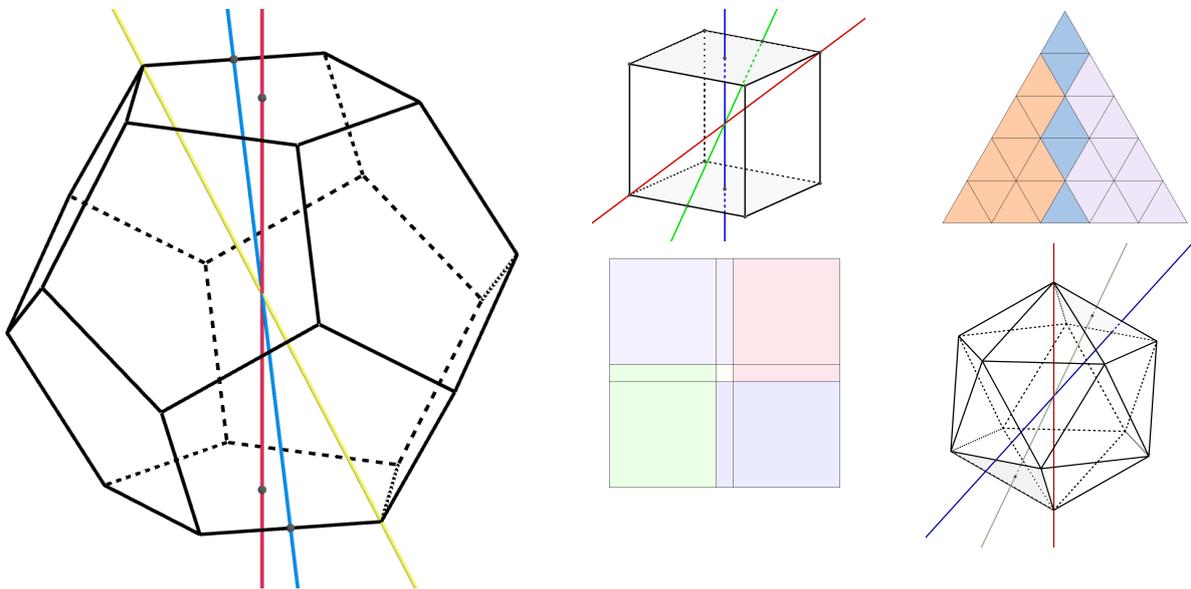


Anwendungen von Gruppenwirkungen in der Kombinatorik



Eine Maturaarbeit von Felix Qingzhou Xu

Kantonsschule Wettingen
Killwangen, 05. November 2023

Betreuer: Dr. Markus Kriener
Gegenleserin: Dr. Tatjana Miladinovic

Zusammenfassung

In dieser Arbeit soll aufgezeigt werden, wie kombinatorische Probleme mithilfe von Gruppenwirkungen gelöst werden können. Es wird zunächst die Methode der Gruppenwirkungen vorgestellt und danach deren Anwendung anhand von verschiedenen Problemen demonstriert. Es soll beantwortet werden, welche Art von Problemen mithilfe dieser Methode lösbar sind, und in welchen Fällen es Sinn macht, diese Methode anzuwenden. Die Methode der Gruppenwirkungen ist ein sehr effektives Werkzeug. Allerdings erfordert sie spezifische Voraussetzungen, wie zum Beispiel die Existenz einer für das Problem relevante Gruppe und eine berechenbare Anzahl an Fixpunkten für jedes Element in der Gruppe.

Vorwort

Dieses Projekt dient als Maturaarbeit und ist notwendig für meinen Gymnasiumsabschluss. In dieser Arbeit geht es um die Anwendung von Gruppenwirkungen in der Kombinatorik. Das Interesse an diesem Thema entstand, weil es eine mir unbekannt Methode zum Lösen von kombinatorischen Problemen ist. Kombinatorik ist eines meiner Lieblingsgebiete in der Mathematik, deshalb wollte ich mehr über dieses Thema wissen. Dadurch, dass ich praktisch nichts darüber wusste, eignete es sich gut als Thema für die Maturaarbeit. Ich empfand es auch als nützlich, meine Maturaarbeit über dieses Thema zu schreiben, da ich später Mathematik studieren möchte und eine tiefere Auseinandersetzung mit diesem Thema mir daher im Studium helfen wird.

Ich möchte mich an dieser Stelle bei meiner Mathematiklehrperson, Herrn Dr. Markus Kriener, bedanken, welcher mich bei dieser Arbeit betreut und mir dieses Thema vorgeschlagen hat. Vielen Dank geht ebenfalls an Frau Dr. Tatjana Miladinovic, welche mich im Schwerpunktfach und in der Olympiadenmathematik unterrichtet und gleichzeitig meine Gegenleserin ist. Zuletzt danke ich Prof. Norbert Hungerbühler, welcher mir erlaubt hat, an der ETH im Departement Mathematik ein Praktikum zu machen und mir bei Problemen bezüglich der Verwendung von \LaTeX geholfen hat.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Methoden	5
2.1	Gruppen	7
2.2	Gruppenwirkungen	11
2.3	Abzähl­satz von Frobenius	13
2.4	Abzähl­satz von Pólya	16
2.4.1	Einschränkungen beschreiben	17
2.4.2	Zyklenindikator einer Gruppe	18
3	Resultate	23
3.1	Probleme	23
3.2	Lösungswege	24
3.2.1	Problem 1	24
3.2.2	Problem 2	27
3.2.3	Problem 3	29
3.2.4	Problem 4	30
3.2.5	Problem 5	33
3.2.6	Problem 6	34
3.2.7	Problem 7	37
4	Diskussion	41
4.1	Fragestellungen	41
4.1.1	Welche Arten von Problemen können mithilfe von Gruppenwirkungen gelöst werden?	41
4.1.2	Bei welchen Arten von Problemen ist es sinnvoll, Gruppenwirkungen zu verwenden?	42
4.2	Reflexion	42
5	Quellenverzeichnis	44
	Literaturverzeichnis	44
	Webseiten	44
	Abbildungsverzeichnis	44
6	Anhang	45
6.1	Eulersche Phi-Funktion	45
6.2	Einheitswurzeln	46
6.3	Was ist ein einfacher Graph?	47

1 Einleitung

Dieses Projekt wird aus reinem Interesse und Neugier am Thema durchgeführt. Vor Beginn dieser Arbeit war mein Wissensstand über diesen Bereich der Mathematik relativ niedrig. Ich kannte die Definition von Gruppen und einzelne Theoreme über diese, allerdings hatte ich noch nie von Gruppenwirkungen, dem Abzählsatz von Frobenius und dem Abzählsatz von Pólya gehört. Mein Interesse wurde geweckt, als ich zum ersten Mal darüber las.

In der Kombinatorik existieren viele verschiedene Methoden für das Lösen von Problemen, je nach Problem eignet sich eine Methode besser als die andere. Eine dieser Methoden ist die Anwendung von Gruppenwirkungen. Das Ziel dieser Arbeit ist das Kennenlernen von Gruppenwirkungen und deren Anwendung in kombinatorischen Problemen. In dieser Arbeit wird zunächst das benötigte theoretische Wissen über Gruppenwirkungen eingeführt und danach werden anhand von mehreren Problemen verschiedene Anwendungen demonstriert. Eines der Ziele dieser Arbeit ist es, herauszufinden, für welche Arten von Problemen Gruppenwirkungen angewendet werden können. Dadurch, dass es viele verschiedene Methoden gibt, stellt sich auch die Frage, in welchen Fällen die Anwendung von Gruppenwirkungen sinnvoll ist, und wann es möglicherweise besser ist, eine andere Methode einzusetzen.

