Kegelschnitte
Verschiedene Bereiche
Workshop TMU Kanti Freudenberg

Dima Nikolenkov

ETH

11 September 2024

Überblick – Kegelschnitte = KS

Überblick

- Theorie (Algebra / Analysis)

Klassifikation

Überblick

- Theorie (Algebra / Analysis) Klassifikation
- Theorie (Analytische Geometrie) 5 / 4 Punkte Satz

Überblick

- Theorie (Algebra / Analysis) Klassifikation
- Theorie (Analytische Geometrie) 5 / 4 Punkte Satz
- Faltkonstruktion (Schön) Handarbeit

Überblick

- Theorie (Algebra / Analysis) — Klassifikation
- Theorie (Analytische Geometrie) — 5 / 4 Punkte Satz
- Faltkonstruktion (Schön) — Handarbeit
- Anwendungen — An / An Geo

Überblick

- Theorie (Algebra / Analysis) — Klassifikation
- Theorie (Analytische Geometrie) — 5 / 4 Punkte Satz
- Faltkonstruktion (Schön) — Handarbeit
- Anwendungen — An / An Geo
- Hüllkurven – Schwerpunktfach — Technisches

Überblick

- Theorie (Algebra / Analysis) — Klassifikation
- Theorie (Analytische Geometrie) — 5 / 4 Punkte Satz
- Faltkonstruktion (Schön) — Handarbeit
- Anwendungen — An / An Geo
- Hüllkurven – Schwerpunktfach — Technisches
- Rationale Parameterisierung — Pythagoreische Tripel

Überblick

- Theorie (Algebra / Analysis) — Klassifikation
- Theorie (Analytische Geometrie) — 5 / 4 Punkte Satz
- Faltkonstruktion (Schön) — Handarbeit
- Anwendungen — An / An Geo
- Hüllkurven – Schwerpunktfach — Technisches
- Rationale Parameterisierung — Pythagoreische Tripel
- Aufgaben — DG / Integration

Überblick

- Theorie (Algebra / Analysis) — Klassifikation
- Theorie (Analytische Geometrie) — 5 / 4 Punkte Satz
- Faltkonstruktion (Schön) — Handarbeit
- Anwendungen — An / An Geo
- Hüllkurven – Schwerpunktfach — Technisches
- Rationale Parameterisierung — Pythagoreische Tripel
- Aufgaben — DG / Integration
- Algebra / Physik — Kreis $\cap$ Parabel

Setup

Es sei Oxy ein Koordinatensystem. Wir betrachten die Kurven der Form

$$F(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Niveaulinien der quadratischen Funktionen, o.B.d.A sei $a \geq 0$.
Je nach Wahl der Parameter a, b, c stellt diese Gleichung
einen Kreis, eine Ellipse, eine Hyperbel, eine Parabel oder eine degenerierte Kurve dar.

Example

Übung für die Lernenden: wähle a, b, c so, dass jeder Typ realisiert ist

Setup

Es sei Oxy ein Koordinatensystem. Wir betrachten die Kurven der Form

$$F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Niveaulinien der quadratischen Funktionen, o.B.d.A sei $a \geq 0$.
Je nach Wahl der Parameter a, b, c stellt diese Gleichung
einen Kreis, eine Ellipse, eine Hyperbel, eine Parabel oder eine degenerierte Kurve dar.

Example

Übung für die Lernenden: wähle a, b, c so, dass jeder Typ realisiert ist

Setup

Es sei Oxy ein Koordinatensystem. Wir betrachten die Kurven der Form

$$F(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Niveaulinien der quadratischen Funktionen, o.B.d.A sei $a \geq 0$.
Je nach Wahl der Parameter a, b, c stellt diese Gleichung
einen Kreis, eine Ellipse, eine Hyperbel, eine Parabel oder eine degenerierte Kurve dar.

Example

Übung für die Lernenden: wähle a, b, c so, dass jeder Typ realisiert ist

Welche Typen gibt es überhaupt?

https://www.geogebra.org/m/kqrhy5ns

Setup

Es sei Oxy ein Koordinatensystem. Wir betrachten die Kurven der Form

$$F(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Niveaulinien der quadratischen Funktionen, o.B.d.A sei $a \geq 0$.
Je nach Wahl der Parameter a, b, c stellt diese Gleichung
einen Kreis, eine Ellipse, eine Hyperbel, eine Parabel oder eine degenerierte Kurve dar.

Example

Übung für die Lernenden: wähle a, b, c so, dass jeder Typ realisiert ist

Welche Typen gibt es überhaupt?

Die Kurven zweiter Ordnung $F(x,y) = 0$ teilen sich in zwei Klassen allgemeine (Ellipse, Parabel, Hyperbel) und degenerierte (ein paar (möglicherweise zusammenfallende) Geraden, Punkt, leere Menge).

$$\det F = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} \qquad \det F \neq 0 \iff F(x,y) = 0 \text{ ist allgemein.}$$

https://www.geogebra.org/m/kqrhy5ns

Metrische Klassifikation

Metrische Klassifikation

$$F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Metrische Klassifikation

$$F(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

a) Falls $a \cdot c - b^2 \neq 0$, dann ist die Kurve $F(x,y) = 0$ isometrisch zu

1. Ellipse $\dfrac{x^2}{a_1^2} + \dfrac{y^2}{a_2^2} = 1$
2. Hyperbel $\dfrac{x^2}{a_1^2} - \dfrac{y^2}{a_2^2} = 1$
3. einem Paar von Geraden $\dfrac{x^2}{a_1^2} = \dfrac{y^2}{a_2^2}$
4. einem Punkt oder einer leeren Menge

b) Falls $a \cdot c - b^2 = 0$, dann ist die Kurve $F(x,y) = 0$ isometrisch zu

1. Parabel $x^2 = 2py$
2. einem Paar paralleler Geraden $x^2 = d^2$
3. einem Paar zusammenfallender Geraden $x^2 = 0$ oder der leeren Menge

Geometrie → Analysis

Geometrie $\rightarrow$ Analysis

Die Menge der Punkte P für die die Summe (Differenz) der Abstände zu zwei Punkten F_1 und F_2 konstant ist, ist eine Ellipse (Hyperbel).

