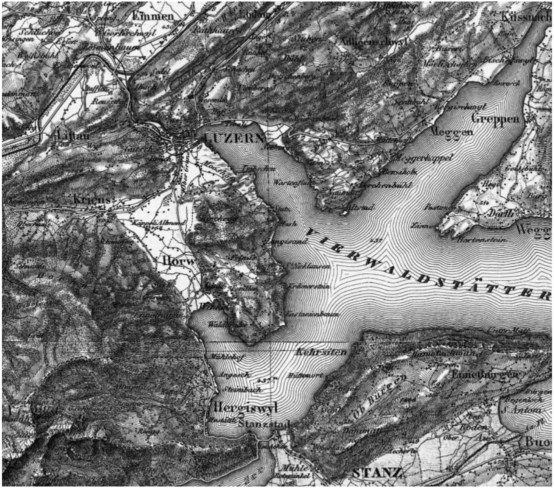
Bestimmung des Urmeters

Epilog: Die Vermessung der Welt

Vermessung der Bergriesen

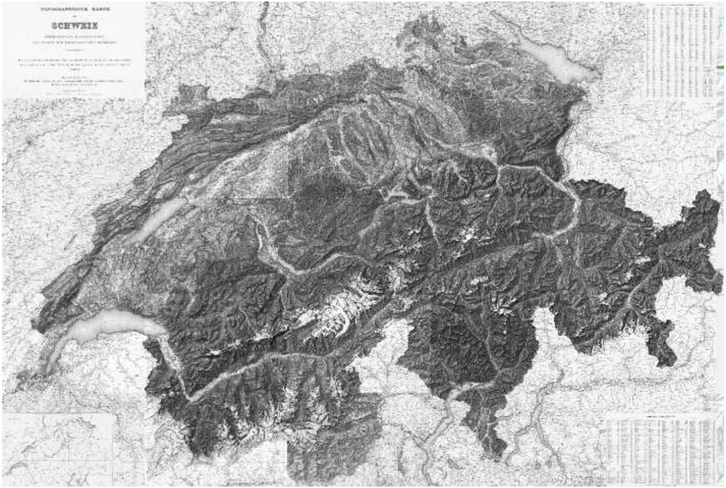


Epilog: Vermessung der Welt
Dufourkarte



Epilog: Vermessung der Welt

Dufourkarte



Literatur / Quellen

Webseite der Gesellschaft für Lehrkunstdidaktik: www.lehrkunst.org

GERWIG, MARIO / WILDHIRT, SUSANNE (Hrsg.) (2013): *Lehrkunstdidaktik.* MU - der Mathematikunterricht. Heft 6 / 2013. Seelze: Friedrich-Verlag.

GLOWATZKI, E. & GÖTTSCHE, H. (1990): *Die Tafeln des Regiomontanus. Ein Jahrhundertwerk.* München: Institut für Geschichte der Naturwissenschaften.

GROSJEAN, GEORGES (2013): *Geschichte der Kartographie* (3. neu bearb. Aufl.). Bern: Geographica Bernensia.

GUGERLI, DAVID & SPEICH, DANIEL (2002): *Topografien einer Nation. Politik, kartografische Ordnung und Landschaft im 19. Jahrhundert.* Zürich: Chronos Verlag.

WIECHMANN, JÜRGEN / WILDHIRT, SUSANNE (Hrsg.) (2016): *12 Unterrichtsmethoden. Vielfalt für die Praxis*. Weinheim, Basel: Beltz.