2 Methoden

Die wichtigsten Methoden, welche oft in dieser Arbeit verwendet werden, werden in diesem Kapitel eingeführt. Wird eine andere Methode verwendet, wird diese im Anhang aufgeführt.

1. Die Darstellung der Resultate erfolgt durch einen möglichen Lösungsweg für jedes der Probleme. Das Hauptziel ist die Formulierung eines verständlichen Lösungsweges für jedes der gestellten Probleme, in welchem Gruppenwirkungen eine zentrale Rolle bei der Lösung des Problems spielen. Dadurch soll eine mögliche Verwendung von Gruppenwirkungen aufgezeigt werden. Ein weiteres Ziel ist das Aufzeigen von möglichen Ideen oder Gedankengängen, welche als Motivation für diesen Lösungsweg dienen.
2. Zum Vorgehen bei der Fehleraufdeckung: Für einen Grossteil der gefundenen Ergebnisse im Bereich der Resultate ist der erste Schritt die Überprüfung der Ganzzahligkeit der gefundenen Anzahl Bahnen. Beim Abzählsatz von Pólya wird dies durch Lemma 2.4.10 ermöglicht. Dieser Schritt ist leicht mithilfe von modularer Arithmetik machbar und kann effizient falsche Resultate aufdecken. Des Weiteren kann diese Methode kleine Abweichungen in der allgemeinen Formel gut aufdecken. Ein weiterer Schritt ist die Betrachtung von kleinen Fällen. Diese zwei Methoden ergänzen sich gut, da eine Methode etwas generelles überprüft, während die andere Methode spezifische Fälle abdeckt. Unter der Annahme, dass die Resultate nicht zu stark von der richtigen Antwort abweichen, sollten diese Methoden eine grosse Mehrheit der falschen Ergebnisse aufdecken.
3. Bei den Ergebnissen, in denen nach einer konkreten Anzahl gefragt wird, ist eine Möglichkeit zur Überprüfung der Korrektheit das Finden aller Möglichkeiten. Bei der Aufgabe zu den Graphen (Aufgabe 7, ► S. 37) wurde die Korrektheit der Antwort zunächst mit dem Finden der gesuchten Anzahl an verschiedenen Graphen und mithilfe der Folge der Anzahl nichtisomorpher Graphen mit n Ecken [4] unternommen.
4. Für die schriftliche Arbeit wurde \LaTeX verwendet, dafür gibt es vor allem zwei Hauptgründe:
 - (a) Da in dieser Arbeit viel mit mathematischen Formeln und Zeichen gearbeitet wird, wäre es relativ umständlich, diese auf Microsoft Word oder anderen ähnlichen Applikationen zu schreiben.
 - (b) Die Formatierung auf \LaTeX ist weniger aufwändig.
5. Die selbstgemachten Abbildungen wurden in Geogebra oder in \LaTeX mithilfe von Tikz erstellt.
6. Die Beweise und Beispiele stammen von mir selbst, falls nichts anderes angegeben ist.

In dieser Arbeit geht es hauptsächlich um das Lösen von Problemen mithilfe von Gruppenwirkungen. Daher muss zuerst das benötigte theoretische Wissen erarbeitet werden, um solche Probleme lösen zu können. In diesem Teil werden Grundlagen der Notation, Gruppentheorie, Gruppenwirkungen, der Abzählsatz von Frobenius und der Abzählsatz von Pólya eingeführt.

Notationen und Glossar Es werden an dieser Stelle fachspezifische Notationen und Begriffe eingeführt, damit es später nicht zu Unklarheiten kommt.

Notation oder Begriff	Bedeutung und Eigenschaften
\exists	es existiert
\forall	für alle
$f(M)$	wird als Bild von M unter f bezeichnet. Ist definiert als die Menge $\{f(x) x \in M\}$.
injektiv	eine Funktion $f : D \rightarrow Z$ ist injektiv, falls $\forall z \in Z$ höchstens ein $d \in D$ existiert, sodass $f(d) = z$.
surjektiv	eine Funktion $f : D \rightarrow Z$ ist surjektiv, falls $f(D) = Z$.
bijektiv	eine Funktion $f : D \rightarrow Z$ ist bijektiv, falls f injektiv und surjektiv ist. Insbesondere hat f eine bijektive Umkehrabbildung $f^{-1} : Z \rightarrow D$.
#Objekt	die Anzahl an Objekten. Beispiel: # Monate = 12.
$ A $	Kardinalität der Menge A . Bei endlichen Mengen entspricht dies der Anzahl Elemente.
Partition einer Menge M	Teilmengen M_1, \dots, M_k von M sind genau dann eine Partition von M , wenn jedes Element in M in genau einer der Teilmengen ist.
$a b$	a ist ein Teiler von b . a, b sind hier ganze Zahlen.
Äquivalenzrelation	Eine Äquivalenzrelation \sim auf einer Menge M teilt diese in disjunkte Teilmengen auf, dessen Elemente als gleichwertig oder äquivalent gezählt werden. Sind zwei Elemente a, b in der gleichen Teilmenge, so schreibt man $a \sim b$. Eine Äquivalenzrelation erfüllt folgende Bedingungen: <ol style="list-style-type: none"> 1. Reflexivität: $\forall a \in M : a \sim a$. 2. Symmetrie: $a \sim b \implies b \sim a$. 3. Transitivität: $a \sim b$ und $b \sim c \implies a \sim c$. Ein Beispiel für eine Äquivalenzrelation wäre die Relation $=$.

Zwei einführende Probleme Wir werden zwei einführende Probleme präsentieren, welche uns helfen, im theoretischen Teil der Arbeit etwas Intuition zu entwickeln. Diese Probleme dienen als Richtungsweiser.

1. Wir haben ein dreieckiges Brett wie in der Abbildung 1, welches wir mit 2 Farben färben möchten. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, dies zu tun, wenn wir das Brett rotieren oder spiegeln dürfen? (Das bedeutet, dass zwei Färbungen als gleich gezählt werden, wenn man mithilfe von Rotationen oder Spiegelungen von einer Färbung zur anderen gelangen kann).

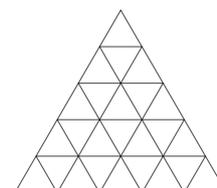


Abbildung 1: dreieckiges Brett

2. Wir haben einen Ikosaeder. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Flächen zu färben, wenn 3 Flächen blau, 7 Flächen rot und 10 Flächen grün gefärbt werden sollen? Färbungen sollen als gleich gezählt werden, falls sie sich um höchstens eine Rotation unterscheiden.

2.1 Gruppen

Um Gruppenwirkungen zu verstehen, muss man zunächst einmal wissen, was eine Gruppe ist. Eine Gruppe ist ein mathematisches Objekt mit einer bestimmten Struktur, welche häufig vorkommt. Es ist daher nützlich, diese Struktur etwas genauer zu studieren.