Die Menge der Punkte P für die die Summe (Differenz) der Abstände zu zwei Punkten F_1 und F_2 konstant ist, ist eine Ellipse (Hyperbel).

Beweis:

Geometrie $\rightarrow$ Analysis

Die Menge der Punkte P für die die Summe (Differenz) der Abstände zu zwei Punkten F_1 und F_2 konstant ist, ist eine Ellipse (Hyperbel).

Beweis:

- Wir setzen den Ursprung des Koordinatensystems in die Mitte zwischen F_1 und F_2 und legen die $x-$Achse durch F_1 und F_2. $F_{1,2} = (\pm c, 0)$, $P = (x, y)$ und $\|PF_1\| + \|PF_2\| = 2a_1$.

Geometrie $\rightarrow$ Analysis

Die Menge der Punkte P für die die Summe (Differenz) der Abstände zu zwei Punkten F_1 und F_2 konstant ist, ist eine Ellipse (Hyperbel).

Beweis:

- Wir setzen den Ursprung des Koordinatensystems in die Mitte zwischen F_1 und F_2 und legen die $x-$Achse durch F_1 und F_2. $F_{1,2} = (\pm c, 0)$, $P = (x, y)$ und $\|PF_1\| + \|PF_2\| = 2a_1$.
- Dann gilt

$$\underbrace{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}_{\|PF_1\|} + \underbrace{\sqrt{(x+c)^2+y^2}}_{\|PF_2\|} = 2a_1 \Rightarrow (x-c)^2 + y^2 = 4a_1^2 - 4a_1\sqrt{(x+c)^2+y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

Die Menge der Punkte P für die die Summe (Differenz) der Abstände zu zwei Punkten F_1 und F_2 konstant ist, ist eine Ellipse (Hyperbel).

Beweis:

- Wir setzen den Ursprung des Koordinatensystems in die Mitte zwischen F_1 und F_2 und legen die $x-$Achse durch F_1 und F_2. $F_{1,2} = (\pm c, 0)$, $P = (x, y)$ und $\|PF_1\| + \|PF_2\| = 2a_1$.
- Dann gilt

$$\underbrace{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}_{\|PF_1\|} + \underbrace{\sqrt{(x+c)^2+y^2}}_{\|PF_2\|} = 2a_1 \Rightarrow (x-c)^2 + y^2 = 4a_1^2 - 4a_1\sqrt{(x+c)^2+y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

$$a_1\sqrt{(x+c)^2+y^2} = a_1^2 + cx \quad \Rightarrow \quad a_1^2(x^2+2cx+c^2) + a_1^2y^2 = a_1^4 + 2a_1^2cx + c^2x^2$$

Die Menge der Punkte P für die die Summe (Differenz) der Abstände zu zwei Punkten F_1 und F_2 konstant ist, ist eine Ellipse (Hyperbel).

Beweis:

- Wir setzen den Ursprung des Koordinatensystems in die Mitte zwischen F_1 und F_2 und legen die $x-$Achse durch F_1 und F_2. $F_{1,2} = (\pm c, 0)$, $P = (x, y)$ und $\|PF_1\| + \|PF_2\| = 2a_1$.
- Dann gilt

$$\underbrace{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}_{\|PF_1\|} + \underbrace{\sqrt{(x+c)^2+y^2}}_{\|PF_2\|} = 2a_1 \Rightarrow (x-c)^2 + y^2 = 4a_1^2 - 4a_1\sqrt{(x+c)^2+y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

$$a_1\sqrt{(x+c)^2+y^2} = a_1^2 + cx \quad \Rightarrow \quad a_1^2(x^2+2cx+c^2) + a_1^2y^2 = a_1^4 + 2a_1^2cx + c^2x^2$$

$$(a_1^2 - c^2)x^2 + a_1^2y^2 = a_1^2(a_1^2 - c^2) \quad \overset{{a_2}^2 = a_1^2 - c^2}{\Rightarrow} \quad \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{{a_2}^2} = 1 \qquad \square$$

Die Menge der Punkte P für die die Summe (Differenz) der Abstände zu zwei Punkten F_1 und F_2 konstant ist, ist eine Ellipse (Hyperbel).

Beweis:

- Wir setzen den Ursprung des Koordinatensystems in die Mitte zwischen F_1 und F_2 und legen die $x-$Achse durch F_1 und F_2. $F_{1,2} = (\pm c, 0)$, $P = (x, y)$ und $\|PF_1\| + \|PF_2\| = 2a_1$.
- Dann gilt

$$\underbrace{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}_{\|PF_1\|} + \underbrace{\sqrt{(x+c)^2+y^2}}_{\|PF_2\|} = 2a_1 \Rightarrow (x-c)^2 + y^2 = 4a_1^2 - 4a_1\sqrt{(x+c)^2+y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

$$a_1\sqrt{(x+c)^2+y^2} = a_1^2 + cx \quad \Rightarrow \quad a_1^2(x^2+2cx+c^2) + a_1^2y^2 = a_1^4 + 2a_1^2cx + c^2x^2$$

$$(a_1^2-c^2)x^2 + a_1^2y^2 = a_1^2(a_1^2-c^2) \quad \overset{{a_2}^2=a_1^2-c^2}{\Longrightarrow} \quad \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{{a_2}^2} = 1 \qquad \square$$

Übung für die Lernenden: den Beweis für die Hyperbel durchführen.

Überblick

5 und 4 Punkte Sätze

Theorem

Durch gegebene 5 Punkte auf der Ebene kann man GENAU eine quadratische Kurve 2. Ordnung (qK2) legen $\iff$
keine 4 Punkte liegen auf einer Geraden

5 und 4 Punkte Sätze

Theorem

Durch gegebene 5 Punkte auf der Ebene kann man GENAU eine quadratische Kurve 2. Ordnung (qK2) legen $\Longleftrightarrow$
keine 4 Punkte liegen auf einer Geraden

Theorem

Es sei: keine 3 Punkte aus P_1, P_2, P_3, P_4 liegen auf einer Geraden. Dann gilt
wenn $F(x, y) = 0$ die Gleichung einer qK2 ist, die durch diese 4 Punkte geht, dann gibt es zwei Zahlen λ und μ so, dass

$$F(x, y) = \lambda \cdot g_{P_1P_2} \cdot g_{P_3P_4} + \mu \cdot g_{P_2P_3} \cdot g_{P_1P_4}$$

Dabei ist $g_{P_iP_j}$ die Gleichung der Geraden durch P_i und P_j.