Definition 2.1.1. [Gruppe] [2, Definition 11.1]

Eine Gruppe (G, \star) besteht aus einer Menge G und einer binären Operation \star (eine binäre Operation kann als Funktion verstanden werden, welche zwei Werte einnimmt und einen Wert ausgibt), sodass folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Abgeschlossenheit: Für je zwei Elemente $x, y \in G$ gilt: $x \star y \in G$.
2. Existenz eines neutralen Elements: Es existiert ein Element $e \in G$ mit der Eigenschaft, dass $x \star e = e \star x = x$.
3. Existenz eines inversen Elements: Für jedes $x \in G$ existiert ein Element x^{-1} mit der Eigenschaft, dass $x \star x^{-1} = x^{-1} \star x = e$.
4. Assoziativität: Für je drei Elemente $x, y, z \in G$: $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$.

Bemerkung. Das neutrale Element ist eindeutig, und für jedes Element gibt es genau ein inverses Element. Die Beweise sind folgendermassen:

1. Eindeutigkeit des neutralen Elements: Sei e das neutrale Element. Nehme an, es gäbe weitere, von e verschiedene neutrale Elemente, sei e_1 eines davon. Dann gilt aber aufgrund der Definition von einem neutralen Element:

$$e = e \star e_1 = e_1 \implies e = e_1.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass $e_1 \neq e$, somit existieren keine von e verschiedenen neutrale Elemente.

2. Inverses Element ist eindeutig: Nehme an, es gäbe mehr als ein inverses Element. Seien y, z zwei voneinander verschiedene inverse Elemente von x . Dann gilt für diese:

$$y = y \star e = y \star (x \star z) = (y \star x) \star z = e \star z = z.$$

Dies impliziert, dass $y = z$, was im Widerspruch zur Annahme steht, dass $y \neq z$.

Es ist etwas umständlich, jedes Mal „sei (G, \star) eine Gruppe“ zu schreiben, daher wird es meistens mit „sei G eine Gruppe“ abgekürzt. Dies ist nicht ganz korrekt, aber damit ist das erstere gemeint.

Beispiel. Gruppen kommen sehr häufig in der Mathematik vor. Die Definition ist sehr abstrakt, daher sind hier einige Beispiele von Gruppen.

1. Die ganzen Zahlen \mathbb{Z} bilden mit der Addition eine Gruppe (Formal: $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine Gruppe). Die Addition zweier ganzen Zahlen ist wieder eine ganze Zahl, daher ist \mathbb{Z} unter der Addition abgeschlossen. Das neutrale Element der Gruppe ist die Zahl 0, da für jede Zahl $x \in \mathbb{Z}$ gilt: $x + 0 = 0 + x = x$. Jede Zahl $x \in \mathbb{Z}$ besitzt auch ein eindeutiges inverses Element, nämlich $-x$. Es gilt: $x + (-x) = (-x) + x = 0$.
2. Die rationalen Zahlen ohne die Null ($\mathbb{Q} \setminus \{0\}$) bilden mit der Multiplikation eine Gruppe. $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ist unter der Multiplikation abgeschlossen. Das neutrale Element ist 1, da $\forall q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} : 1 \cdot q = q$. Das inverse Element für ein $p \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ist $\frac{1}{p}$.
3. Betrachte die ganzen Zahlen mod(2), auch bekannt als \mathbb{Z}_2 . Dies sind die Reste, welche man bei der Division durch 2 bekommen kann, also 0 und 1. Diese bilden mit der Addition eine Gruppe, es gilt nämlich: $0 + 0 \equiv 0$, $1 + 0 \equiv 1$, $0 + 1 \equiv 1$, $1 + 1 \equiv 0 \pmod{2}$. 0 ist das neutrale Element, das Inverse von 0 ist 0 und das Inverse von 1 ist 1.
4. Sei $M = \{m_1, \dots, m_n\}$ eine Menge. Eine Permutation ist eine bijektive Abbildung $\pi : M \rightarrow M$. Die Menge aller Permutationen S_n , bildet mit der Operation \circ , der Komposition von Funktionen ($f \circ g(x) = f(g(x))$), eine Gruppe: Für $\pi_1, \pi_2 \in S_n$ ist das Bild der Menge M unter der Abbildung $(\pi_1 \circ \pi_2) : \pi_1 \circ \pi_2(M) = \pi_1(M) = M$. Somit ist $\pi_1 \circ \pi_2$ eine Bijektion von $M \rightarrow M$ und daher auch in S_n , wodurch die Abgeschlossenheit folgt. Das neutrale Element der Gruppe ist die Identitätsabbildung id , diese bildet jedes $m \in M$ auf $\text{id}(m) = m$ ab. Da jede Permutation π eine Bijektion ist, besitzt diese auch eine Umkehrabbildung $\pi^{-1} : M \rightarrow M$. Man sieht, dass π^{-1} auch eine Bijektion von $M \rightarrow M$ definiert und somit auch eine Permutation ist. Somit hat π das inverse Element π^{-1} . Die Gruppe (S_n, \circ) wird als symmetrische Gruppe von n Elementen bezeichnet.

Definition 2.1.2. [Untergruppe] [2, Definition 11.4]

Sei G eine Gruppe. Ist $H \subset G$, sodass H eine Gruppe ist, dann ist H eine Untergruppe von G .

Definition 2.1.3. [Nebenklasse] [2, Definition 11.6]

Ist H eine Untergruppe von G , so definieren für jedes Element $g \in G$ die Nebenklasse

$$gH := g \star H = \{g \star h \mid h \in H\}.$$

Wir definieren

$$N := \{gH \mid g \in G\}$$

als die Menge aller Nebenklassen.

Lemma 2.1.4. [2, Lemma 11.4]

Sei H eine Untergruppe von G . Dann gilt für $g_1, g_2 \in G$:

$$g_2^{-1} \star g_1 \in H \iff g_1H = g_2H.$$

Beweis. Nehme zunächst an, $g_2^{-1} \star g_1 \in H$. Sei $g = g_1 \star h$ wobei $h \in H$. Dann ist

$$g = (g_2 \star g_2^{-1}) \star g_1 \star h = g_2 \star (g_2^{-1} \star g_1) \star h.$$

Da $(g_2^{-1} \star g_1) \in H \implies (g_2^{-1} \star g_1) \star h \in H$ und somit $g \in g_2H$. Somit ist $g_2H \subset g_1H$. Mithilfe von $g_1^{-1} \star g_2$ (inverses Element von $g_2^{-1} \star g_1$ und somit Element von H) kann man mit dem gleichen Prozess zeigen, dass beide Mengen gleich sind.

Ist $g_1H = g_2H$, dann ist $g_1 \star e_G = g_1 \in g_1H$. Aber dann $\exists g \in H : g_2 \star g = g_1$, und somit ist $g = g_2^{-1} \star g_1 \in H$. \square

Satz 2.1.5. [Satz von Lagrange für endliche Gruppen] [2, Theorem 11.6]

Sei G eine endliche Gruppe. Ist H eine Untergruppe von G , so ist $|H|$ ein Teiler von $|G|$. Des Weiteren gilt, dass $|N| \cdot |H| = |G|$

Beweis. Wir zeigen, dass Nebenklassen entweder disjunkt oder gleich sind. Seien $g_1, g_2 \in G$ sodass $M = g_1H \cap g_2H \neq \emptyset$. Sei $m \in M$. Dann existieren $h_1, h_2 \in H$:

$$m = g_1 \star h_1 = g_2 \star h_2 \implies g_2^{-1} \star g_1 \star h_1 = h_2 \implies g_2^{-1} \star g_1 = h_2 \star h_1^{-1}.$$

Da $g_2^{-1} \star g_1 = h_2 \star h_1^{-1} \in H$, folgt aus dem Lemma 2.1.4, dass $g_1H = g_2H$.

Weiter gilt, dass jedes Element von G sicher in einer Nebenklasse ist, da $g = g \star e \in gH$. Somit teilen die Nebenklassen die Gruppe G in disjunkte Teilmengen auf. Auch gilt, dass jede Nebenklasse genau $|H|$ Elemente hat, da für $h_1, h_2 \in H$ gilt:

$$g \star h_1 = g \star h_2 \iff h_1 = g^{-1} \star g \star h_1 = g^{-1} \star g \star h_2 = h_2.$$

Wir haben somit

$$\{g : g \in G\} = \bigcup_{gH \in N} gH.$$

Da die Nebenklassen disjunkt sind und alle $|H|$ Elemente haben, gilt: $|N| \cdot |H| = |G|$. Somit ist $|H|$ ein Teiler von $|G|$. \square

In unseren einführenden Beispielen wird von Rotationen und Spiegelungen gesprochen, welche beide zu den Symmetrieabbildungen zählen. Es ist möglich, Gruppen von Symmetrieabbildungen zu definieren. Dafür wird zuerst definiert, was Symmetrieabbildungen sind:

Definition 2.1.6. [Isometrie] [2, Definition 11.2]

Sei S entweder \mathbb{R}^2 (zweidimensionale Ebene) oder \mathbb{R}^3 (dreidimensionaler Raum). Eine Abbildung $f : S \rightarrow S$ wird als Isometrie bezeichnet, falls $\forall x, y \in S : d(f(x), f(y)) = d(x, y)$, wobei $d : S \times S \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, (x, y) \mapsto d(x, y)$ die Distanz zwischen den Punkten x und y definiert.

Definition 2.1.7. [Symmetrieabbildung] [2, Definition 11.2]

Eine Isometrie f , für welche $f(F) = F$ gilt (d.h. $\forall x \in F : f(x) \in F$ und $\forall y \in F \exists x \in F : f(x) = y$), wird als Symmetrieabbildung von F bezeichnet.

Bemerkung. In unserem Fall ist d die euklidische Distanz, d.h. für $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3)$ ist $d(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}$.

Jede Isometrie ist gemäss Definition injektiv, d.h. für $x, y \in S : f(x) = f(y) \iff x = y$. Dies folgt daraus, dass $d(f(x), f(y)) = 0 \iff d(x, y) = 0 \iff x = y$.

Beispiel. Ein Beispiel für eine Isometrie ist $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, wobei f eine Rotation um 180° um den Ursprung ist. Die Distanz zwischen zwei Punkten bleibt dabei erhalten. Isometrien in \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 können als Gruppe von Rotationen, Spiegelungen und Translationen bezüglich der Komposition von Funktionen betrachtet werden.

Mithilfe dieser Definition von Symmetrieabbildungen ist es möglich, einen Zusammenhang zwischen Gruppen und Symmetrieabbildungen zu finden. Es gilt nämlich:

Satz 2.1.8. [2, Theorem 11.2]

Sei G die Menge aller Symmetrieabbildungen einer Figur F . Dann bildet G mit der Operation \circ , der Komposition von Funktionen ($f \circ g(x) = f(g(x))$), eine Gruppe.

Beweis. Bemerke zunächst, dass alle Isometrien in G bijektiv sind und dass die Umkehrfunktion auch eine Isometrie ist. Dies folgt aus der Injektivität von Isometrien und dem Fakt das für $f \in G : f(F) = F$, wodurch die Surjektivität von f folgt. Somit gibt es für jedes $f \in G$ eine Umkehrfunktion $f^{-1} : S \rightarrow S$, sodass $f \circ f^{-1}(x) = f^{-1} \circ f(x) = x \forall x \in F$. Für $(x, y) = (f(u), f(v)) \in F$ gilt: $d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) = d(u, v) = d(f(u), f(v)) = d(x, y)$, somit ist f^{-1} auch eine Isometrie. Um zu zeigen, dass (G, \circ) eine Gruppe ist, muss gezeigt werden, dass (G, \circ) alle Eigenschaften einer Gruppe besitzt.

1. Abgeschlossenheit: Seien $f, g \in G$. $\forall x, y \in F$ gilt, dass $d(f \circ g(x), f \circ g(y)) = d(g(x), g(y)) = d(x, y)$, da f und g Isometrien sind. Daher ist $f \circ g$ auch eine Isometrie. Es gilt weiter: $f \circ g(F) = f(F) = F$, da f, g Symmetrieabbildungen sind. Daher ist auch $f \circ g$ eine Symmetrieabbildung.
2. Existenz des neutralen Elements: die Identitätsfunktion $\text{id} : S \rightarrow S, \text{id}(x) = x$ ist das neutrale Element, es ist offensichtlich in G und $\text{id} \circ f = f = f \circ \text{id}$.
3. Existenz des inversen Elements: das inverse Element von f ist die Umkehrfunktion f^{-1} . Dieses ist in G , da $F = f^{-1} \circ f(F) = f^{-1}(F)$.

4. Assoziativität: die Assoziativität folgt aus der Assoziativität der Komposition von Funktionen.

Da alle Eigenschaften erfüllt sind, bildet (G, \circ) eine Gruppe. □

Beispiel. Betrachte alle Symmetrieabbildungen vom dreieckigen Brett (Abbildung 1) aus dem 1. einführenden Beispiel (► S. 7). Die Symmetrieabbildungen sind die Rotationen im Gegenurzeigersinn um 120° und 240° um den Mittelpunkt des Bretts, die Spiegelungen an den Mittelsenkrechten der Seiten und die Identitätsabbildung. Diese bilden mit der Komposition eine Gruppe. Es ist hier zu bemerken, dass diese Gruppe die symmetrische Gruppe von drei Elementen S_3 (► S. 8) ist.

Bemerke, dass im 1. einführenden Beispiel eine Färbung und dessen Bild unter einer der Symmetrieabbildungen als gleich gelten sollen. Dies motiviert das Einführen von Gruppenwirkungen und einer Äquivalenzrelation.

2.2 Gruppenwirkungen

Definition 2.2.1. [Gruppenwirkungen] [2, Definition 12.1]

Sei G eine Gruppe und X eine Menge. Eine Gruppenwirkung ist eine Funktion $\triangleright : G \times X \rightarrow X$, $(g, x) \mapsto g \triangleright x$, sodass folgende Bedingungen gelten:

1. Für jedes $x \in X$ ist, $e_G \triangleright x = x$ wobei e_G das neutrale Element von G ist
2. Für alle $g_1, g_2 \in G$ und alle $x \in X$ gilt: $g_1 \triangleright (g_2 \triangleright x) = (g_1 \star g_2) \triangleright x$.