Stelle die Gleichung einer KS durch 5 Punkte $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1), (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

Überblick

Faltkonstruktion – Grundlagenfach

Example

Lernende "SEHEN" Kegelschnitte

Example

Lernende "SEHEN" Kegelschnitte

- Wähle einen Punkt F auf dem Blatt (circa 4cm weg vom Rand)

Faltkonstruktion – Grundlagenfach

Example

Lernende "SEHEN" Kegelschnitte

- Wähle einen Punkt F auf dem Blatt (circa 4cm weg vom Rand)
- Falte das Papier mehrfach so, dass der Rand durch den Punkt F geht.

Faltkonstruktion – Grundlagenfach

Example

Lernende "SEHEN" Kegelschnitte

- Wähle einen Punkt F auf dem Blatt (circa 4cm weg vom Rand)
- Falte das Papier mehrfach so, dass der Rand durch den Punkt F geht.
- Mehrere Punkte auf der Geraden markieren.

Faltkonstruktion – Grundlagenfach

Example

Lernende "SEHEN" Kegelschnitte

- Wähle einen Punkt F auf dem Blatt (circa 4cm weg vom Rand)
- Falte das Papier mehrfach so, dass der Rand durch den Punkt F geht.
- Mehrere Punkte auf der Geraden markieren.

Faltkonstruktion – Grundlagenfach

Example

Lernende "SEHEN" Kegelschnitte

- Wähle einen Punkt F auf dem Blatt (circa 4cm weg vom Rand)
- Falte das Papier mehrfach so, dass der Rand durch den Punkt F geht.
- Mehrere Punkte auf der Geraden markieren.

- Wähle einen Kreis.

Faltkonstruktion – Grundlagenfach

Example

Lernende "SEHEN" Kegelschnitte

- Wähle einen Punkt F auf dem Blatt (circa 4cm weg vom Rand)
- Falte das Papier mehrfach so, dass der Rand durch den Punkt F geht.
- Mehrere Punkte auf der Geraden markieren.

- Wähle einen Kreis.
- Wähle einen Punkt F innerhalb (ausserhalb) des Kreises.

Faltkonstruktion – Grundlagenfach

Example

Lernende "SEHEN" Kegelschnitte

- Wähle einen Punkt F auf dem Blatt (circa 4cm weg vom Rand)
- Falte das Papier mehrfach so, dass der Rand durch den Punkt F geht.
- Mehrere Punkte auf der Geraden markieren.

- Wähle einen Kreis.
- Wähle einen Punkt F innerhalb (ausserhalb) des Kreises.
- Wähle einen Punkt A auf der Kreislinie

Faltkonstruktion – Grundlagenfach

Example

Lernende "SEHEN" Kegelschnitte

- Wähle einen Punkt F auf dem Blatt (circa 4cm weg vom Rand)
- Falte das Papier mehrfach so, dass der Rand durch den Punkt F geht.
- Mehrere Punkte auf der Geraden markieren.

- Wähle einen Kreis.
- Wähle einen Punkt F innerhalb (ausserhalb) des Kreises.
- Wähle einen Punkt A auf der Kreislinie
- Falte das Papier mehrfach so, dass der Punkt A auf den Punkt F zu. liegen kommt.

Wie sieht die Hüllkurve aus?
https://www.geogebra.org/m/gmepkczu

Hyperbeln mit senkrechten Asymptoten

Theorem

Jede Hyperbel, die durch die Eckpunkte eines Dreiecks ABC und den Höhenschnittpunkt H geht, ist eine Hyperbel mit senkrechten Asymptoten.

Eignet sich für **eine böse "reverse engineering" Aufgabenstellung:**
Ein Dreieck ABC mit Koordinaten der Eckpunkte ... ist gegeben.

a) Bestimme die Koordinaten des Höhenschnittpunktes H.
b) Stelle eine Gleichung EINER Hyperbel auf, die durch die Punkte A, B, C, H geht.
Oder man gibt den 5.ten Punkt damit es schöner wird.
c) Zeige, dass ihre Asymptoten senkrecht aufeinander stehen.

Hyperbeln mit senkrechten Asymptoten

Theorem

Jede Hyperbel, die durch die Eckpunkte eines Dreiecks ABC und den Höhenschnittpunkt H geht, ist eine Hyperbel mit senkrechten Asymptoten.

Eignet sich für **eine böse "reverse engineering" Aufgabenstellung:**
Ein Dreieck ABC mit Koordinaten der Eckpunkte ... ist gegeben.

a) Bestimme die Koordinaten des Höhenschnittpunktes H.

b) Stelle eine Gleichung EINER Hyperbel auf, die durch die Punkte A, B, C, H geht.
Oder man gibt den 5.ten Punkt damit es schöner wird.

c) Zeige, dass ihre Asymptoten senkrecht aufeinander stehen.

Aufgaben – KS und Geometrie / Analysis

Flächeninhalt eines Dreiecks

Theorem

Den Flächeninhalt des Dreiecks, das durch eine Tangente zu einer Hyperbel und zwei Asymptoten dieser Hyperbel entsteht, ist gleich für alle Tangenten.

Flächeninhalt eines Dreiecks

Theorem

Den Flächeninhalt des Dreiecks, das durch eine Tangente zu einer Hyperbel und zwei Asymptoten dieser Hyperbel entsteht, ist gleich für alle Tangenten.

Übung für die Lernenden (einfachere Version Grundlagenfach):
Stelle die Gleichung einer Tangente an $y = \frac{a}{x}$ und berechne die Fläche des Dreiecks zwischen dieser Tangente und den Koordinatenachsen.

Flächeninhalt eines Dreiecks

Theorem

Den Flächeninhalt des Dreiecks, das durch eine Tangente zu einer Hyperbel und zwei Asymptoten dieser Hyperbel entsteht, ist gleich für alle Tangenten.

Übung für die Lernenden (einfachere Version Grundlagenfach):
Stelle die Gleichung einer Tangente an $y = \frac{a}{x}$ und berechne die Fläche des Dreiecks zwischen dieser Tangente und den Koordinatenachsen.