Beispiel. Betrachte wieder das 1. einführende Beispiel. Es ist eine Gruppenwirkung von S_3 auf die Menge der Färbungen X definiert, seien $g \in S_3$ und $x \in X$, dann ist $g \triangleright x$ definiert als das Bild der Färbung x unter der Symmetrieabbildung g . Die beiden Bedingungen in Definition 2.2.1 sind erfüllt und somit ist dies eine Gruppenwirkung.

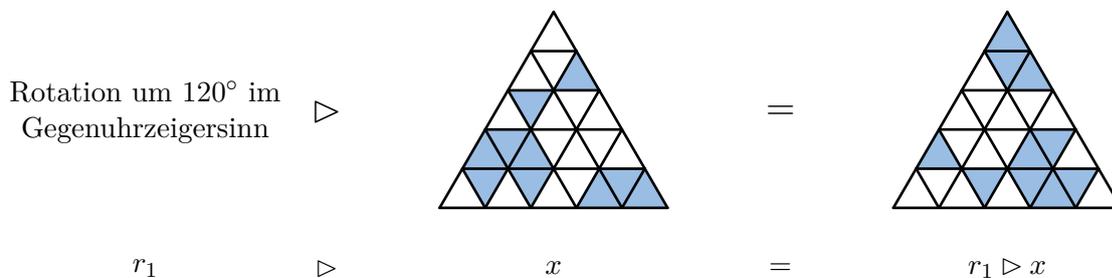


Abbildung 2: konkretes Beispiel mit Abbildung r_1 und Färbung x

Definition 2.2.2. [2, Definition 12.2]

Sei G eine Gruppe. Wir definieren die Äquivalenzrelation \sim_G folgendermassen:

Für $x, y \in X : x \sim_G y \iff \exists g \in G : g \triangleright x = y$.

Um zu zeigen, dass dies wirklich eine Äquivalenzrelation ist, muss gezeigt werden, dass die Definition einer Äquivalenzrelation eingehalten wird.

Beweis. \sim_G ist eine Äquivalenzrelation:

1. Reflexivität: $x \sim_G x$, da $e_G \triangleright x = x$.
2. Symmetrie: ist $x \sim_G y \implies \exists g \in G: g \triangleright x = y$. Dadurch ist $g^{-1} \triangleright y = g^{-1} \triangleright (g \triangleright x) = (g^{-1} \star g) \triangleright x = x$ und somit $y \sim_G x$.
3. Transitivität: ist $x \sim_G y$ und $y \sim_G z$, so ist $g_1 \triangleright x = y$, $g_2 \triangleright y = z \implies g_2 \triangleright (g_1 \triangleright x) = (g_2 \star g_1) \triangleright x = z \implies x \sim_G z$.

□

Sei G die Gruppe der Symmetrieabbildungen und X die Menge aller möglichen Färbungen. Da diese Relation eine Äquivalenzrelation ist, spaltet sie die Menge aller Färbungen in Äquivalenzklassen auf. Jedes Element $x \in X$ gehört genau einer Äquivalenzklasse an, und in dieser sind auch alle Färbungen enthalten, die als gleich wie x gezählt werden sollen. Diese Äquivalenzklassen werden Bahnen (Englisch: Orbits) genannt.

Definition 2.2.3. [Bahn] [2, Definition 12.3]

Sei eine Gruppenwirkung von G auf X definiert. $\text{Orb}(x)$ ist definiert als Äquivalenzklasse der Relation \sim_G , welche x enthält, also:

$$\text{Orb}(x) = \{g \triangleright x \mid g \in G\}.$$

Man kann die Problemstellung für das 1. einführende Problem umschreiben zu: „Sei X die Menge der Färbungen mit zwei Farben des dreieckigen Bretts und sei G die Gruppe der Symmetrieabbildungen der Figur. Diese definiert eine Gruppenwirkung auf X . Wie viele verschiedene Bahnen hat \sim_G ?“ Es stellt sich die Frage, wie man Bahnen zählen kann. An dieser Stelle wird der Stabilisator von x eingeführt, da diese einen nützlichen Zusammenhang mit Bahnen haben.

Definition 2.2.4. [Stabilisator] [2, Definition 12.4]

Sei eine Gruppenwirkung von G auf X definiert. $\text{Stab}(x)$ ist der Stabilisator von $x \in X$ und ist definiert als

$$\text{Stab}(x) = \{g \in G \mid g \triangleright x = x\}.$$

Lemma 2.2.5. [2, Lemma 12.3]

Für jedes $x \in X$: $\text{Stab}(x)$ ist eine Untergruppe von G .

Beweis. Für $g_1, g_2 \in \text{Stab}(x)$: $(g_1 \star g_2) \triangleright x = g_1 \triangleright (g_2 \triangleright x) = g_1 \triangleright x = x$, und somit ist auch $g_1 \star g_2 \in \text{Stab}(x)$ (Abgeschlossenheit). Es ist leicht zu sehen, dass $e_G \in \text{Stab}(x)$ (Existenz eines neutralen Elements). Des Weiteren gilt: ist $g \in \text{Stab}(x)$, dann ist $g^{-1} \triangleright x = g^{-1} \triangleright (g \triangleright x) = (g^{-1} \star g) \triangleright x = e_G \triangleright x = x$, somit ist die Existenz des inversen Elements auch garantiert. Die Assoziativität folgt aus der Assoziativität von \star . □

Satz 2.2.6. [Bahnsatz] [2, Theorem 12.4]

Sei eine Gruppenwirkung G auf X definiert. Für jedes Element $x \in X$: $|\text{Orb}(x)| \cdot |\text{Stab}(x)| = |G|$.

Beweis. Es ist bekannt, dass $\text{Stab}(x)$ eine Untergruppe von G ist. Zu zeigen bleibt, dass $|\text{Orb}(x)|$ die Anzahl Nebenklassen ist, dann folgt dieses Theorem aus dem Satz von Lagrange (Satz 2.1.5). Nehme an, es gäbe voneinander verschiedene $y, z \in \text{Orb}(x)$, mit $y = g_1 \triangleright x$, $z = g_2 \triangleright x$ und es gelte $g_1 \star \text{Stab}(x) = g_2 \star \text{Stab}(x)$ ($\text{Stab}(x)$ wird hier als Untergruppe von G betrachtet). Aus Lemma 2.1.4 folgt, dass $g_2^{-1} \star g_1 = h \in \text{Stab}(x)$ und somit $g_1 = g_2 \star h$. Es gilt:

$$y = g_1 \triangleright x = (g_2 \star h) \triangleright x = g_2 \triangleright (h \triangleright x) = g_2 \triangleright x = z.$$

Somit ist $y = z$, und man hat einen Widerspruch zu $y \neq z$, daher muss eine injektive Funktion $f : \text{Orb}(x) \rightarrow N$ existieren. Es folgt, dass $|\text{Orb}(x)| \leq |N|$ ist. Zu zeigen bleibt, dass in jeder Nebenklasse ein Element g vorhanden ist, mit $g \triangleright x \in \text{Orb}(x)$, was $|\text{Orb}(x)| \geq |N|$ implizieren würde. Dies folgt aus der Definition von $\text{Orb}(x)$ und somit ist $|\text{Orb}(x)| = |N|$. \square