Man kann in der Klasse verschiedene x_0 oder a verteilen und die Antworten vergleichen lassen und diskutieren.

Lösung: Hyperbel, Tangente, Dreieck

Lösung: Hyperbel, Tangente, Dreieck

Example

Tangente zu einer Hyperbel bildet mit 2 Asymptoten ein Dreieck mit konstantem Flächeninhalt

Lösung:

- $y = \frac{a}{x} = ax^{-1} \Longrightarrow y' = -ax^{-2}$ liefert die Steigung
- Tangente t im (x_0, ax_0^{-1}) : $\boxed{t : y - ax_0^{-1} = -ax_0^{-2} \cdot (x - x_0)}$
- $t \cap OY$: $y-$Achse Abschnitt: $x = 0 \Longrightarrow 2ax_0^{-1}$
- $t \cap OX$: $x-$Achse Abschnitt:
  $y = 0 \iff 0 = -ax_0^{-2} \cdot x + 2ax_0^{-1} \iff x = 2x_0$
- Fläche des Dreiecks $F = \frac{1}{2} \cdot 2x_0 \cdot 2ax_0^{-1} = \boxed{2a}$

Faltkonstruktion Parabel – Technisches

Definition

Hüllkurve einer Kurvenschar $F(t, x, y) = 0$ ist die Kurve, die durch das folgende System definiert wird

$$\begin{cases} F(t, x, y) = 0 \\ \frac{dF}{dt}(t, x, y) = 0 \end{cases}$$

KS und Geometrie

Überblick

Faltkonstruktion Parabel – Technisches

Definition

Hüllkurve einer Kurvenschar $F(t, x, y) = 0$ ist die Kurve, die durch das folgende System definiert wird

$$\begin{cases} F(t, x, y) = 0 \\ \frac{dF}{dt}(t, x, y) = 0 \end{cases}$$

KS und Geometrie

Überblick

KS und Zahlentheorie: Darstellung $n = x^2 - y^2$

KS und Zahlentheorie: Darstellung $n = x^2 - y^2$

Example

KS: Auf welchen Hyperbeln $x^2 - y^2 = n \in \mathbb{N}$ gibt es ganzzahlige Punkte?
Welche Zahlen können als Differenz zweier Quadratzahlen dargestellt werden?

KS und Zahlentheorie: Darstellung $n = x^2 - y^2$

Example

KS: Auf welchen Hyperbeln $x^2 - y^2 = n \in \mathbb{N}$ gibt es ganzzahlige Punkte?
Welche Zahlen können als Differenz zweier Quadratzahlen dargestellt werden?

- Testen: $1 = 1^2 - 0^2$, 2 hmm – NO, $3 = 2^2 - 1^2$, $4 = 2^2 - 0^2$, $5 = 3^2 - 2^2$

KS und Zahlentheorie: Darstellung $n = x^2 - y^2$

Example

KS: Auf welchen Hyperbeln $x^2 - y^2 = n \in \mathbb{N}$ gibt es ganzzahlige Punkte?
Welche Zahlen können als Differenz zweier Quadratzahlen dargestellt werden?

- Testen: $1 = 1^2 - 0^2$, 2 hmm – NO, $3 = 2^2 - 1^2$, $4 = 2^2 - 0^2$, $5 = 3^2 - 2^2$
- Muster: $1 = 1^2 - 0^2$, $3 = 2^2 - 1^2$, $5 = 3^2 - 2^2$, Aha! $7 = 4^2 - 3^2$, etc

KS und Zahlentheorie: Darstellung $n = x^2 - y^2$

Example

KS: Auf welchen Hyperbeln $x^2 - y^2 = n \in \mathbb{N}$ gibt es ganzzahlige Punkte?
Welche Zahlen können als Differenz zweier Quadratzahlen dargestellt werden?

- Testen: $1 = 1^2 - 0^2$, 2 hmm – NO, $3 = 2^2 - 1^2$, $4 = 2^2 - 0^2$, $5 = 3^2 - 2^2$
- Muster: $1 = 1^2 - 0^2$, $3 = 2^2 - 1^2$, $5 = 3^2 - 2^2$, Aha! $7 = 4^2 - 3^2$, etc
- Vermutung: bei ungeraden wird es gehen.

KS und Zahlentheorie: Darstellung $n = x^2 - y^2$

Example

KS: Auf welchen Hyperbeln $x^2 - y^2 = n \in \mathbb{N}$ gibt es ganzzahlige Punkte?
Welche Zahlen können als Differenz zweier Quadratzahlen dargestellt werden?

- Testen: $1 = 1^2 - 0^2$, 2 hmm – NO, $3 = 2^2 - 1^2$, $4 = 2^2 - 0^2$, $5 = 3^2 - 2^2$
- Muster: $1 = 1^2 - 0^2$, $3 = 2^2 - 1^2$, $5 = 3^2 - 2^2$, Aha! $7 = 4^2 - 3^2$, etc
- Vermutung: bei ungeraden wird es gehen.
  Ungerade: $2n - 1$, Differenz zweier Quadratzahlen:
  $n^2 - (n-1)^2 = n^2 - (n^2 - 2n + 1) = 2n - 1$ □

KS und Zahlentheorie: Darstellung $n = x^2 - y^2$

Example

KS: Auf welchen Hyperbeln $x^2 - y^2 = n \in \mathbb{N}$ gibt es ganzzahlige Punkte?
Welche Zahlen können als Differenz zweier Quadratzahlen dargestellt werden?

- Testen: $1 = 1^2 - 0^2$, 2 hmm – NO, $3 = 2^2 - 1^2$, $4 = 2^2 - 0^2$, $5 = 3^2 - 2^2$
- Muster: $1 = 1^2 - 0^2$, $3 = 2^2 - 1^2$, $5 = 3^2 - 2^2$, Aha! $7 = 4^2 - 3^2$, etc
- Vermutung: bei ungeraden wird es gehen.
  Ungerade: $2n - 1$, Differenz zweier Quadratzahlen:
  $n^2 - (n-1)^2 = n^2 - (n^2 - 2n + 1) = 2n - 1$ $\square$
- Wie ist es mit geraden Zahlen?