Mithilfe von diesem Zusammenhang kann man folgenden Satz herleiten:

Satz 2.2.7. [2, Theorem 12.6]

Sei G eine endliche Gruppe, welche auf X wirkt. Sei $B := \{\text{Orb}(x) : x \in X\}$ die Menge aller Bahnen von \sim_G . Dann ist

$$|B| = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} |\text{Stab}(x)|.$$

Beweis. [Herr Kriener] Es gilt:

$$\sum_{x \in X} |\text{Stab}(x)| = \sum_{x \in \text{Orb}_1} |\text{Stab}(x)| + \sum_{x \in \text{Orb}_2} |\text{Stab}(x)| + \cdots + \sum_{x \in \text{Orb}_{|B|}} |\text{Stab}(x)| \quad (1)$$

Aus dem Bahnsatz (Satz 2.2.6) folgt, dass für alle Elemente x einer Bahn Orb_k die Stabilisatoren die gleiche Ordnung haben, es gilt:

$$|\text{Stab}(x)| = \frac{|G|}{|\text{Orb}_k|}.$$

Daher hat jeder der $|B|$ Summanden in (1) den Wert $|G|$, und somit folgt

$$\sum_{x \in X} |\text{Stab}(x)| = |B||G| \implies \frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} |\text{Stab}(x)| = |B|.$$

\square

2.3 Abzählung von Frobenius

Mit dem Satz 2.2.7 ist es im Allgemeinen schwierig, die Anzahl Bahnen zu zählen, da man über jedes Element von der Menge der Färbungen X zählt (meistens hat X viele Elemente und es ist ineffizient, über diese zu zählen). Deshalb werden Fixpunkte eingeführt, welche uns eine Formel geben, die über die Elemente in der Gruppe G zählt:

Definition 2.3.1. [Fixpunktmenge] [2, Definition 13.1]

Sei eine Gruppenwirkung von G auf X definiert. Für jedes $g \in G$ definiert man die Fixpunktmenge von g

$$\text{Fix}(g) = \{x \in X : g \triangleright x = x\}.$$

Die Elemente in $\text{Fix}(g)$ bleiben unter der Wirkung von g fixiert, daher werden sie Fixpunkte genannt. Im nächsten Schritt wird das Prinzip des doppelten Abzählens angewendet: Sei

$$M := \{(g, x) : g \in G, x \in X, g \triangleright x = x\}.$$

Sei $g_1 \in G$ fest, sei $M_{g_1} \subset M$ die Teilmenge, in der alle Tupel der Form (g_1, x) vorkommen. Analog dazu definiert man für festes $x_1 \in X$ die Menge M_{x_1} als die Teilmenge, in der alle Tupel der Form (g, x_1) enthalten sind. Bemerke, dass $|M_{g_1}| = |\text{Fix}(g_1)|$ und $|M_{x_1}| = |\text{Stab}(x_1)|$ gilt. Man sieht aus der Definition von M_g und M_x , dass $M_{g_1} \cap M_{g_2} = \emptyset$ bzw. $M_{x_1} \cap M_{x_2} = \emptyset$ für $g_1 \neq g_2$ bzw. $x_1 \neq x_2$. Somit ist

$$\sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)| = \sum_{g \in G} |M_g| = |M| = \sum_{x \in X} |M_x| = \sum_{x \in X} |\text{Stab}(x)|. \quad (2)$$

Satz 2.3.2. [Abzählssatz von Frobenius] [2, Theorem 13.1]

Sei eine Gruppenwirkung von G auf X definiert. Die Anzahl verschiedener Bahnen beträgt

$$|B| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|.$$

Beweis.

$$|B| = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} |\text{Stab}(x)| \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|.$$

□

Abzählssatz von Frobenius im Einsatz Der Abzählssatz von Frobenius ermöglicht das Lösen des ersten einführenden Problems. Dafür muss zuerst die Gruppe aller Symmetrien des dreieckigen Bretts gefunden werden. Diese induziert eine Gruppenwirkung auf den Färbungen des Bretts, daher kann man den Abzählssatz von Frobenius darauf anwenden, um die Anzahl Bahnen, also die Anzahl verschiedener Färbungen zu bestimmen.

Die Gruppe S_3 der Symmetrieabbildungen des dreieckigen Bretts besteht aus 6 Elementen, zwei Rotationen r_1, r_2 um den Mittelpunkt des Bretts um $\pm 120^\circ$, drei Spiegelungen $s_j, j = 1, 2, 3$ (jeweils an einer der drei Seitenhalbierenden), und der Identitätsabbildung. Sei X die Menge aller Färbungen des dreieckigen Bretts. Es wird durch S_3 eine Gruppenwirkung auf X definiert. Mithilfe des Abzählssatzes von Frobenius findet man die Anzahl der Bahnen.

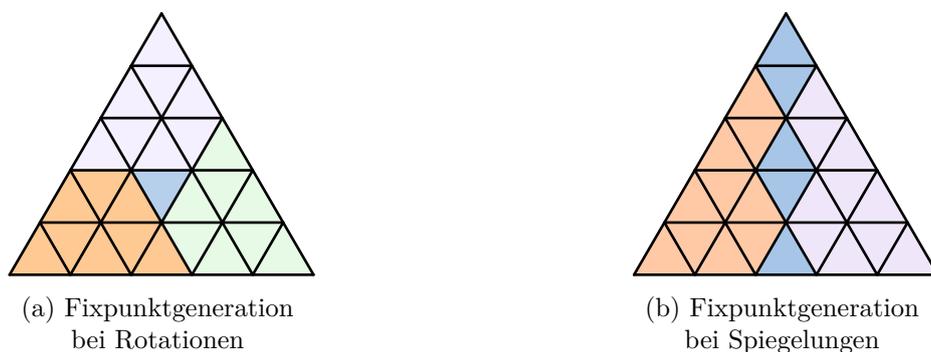


Abbildung 3

Die Fixpunkte der Rotationen r_1, r_2 werden durch die Wahl der Farben der 8 orangen Zellen und der blauen Zelle generiert (siehe Abbildung 3a), die Färbung des grünen Teils und des violetten Teils entsprechen der Rotation der Färbung des orangen Teils. Daher ist $|\text{Fix}(r_i)| = 2^9$ für $i = 1, 2$.

Die Fixpunkte der Spiegelungen $s_i, i = 1, 2, 3$ werden durch die Wahl der Farben der 10 orangen und der 5 blauen Zellen generiert (siehe Abbildung 3b). Daher ist $|\text{Fix}(s_i)| = 2^{15}$ für $i = 1, 2, 3$. Bei der Identität e sind alle Färbungen Fixpunkte, daher ist $|\text{Fix}(e)| = 2^{25}$.