KS und Zahlentheorie: Darstellung $n = x^2 - y^2$

Example

KS: Auf welchen Hyperbeln $x^2 - y^2 = n \in \mathbb{N}$ gibt es ganzzahlige Punkte?
Welche Zahlen können als Differenz zweier Quadratzahlen dargestellt werden?

- Testen: $1 = 1^2 - 0^2$, 2 hmm – NO, $3 = 2^2 - 1^2$, $4 = 2^2 - 0^2$, $5 = 3^2 - 2^2$
- Muster: $1 = 1^2 - 0^2$, $3 = 2^2 - 1^2$, $5 = 3^2 - 2^2$, Aha! $7 = 4^2 - 3^2$, etc
- Vermutung: bei ungeraden wird es gehen.
  Ungerade: $2n - 1$, Differenz zweier Quadratzahlen:
  $n^2 - (n-1)^2 = n^2 - (n^2 - 2n + 1) = 2n - 1$ □
- Wie ist es mit geraden Zahlen?
  2 - No, $4 = 2^2 - 0^2$, 6 - No, $8 = 3^2 - 1^2$, 10 - No, $12 = 4^2 - 2^2$, 14 - No

KS und Zahlentheorie: Darstellung $n = x^2 - y^2$

Example

KS: Auf welchen Hyperbeln $x^2 - y^2 = n \in \mathbb{N}$ gibt es ganzzahlige Punkte?
Welche Zahlen können als Differenz zweier Quadratzahlen dargestellt werden?

- Testen: $1 = 1^2 - 0^2$, 2 hmm – NO, $3 = 2^2 - 1^2$, $4 = 2^2 - 0^2$, $5 = 3^2 - 2^2$
- Muster: $1 = 1^2 - 0^2$, $3 = 2^2 - 1^2$, $5 = 3^2 - 2^2$, Aha! $7 = 4^2 - 3^2$, etc
- Vermutung: bei ungeraden wird es gehen.
  Ungerade: $2n - 1$, Differenz zweier Quadratzahlen:
  $n^2 - (n-1)^2 = n^2 - (n^2 - 2n + 1) = 2n - 1$ □
- Wie ist es mit geraden Zahlen?
  2 - No, $4 = 2^2 - 0^2$, 6 - No, $8 = 3^2 - 1^2$, 10 - No, $12 = 4^2 - 2^2$, 14 - No
- Vermutung: A. $4n$ geht, B. $4n + 2$ geht nicht.

KS und Zahlentheorie: Darstellung $n = x^2 - y^2$

Example

KS: Auf welchen Hyperbeln $x^2 - y^2 = n \in \mathbb{N}$ gibt es ganzzahlige Punkte?
Welche Zahlen können als Differenz zweier Quadratzahlen dargestellt werden?

- Testen: $1 = 1^2 - 0^2$, 2 hmm – NO, $3 = 2^2 - 1^2$, $4 = 2^2 - 0^2$, $5 = 3^2 - 2^2$
- Muster: $1 = 1^2 - 0^2$, $3 = 2^2 - 1^2$, $5 = 3^2 - 2^2$, Aha! $7 = 4^2 - 3^2$, etc
- Vermutung: bei ungeraden wird es gehen.
  Ungerade: $2n - 1$, Differenz zweier Quadratzahlen:
  $n^2 - (n-1)^2 = n^2 - (n^2 - 2n + 1) = 2n - 1$ □
- Wie ist es mit geraden Zahlen?
  2 - No, $4 = 2^2 - 0^2$, 6 - No, $8 = 3^2 - 1^2$, 10 - No, $12 = 4^2 - 2^2$, 14 - No
- Vermutung: A. $4n$ geht, B. $4n + 2$ geht nicht.
  A.: $4n$: $n^2 - (n-2)^2 = 4n - 4$ □

KS und Zahlentheorie: Darstellung $n = x^2 - y^2$

Example

KS: Auf welchen Hyperbeln $x^2 - y^2 = n \in \mathbb{N}$ gibt es ganzzahlige Punkte?
Welche Zahlen können als Differenz zweier Quadratzahlen dargestellt werden?

- Testen: $1 = 1^2 - 0^2$, 2 hmm – NO, $3 = 2^2 - 1^2$, $4 = 2^2 - 0^2$, $5 = 3^2 - 2^2$
- Muster: $1 = 1^2 - 0^2$, $3 = 2^2 - 1^2$, $5 = 3^2 - 2^2$, Aha! $7 = 4^2 - 3^2$, etc
- Vermutung: bei ungeraden wird es gehen.
  Ungerade: $2n - 1$, Differenz zweier Quadratzahlen:
  $n^2 - (n-1)^2 = n^2 - (n^2 - 2n + 1) = 2n - 1$ $\square$
- Wie ist es mit geraden Zahlen?
  2 - No, $4 = 2^2 - 0^2$, 6 - No, $8 = 3^2 - 1^2$, 10 - No, $12 = 4^2 - 2^2$, 14 - No
- Vermutung: A. $4n$ geht, B. $4n + 2$ geht nicht.
  A.: $4n : n^2 - (n-2)^2 = 4n - 4$ $\square$
  B.: $4n + 2$. Es gilt $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$
  und x und y müssen beide gerade oder beide ungerade sein.

KS und Zahlentheorie: Darstellung $n = x^2 - y^2$

Example

KS: Auf welchen Hyperbeln $x^2 - y^2 = n \in \mathbb{N}$ gibt es ganzzahlige Punkte?
Welche Zahlen können als Differenz zweier Quadratzahlen dargestellt werden?

- Testen: $1 = 1^2 - 0^2$, 2 hmm – NO, $3 = 2^2 - 1^2$, $4 = 2^2 - 0^2$, $5 = 3^2 - 2^2$
- Muster: $1 = 1^2 - 0^2$, $3 = 2^2 - 1^2$, $5 = 3^2 - 2^2$, Aha! $7 = 4^2 - 3^2$, etc
- Vermutung: bei ungeraden wird es gehen.
  Ungerade: $2n - 1$, Differenz zweier Quadratzahlen:
  $n^2 - (n-1)^2 = n^2 - (n^2 - 2n + 1) = 2n - 1$ $\square$
- Wie ist es mit geraden Zahlen?
  2 - No, $4 = 2^2 - 0^2$, 6 - No, $8 = 3^2 - 1^2$, 10 - No, $12 = 4^2 - 2^2$, 14 - No
- Vermutung: A. $4n$ geht, B. $4n + 2$ geht nicht.
  A.: $4n : n^2 - (n-2)^2 = 4n - 4$ $\square$
  B.: $4n + 2$. Es gilt $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$
  und x und y müssen beide gerade oder beide ungerade sein.
  Dann ist die RS durch 4 teilbar, da jede Klammer gerade ist. $\square$

Überblick

Idee: Rationale Parameterizierung

Idee: Rationale Parameterizierung

- Wähle einen Punkt (x_0, y_0) auf einem Kegelschnitt

Idee: Rationale Parameterizierung

- Wähle einen Punkt (x_0, y_0) auf einem Kegelschnitt
- Betrachte eine Gerade $y = y_0 + t \cdot (x - x_0)$ und finde die Koordinaten des zweiten Schnittpunktes.

Idee: Rationale Parameterizierung

- Wähle einen Punkt (x_0, y_0) auf einem Kegelschnitt
- Betrachte eine Gerade $y = y_0 + t \cdot (x - x_0)$ und finde die Koordinaten des zweiten Schnittpunktes.
- Setzt man die Gleichung der Geraden in die Gleichung des KS ein, bekommt man eine quadratische Gleichung, deren EINE Lösung schon bekannt ist – x_0

Idee: Rationale Parameterizierung

- Wähle einen Punkt (x_0, y_0) auf einem Kegelschnitt
- Betrachte eine Gerade $y = y_0 + t \cdot (x - x_0)$ und finde die Koordinaten des zweiten Schnittpunktes.
- Setzt man die Gleichung der Geraden in die Gleichung des KS ein, bekommt man eine quadratische Gleichung, deren EINE Lösung schon bekannt ist – x_0
- Vieta's Satz erlaubt die Koordinaten des zweiten Punktes in Abhängigkeit von t zu berechnen.

Das nennt sich rationale Parameterisation: läuft t von $-\infty$ bis ∞ bewegt sich der Punkt auf dem Kegelschnitt.

Überblick

Beispiel Pythagoreische Tripel $a, b, c \in \mathbb{N} : a^2 + b^2 = c^2$

Beispiel Pythagoreische Tripel $a, b, c \in \mathbb{N} : a^2 + b^2 = c^2$

- KS: $x^2 + y^2 = 1$. Wir wählen den Punkt $(1, 0)$.

Beispiel Pythagoreische Tripel $a, b, c \in \mathbb{N} : a^2 + b^2 = c^2$

- KS: $x^2 + y^2 = 1$. Wir wählen den Punkt $(1, 0)$.
- Geradenschar $y = t(x - 1)$.

Beispiel Pythagoreische Tripel $a, b, c \in \mathbb{N} : a^2 + b^2 = c^2$

- KS: $x^2 + y^2 = 1$. Wir wählen den Punkt $(1, 0)$.
- Geradenschar $y = t(x - 1)$.
- Einsetzen:
  $x^2 + t^2(x^2 - 2x + 1) = 1 \iff (1 + t^2)x^2 + (-2t^2)x + (t^2 - 1) = 0$

Beispiel Pythagoreische Tripel $a, b, c \in \mathbb{N} : a^2 + b^2 = c^2$

- KS: $x^2 + y^2 = 1$. Wir wählen den Punkt $(1, 0)$.
- Geradenschar $y = t(x - 1)$.
- Einsetzen:
  $x^2 + t^2(x^2 - 2x + 1) = 1 \iff (1 + t^2)x^2 + (-2t^2)x + (t^2 - 1) = 0$
- Das Produkt der Lösungen ist $\dfrac{t^2 - 1}{1 + t^2}$ und eine Lösung ist 1.

Beispiel Pythagoreische Tripel $a, b, c \in \mathbb{N} : a^2 + b^2 = c^2$

- KS: $x^2 + y^2 = 1$. Wir wählen den Punkt $(1, 0)$.
- Geradenschar $y = t(x - 1)$.
- Einsetzen:
  $x^2 + t^2(x^2 - 2x + 1) = 1 \iff (1 + t^2)x^2 + (-2t^2)x + (t^2 - 1) = 0$
- Das Produkt der Lösungen ist $\dfrac{t^2 - 1}{1 + t^2}$ und eine Lösung ist 1.
- D.h. die 2.te Lösung ist $x_1 = \dfrac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$ und $y_1 = \dfrac{-2t}{t^2 + 1}$

Beispiel Pythagoreische Tripel $a, b, c \in \mathbb{N} : a^2 + b^2 = c^2$

- KS: $x^2 + y^2 = 1$. Wir wählen den Punkt $(1, 0)$.
- Geradenschar $y = t(x - 1)$.
- Einsetzen:
  $x^2 + t^2(x^2 - 2x + 1) = 1 \iff (1 + t^2)x^2 + (-2t^2)x + (t^2 - 1) = 0$
- Das Produkt der Lösungen ist $\dfrac{t^2 - 1}{1 + t^2}$ und eine Lösung ist 1.
- D.h. die 2.te Lösung ist $x_1 = \dfrac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$ und $y_1 = \dfrac{-2t}{t^2 + 1}$

Wenn $t = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, bekommt man einen Punkt auf dem Einheitskreis mit rationalen Koordinaten,

Beispiel Pythagoreische Tripel $a, b, c \in \mathbb{N} : a^2 + b^2 = c^2$

- KS: $x^2 + y^2 = 1$. Wir wählen den Punkt $(1, 0)$.
- Geradenschar $y = t(x - 1)$.
- Einsetzen:
  $x^2 + t^2(x^2 - 2x + 1) = 1 \iff (1 + t^2)x^2 + (-2t^2)x + (t^2 - 1) = 0$
- Das Produkt der Lösungen ist $\dfrac{t^2 - 1}{1 + t^2}$ und eine Lösung ist 1.
- D.h. die 2.te Lösung ist $x_1 = \dfrac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$ und $y_1 = \dfrac{-2t}{t^2 + 1}$

Wenn $t = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, bekommt man einen Punkt auf dem Einheitskreis mit rationalen Koordinaten, was einem pythagoreischen Triple entspricht.