Die Anzahl der Bahnen entspricht der Anzahl der verschiedenen Färbungen und beträgt

$$\frac{1}{6}(2^{25} + 2 \cdot 2^9 + 3 \cdot 2^{15}) = 5608960.$$

2.4 Abzählssatz von Pólya

Wir haben eine Methode gesehen, die Anzahl Bahnen zu bestimmen. Allerdings ist es nicht möglich, genauere Dinge damit zu zählen. Zum Beispiel kann man nicht zählen, wie viele verschiedene Färbungen es gibt, wenn man eine feste Anzahl von Feldern einer Farbe haben soll (siehe Einführungsproblem 2). Es wird eine stärkere Methode benötigt, welche in diesem Unterkapitel beschrieben wird. Zunächst werden Färbungen etwas genauer betrachtet. Diese sind im Prinzip Abbildungen:

Definition 2.4.1 (Färbung). [2, Seite 268]

Eine Färbung mit Farben c_1, \dots, c_k von einer Menge M ist eine Abbildung

$$f : M \rightarrow \{c_1, \dots, c_k\}.$$

Bisher haben wir bei Gruppenwirkungen von G auf X die Elemente $g \in G$ als Funktionen auf der Menge der Färbungen betrachtet. Man hat sozusagen für jedes $g \in G$ folgendes definiert:

$$g \triangleright : X \rightarrow X, x \mapsto g \triangleright x$$

Man kann diese allerdings auch als Permutationen auf der Menge der färbbaren Elemente betrachten: Sei M die Menge der färbbaren Elemente, C die Menge der Farben. Sei X die Menge der Färbungen $f : M \rightarrow C$ und sei G eine Untergruppe der Symmetrieabbildungen. Sei f eine Färbung, und man betrachte die Farbe eines Elements m für $m \in M$ nach einer Symmetrieabbildung g . Betrachtet man g als Permutation der Elemente in M , kann man sagen, dass die Farbe von m die gleiche ist wie die Farbe von \tilde{m} vor der Abbildung g . \tilde{m} ist dabei so definiert, dass $g(\tilde{m}) = m \implies \tilde{m} = g^{-1}(m)$. Dies inspiriert uns, folgende Gruppenwirkung zu definieren:

Definition 2.4.2. [2, Seite 269]

Sei X die Menge aller Funktionen $f : M \rightarrow C$, wobei M und C endliche Mengen sind. Sei G eine Permutationsgruppe der Menge M , $\pi \in G$ eine Permutation. Dann definieren wir die Gruppenwirkung von G auf X durch

$$\pi \triangleright f = f \circ \pi^{-1}.$$

Es muss noch gezeigt werden, dass dies eine Gruppenwirkung definiert.

Beweis. Es wird überprüft, ob alle Eigenschaften einer Gruppenwirkung erfüllt sind:

1. Sei id die Identitätsabbildung, $\text{id} \in G$. Dann gilt:

$$\text{id} \triangleright f = f \circ \text{id}^{-1} = f \circ \text{id} = f$$

2. Seien $\pi_1, \pi_2 \in G$. Dann gilt:

$$\pi_1 \triangleright (\pi_2 \triangleright f) = \pi_1 \triangleright (f \circ \pi_2^{-1}) = f \circ \pi_2^{-1} \circ \pi_1^{-1} = f \circ (\pi_2^{-1} \circ \pi_1^{-1})$$

Zu zeigen bleibt, dass $\pi_2^{-1} \circ \pi_1^{-1} = (\pi_1 \circ \pi_2)^{-1}$. Es gilt:

$$(\pi_1 \circ \pi_2) \circ \pi_2^{-1} \circ \pi_1^{-1} = \pi_1 \circ (\pi_2 \circ \pi_2^{-1}) \circ \pi_1^{-1} = \pi_1 \circ \text{id} \circ \pi_1^{-1} = \pi_1 \circ \pi_1^{-1} = \text{id}$$

und ähnlich zeigt man $\pi_2^{-1} \circ \pi_1^{-1} \circ (\pi_1 \circ \pi_2) = \text{id}$. Daher ist $\pi_2^{-1} \circ \pi_1^{-1} = (\pi_1 \circ \pi_2)^{-1}$ und damit ist diese Gruppenwirkung wohldefiniert. □

Mit dieser Gruppenwirkung können wir Äquivalenzklassen von Färbungen klassifizieren. Für die Lösung von Problemen, bei denen die Anzahl der Felder einer bestimmten Farbe vorgegeben ist, wird eine Methode benötigt, die diese Einschränkung beschreibt.

2.4.1 Einschränkungen beschreiben

Wie viele verschiedene Färbungen einer Menge M mit den Farben c_1, \dots, c_k gibt es, sodass jeweils α_i Elemente der Farbe c_i vorhanden sind? Ist es möglich dies für alle möglichen Distributionen der Anzahl Elemente pro Farbe auf einmal zu berechnen?

Die Antwort auf diese Frage ist ja, man kann dies mithilfe von Gewichtungen erreichen.

Ein Beispiel: [2, Problem 14.1] Sei die Menge $M = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ wobei α, β, γ die drei Sektoren sind, welche man bekommt, wenn man die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks mit dessen Schwerpunkt verbindet. Die Gruppe der Symmetrien vom gleichseitigen Dreieck ist S_3 , dessen Elemente sind auf M Permutationen. Wir möchten jedem Element in M die Farbe blau oder rot zuordnen. Jedes der Elemente nimmt entweder die Farbe r (rot) oder b (blau) an. Wenn man

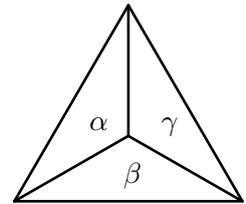


Abbildung 4

$$(r + b)^3 = r^3 + 3r^2b + 3rb^2 + b^3$$

betrachtet, fällt auf, dass der Koeffizient vor $r^x b^y$ jeweils angibt, wie viele Färbungen es gibt, bei denen x Elemente rot und y Elemente blau sind. $(r + b)^3$ ist eine algebraische Interpretation der Farbwahl für jedes Element in M . Dies lässt sich generalisieren:

Definition 2.4.3. [2, Definition 14.1]

Sei X die Menge aller Abbildungen von M auf C . Eine Gewichtung ist eine Abbildung w welche jedem $c \in C$ ein $w(c)$ zuordnet.

1. Für jede Färbung $f \in X$ ist das Gewicht von f , geschrieben $W(f)$, definiert als

$$W(f) := \prod_{m \in M} w(f(m)).$$

2. Ist $Y \subset X$, dann ist das *Inventar* von Y gegeben durch

$$\text{Inv}(Y) := \sum_{f \in Y} W(f).$$

3. Ist Y eine Teilmenge von X , welche jedes Färbungsmuster genau einmal enthält (Färbungsmuster f_1, f_2 sind gleich, wenn $f_1 \sim_G f_2$), so ist das Inventar dieser Teilmenge ein *Musterinventar* $\text{PInv}(X)$.

Bemerkung. Ist eine bestimmte Anzahl Felder jeder Farbe gegeben (dies ist ein Gewicht), wollen wir schlussendlich die Anzahl unterschiedlicher Färbungsmuster für dieses Gewicht zählen. Kennt man das Musterinventar, so können Fragestellungen, welche Einschränkungen bezüglich der Anzahl Elemente einer Farbe haben, beantwortet werden.

Beispiel. Gehen wir zurück zu unserem Beispiel (► S. 17). Seien $w(\text{rot}) = r$ und $w(\text{blau}) = b$.