Beispiel Pythagoreische Tripel $a, b, c \in \mathbb{N} : a^2 + b^2 = c^2$

- KS: $x^2 + y^2 = 1$. Wir wählen den Punkt $(1, 0)$.
- Geradenschar $y = t(x - 1)$.
- Einsetzen:
  $x^2 + t^2(x^2 - 2x + 1) = 1 \iff (1 + t^2)x^2 + (-2t^2)x + (t^2 - 1) = 0$
- Das Produkt der Lösungen ist $\dfrac{t^2 - 1}{1 + t^2}$ und eine Lösung ist 1.
- D.h. die 2.te Lösung ist $x_1 = \dfrac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$ und $y_1 = \dfrac{-2t}{t^2 + 1}$

Wenn $t = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, bekommt man einen Punkt auf dem Einheitskreis mit rationalen Koordinaten, was einem pythagoreischen Triple entspricht.

Example

$t = 2 \to x_1 = \frac{3}{5}, y_1 = -\frac{4}{5} \iff a = 3, b = 4, c = 5.$

$t = 5 \to x_1 = \frac{12}{13}, y_1 = -\frac{5}{13} \iff a = 5, b = 12, c = 13.$

Aufgaben DG / Integration

Example

Stelle eine DG auf, deren Lösungskurven Parabeln sind, die durch den Ursprung gehen und zur $x-$Achse symmetrisch sind.

Example

Stelle eine DG auf, deren Lösungskurven Parabeln sind, die durch den Ursprung gehen und zur $x-$Achse symmetrisch sind.

Lösung:

Example

Stelle eine DG auf, deren Lösungskurven Parabeln sind, die durch den Ursprung gehen und zur $x-$Achse symmetrisch sind.

Lösung:

- $y^2 = cx$, nach x ableiten $2y \cdot y' = c$

Example

Stelle eine DG auf, deren Lösungskurven Parabeln sind, die durch den Ursprung gehen und zur $x-$Achse symmetrisch sind.

Lösung:

- $y^2 = cx$, nach x ableiten $2y \cdot y' = c$
- $c = \dfrac{y^2}{x}$ einsetzen

Aufgaben DG / Integration

Example

Stelle eine DG auf, deren Lösungskurven Parabeln sind, die durch den Ursprung gehen und zur $x-$Achse symmetrisch sind.

Lösung:

- $y^2 = cx$, nach x ableiten $2y \cdot y' = c$
- $c = \dfrac{y^2}{x}$ einsetzen
- y kürzen, mit x multiplizieren.

Example

Stelle eine DG auf, deren Lösungskurven Parabeln sind, die durch den Ursprung gehen und zur $x-$Achse symmetrisch sind.

Lösung:

- $y^2 = cx$, nach x ableiten $2y \cdot y' = c$
- $c = \dfrac{y^2}{x}$ einsetzen
- y kürzen, mit x multiplizieren.

Antwort: $2x \cdot y' - y = 0$

Example

Stelle eine DG auf, deren Lösungskurven Parabeln sind, die durch den Ursprung gehen und zur $x-$Achse symmetrisch sind.

Lösung:

- $y^2 = cx$, nach x ableiten $2y \cdot y' = c$
- $c = \dfrac{y^2}{x}$ einsetzen
- y kürzen, mit x multiplizieren.

Antwort: $2x \cdot y' - y = 0$

Übung für die Lernenden: Stelle eine DG auf, deren Lösungskurven Ellipsen mit konstanten grossen Achsen $2a$.

Example

Stelle eine DG auf, deren Lösungskurven Parabeln sind, die durch den Ursprung gehen und zur $x-$Achse symmetrisch sind.

Lösung:

- $y^2 = cx$, nach x ableiten $2y \cdot y' = c$
- $c = \dfrac{y^2}{x}$ einsetzen
- y kürzen, mit x multiplizieren.

Antwort: $2x \cdot y' - y = 0$

Übung für die Lernenden: Stelle eine DG auf, deren Lösungskurven Ellipsen mit konstanten grossen Achsen $2a$.

Antwort: $(a^2 - x^2)y' + xy = 0$ Oder löse die Gleichung …

Example

Eine Kurve geht durch den Ursprung und liegt in der Halbebene $y \geq 0$.
Jedes Rechteck, das durch den Ursprung und einen Kurvenpunkt definiert ist, dessen Seiten parallel zu Koordinatenachsen sind, teilt die Kurve in zwei Teile. Die Fläche des Teils unter der Kurve A ist halb so gross wie die Fläche des Teils oberhalb der Kurve.

Bestimme die Kurvengleichung.

Example

Eine Kurve geht durch den Ursprung und liegt in der Halbebene $y \geq 0$.
Jedes Rechteck, das durch den Ursprung und einen Kurvenpunkt definiert ist, dessen Seiten parallel zu Koordinatenachsen sind, teilt die Kurve in zwei Teile. Die Fläche des Teils unter der Kurve A ist halb so gross wie die Fläche des Teils oberhalb der Kurve.

Bestimme die Kurvengleichung.

Lösung:

$F_{\square} = xy$. Es sei die Gleichung der Kurve $y(x)$ und die Fläche unter der Kurve $A(x) = \int_0^x y(t)\,dt$.

Example

Eine Kurve geht durch den Ursprung und liegt in der Halbebene $y \geq 0$.
Jedes Rechteck, das durch den Ursprung und einen Kurvenpunkt definiert ist, dessen Seiten parallel zu Koordinatenachsen sind, teilt die Kurve in zwei Teile.
Die Fläche des Teils unter der Kurve A ist halb so gross wie die Fläche des Teils oberhalb der Kurve.

Bestimme die Kurvengleichung.

Lösung:

$F_{\square} = xy$. Es sei die Gleichung der Kurve $y(x)$ und die Fläche unter der Kurve $A(x) = \int_0^x y(t)\,dt$.
Dann gilt

$$F_{\square} - A = 2A$$

Example

Eine Kurve geht durch den Ursprung und liegt in der Halbebene $y \geq 0$.
Jedes Rechteck, das durch den Ursprung und einen Kurvenpunkt definiert ist, dessen Seiten parallel zu Koordinatenachsen sind, teilt die Kurve in zwei Teile. Die Fläche des Teils unter der Kurve A ist halb so gross wie die Fläche des Teils oberhalb der Kurve.

Bestimme die Kurvengleichung.

Lösung:

$F_\square = xy$. Es sei die Gleichung der Kurve $y(x)$ und die Fläche unter der Kurve $A(x) = \int_0^x y(t)\,dt$.

Dann gilt

$$F_\square - A = 2A \iff xy = 3\int_0^x y(t)\,dt$$

Aufgaben DG / Integration

Example

Eine Kurve geht durch den Ursprung und liegt in der Halbebene $y \geq 0$.
Jedes Rechteck, das durch den Ursprung und einen Kurvenpunkt definiert ist, dessen Seiten parallel zu Koordinatenachsen sind, teilt die Kurve in zwei Teile. Die Fläche des Teils unter der Kurve A ist halb so gross wie die Fläche des Teils oberhalb der Kurve.

Bestimme die Kurvengleichung.

Lösung:

$F_{\square} = xy$. Es sei die Gleichung der Kurve $y(x)$ und die Fläche unter der Kurve $A(x) = \int_0^x y(t)\,dt$.

Dann gilt

$$F_{\square} - A = 2A \iff xy = 3\int_0^x y(t)\,dt \overset{\text{Ableiten}}{\iff} xy' + y = 3y$$

Example

Eine Kurve geht durch den Ursprung und liegt in der Halbebene $y \geq 0$.
Jedes Rechteck, das durch den Ursprung und einen Kurvenpunkt definiert ist, dessen Seiten parallel zu Koordinatenachsen sind, teilt die Kurve in zwei Teile.
Die Fläche des Teils unter der Kurve A ist halb so gross wie die Fläche des Teils oberhalb der Kurve.

Bestimme die Kurvengleichung.

Lösung:

$F_\square = xy$. Es sei die Gleichung der Kurve $y(x)$ und die Fläche unter der Kurve $A(x) = \int_0^x y(t)\,dt$.

Dann gilt

$$F_\square - A = 2A \iff xy = 3\int_0^x y(t)\,dt \overset{\text{Ableiten}}{\iff} xy' + y = 3y$$

$$\iff xy' = 2y$$

Aufgaben DG / Integration

Example

Eine Kurve geht durch den Ursprung und liegt in der Halbebene $y \geq 0$.
Jedes Rechteck, das durch den Ursprung und einen Kurvenpunkt definiert ist, dessen Seiten parallel zu Koordinatenachsen sind, teilt die Kurve in zwei Teile. Die Fläche des Teils unter der Kurve A ist halb so gross wie die Fläche des Teils oberhalb der Kurve.

Bestimme die Kurvengleichung.

Lösung:

$F_{\square} = xy$. Es sei die Gleichung der Kurve $y(x)$ und die Fläche unter der Kurve $A(x) = \int_0^x y(t)\,dt$.
Dann gilt

$$F_{\square} - A = 2A \iff xy = 3\int_0^x y(t)\,dt \overset{\text{Ableiten}}{\iff} xy' + y = 3y$$

$$\iff xy' = 2y \iff y = Cx^2,\ C > 0$$

Example

Ein Kreis schneidet eine Parabel in 4 Punkten.

Beweise: der Schwerpunkt dieser 4 Punkte liegt auf der Parabelachse.

Example

Ein Kreis schneidet eine Parabel in 4 Punkten.

Beweise: der Schwerpunkt dieser 4 Punkte liegt auf der Parabelachse.

Lösung:

Example

Ein Kreis schneidet eine Parabel in 4 Punkten.

Beweise: der Schwerpunkt dieser 4 Punkte liegt auf der Parabelachse.

Lösung:

- Wir wählen das KS so, dass die Parabel $y = x^2$ heisst und der Kreis die folgende Gleichung hat

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

Example

Ein Kreis schneidet eine Parabel in 4 Punkten.

Beweise: der Schwerpunkt dieser 4 Punkte liegt auf der Parabelachse.

Lösung:

- Wir wählen das KS so, dass die Parabel $y = x^2$ heisst und der Kreis die folgende Gleichung hat

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

- Wir setzen $y = x^2$ in die Kreisgleichung ein.

Example

Ein Kreis schneidet eine Parabel in 4 Punkten.

Beweise: der Schwerpunkt dieser 4 Punkte liegt auf der Parabelachse.

Lösung:

- Wir wählen das KS so, dass die Parabel $y = x^2$ heisst und der Kreis die folgende Gleichung hat

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

- Wir setzen $y = x^2$ in die Kreisgleichung ein.
- Wir haben eine Gleichung vom Grad 4 mit dem Koeffizient 0 bei x^3.

Example

Ein Kreis schneidet eine Parabel in 4 Punkten.

Beweise: der Schwerpunkt dieser 4 Punkte liegt auf der Parabelachse.

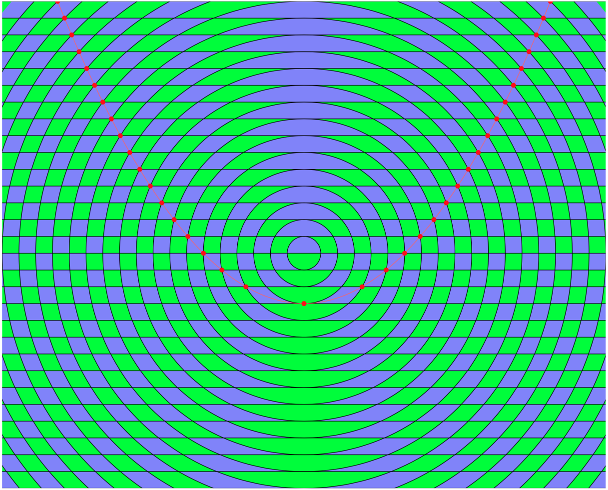
Lösung:

- Wir wählen das KS so, dass die Parabel $y = x^2$ heisst und der Kreis die folgende Gleichung hat

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

- Wir setzen $y = x^2$ in die Kreisgleichung ein.
- Wir haben eine Gleichung vom Grad 4 mit dem Koeffizient 0 bei x^3.
- Vieta's Satz liefert, dass die Summe der Lösungen dieser Gleichung dann auch 0 ist.

Danke! FRAGEN?



EMail: dmitri.nikolenkov@math.ethz.ch