- Die verschiedenen Gewichte sind $W(f) \in \{b^3, b^2r, br^2, r^3\}$.
- Das Inventar von $Y = X$ ist gegeben durch

$$\text{Inv}(X) = \sum_{f \in X} W(f) = b^3 + 3b^2r + 3br^2 + r^3.$$

- Das Musterinventar von X ist gegeben durch $Y = \text{PInv}(X) = b^3 + b^2r + br^2 + r^3$, da Färbungen, welche zwei blaue und einen roten Sektor haben, mithilfe von Rotationen aufeinander abgebildet werden können. Dasselbe gilt für Färbungen mit zwei roten und einem blauen Sektor.

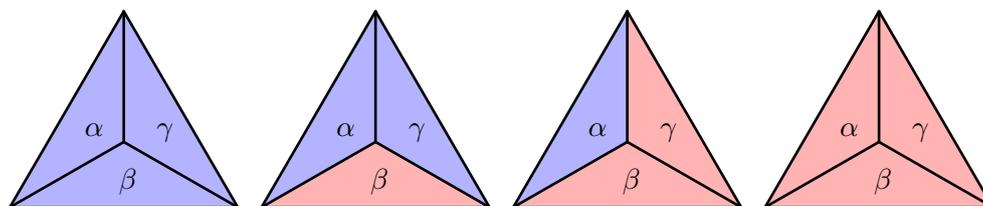


Abbildung 5: alle 4 möglichen Muster

2.4.2 Zyklenindikator einer Gruppe

Können wir das Musterinventar bestimmen, so können wir auch etwas komplexere Probleme wie das zweite einführende Problem lösen. In diesem Abschnitt wird genau beschrieben, wie man das Musterinventar bestimmen kann.

Definition 2.4.4. [2, Seite 37 f]

Die Zykelschreibweise einer Permutation π von einer Menge M mit endlich vielen Elementen stellt eine Permutation unterteilt in Zyklen dar. Man beginnt dabei mit einem Element $m \in M$ und schreibt nacheinander die Elemente $a, \pi(a), \pi(\pi(a)), \dots$, bis man wieder bei a ankommt, in eine Klammer (das letzte a nicht schreiben). Das ist ein Zyklus, man wiederholt das so lange, bis alle Zahlen in einem Zyklus sind.

Beispiel. Betrachte die Permutation

$$\pi : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \pi(1) = 3, \pi(2) = 4, \pi(3) = 5, \pi(4) = 2, \pi(5) = 1, \pi(6) = 6.$$

Dann hat π Zykelschreibweise: $\pi = (1\ 3\ 5)(2\ 4)(6)$.

Definition 2.4.5. [2, Seite 243]

Der Zykeltyp $\text{ct}(\pi)$ einer Permutation von π beschreibt die Art der Permutation. Eine Permutation hat Zykeltyp

$$\text{ct}(\pi) := x_{k_1}^{r_1} \cdots x_{k_s}^{r_s},$$

falls sie in der Zykelschreibweise der Permutation für jedes j mit $1 \leq j \leq s$ genau r_j Zyklen der Länge k_j hat.

Beispiel. Für das vorherige Beispiel wäre $\text{ct}(\pi) = x_1 x_2 x_3$.

Bemerkung. Betrachtet man die x_j auch als Variablen, kann man den Zykeltyp auch als Funktion von den x_j betrachten:

$$\text{ct}(\pi)(x_1, x_2, \dots) = x_{k_1}^{r_1} \cdots x_{k_s}^{r_s}.$$

Dies wird später nützlich sein.

Definition 2.4.6 (Zyklusindikator). [2, Definition 14.2]

Sei G eine Permutationsgruppe auf M . Der Zyklusindikator von G ist definiert als

$$\text{CI}(G)(x_1, x_2, x_3, \dots) := \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \text{ct}(\pi)(x_1, x_2, \dots).$$

Satz 2.4.7. [Abzählsatz von Pólya] [2, Theorem 14.3]

Sei X die Menge aller Abbildungen von M auf C , sei w eine Gewichtung auf C . Sei G eine Permutationsgruppe auf M , auf der die Gruppenwirkung auf X durch

$$\text{für } \pi \in G, \text{ und } f \in X: \pi \triangleright f = f \circ \pi^{-1}$$

gegeben ist. Dann ist das Musterinventar von X gegeben durch

$$\text{PInv}(X) = \text{CI}(G)\left(\sum_{c \in C} w(c), \sum_{c \in C} w(c)^2, \sum_{c \in C} w(c)^3, \dots\right).$$

Bemerkung. Dies sagt uns, dass wir das Musterinventar mithilfe des Zyklusindikators berechnen können.

Beweis. (aus [2, Abschnitt 14.5])

Es werden zunächst einige Lemmata eingeführt und bewiesen. Mithilfe dieser kann der Abzählsatz von Pólya bewiesen werden.

Sei G eine Permutationsgruppe auf M und X die Menge aller Abbildungen (Färbungen) von M auf C . Sei eine Gruppenwirkung \triangleright von G auf X definiert durch $\pi \triangleright f = f \circ \pi^{-1}$ für $\pi \in G$ und $f \in X$.

Lemma 2.4.8. [2, Lemma 14.4]

Sei $\pi \in G$ eine Permutation, $f \in X$ eine Abbildung. Diese Abbildung bleibt konstant unter Permutation π ($f \in \text{Fix}(\pi)$), falls: $\pi \triangleright f = f$.

Beweis.

$$\begin{aligned} \forall x \in M : f(x) &= f \circ \pi(x) \\ \iff f(\pi^{-1}(d)) &= f \circ \pi(\pi^{-1}(d)) = f(d) \quad \forall d \in M \quad (\pi \text{ ist eine Bijektion}) \\ \iff \pi \triangleright f &= f. \end{aligned}$$

□

Lemma 2.4.9. [2, Lemma 14.5]

Sei M_1, M_2, \dots, M_k eine Partition der Menge M . Eine Abbildung f ist konstant auf M_i , falls für alle $m \in M_i$: $f(m) = c$ für ein festes $c \in C$. Das Inventar der Abbildungen, die konstant auf jedem M_i sind, ist gegeben durch

$$\prod_{i=1}^k \left(\sum_{c \in C} w(c)^{|M_i|} \right).$$

Beweis. Um eine konstante Abbildung zu wählen, wählt man für jedes der M_i ein Element $c \in C$. Jedes der Elemente in M_i nimmt dann unter der Abbildung diese Farbe an. Dies resultiert in einem Inventar von $\sum_{c \in C} w(c)^{|M_i|}$ für jedes der M_i . Da die Wahl unabhängig für die M_i ist, multipliziert man alle Inventare der M_i , um ein Inventar der Funktionen, die auf allen der M_i konstant sind, zu bekommen. □

Lemma 2.4.10. [2, Lemma 14.6]

Ist $\text{ct}(\pi) = x_{k_1}^{r_1} \cdots x_{k_t}^{r_t}$, so ist das Inventar von $\text{Fix}(\pi)$ gegeben durch:

$$\text{Inv}(\text{Fix}(\pi)) = \prod_{i=1}^t \left(\sum_{c \in C} w(c)^{k_i} \right)^{r_i} = \text{ct}(\pi) \left(\sum_{c \in C} w(c), \sum_{c \in C} w(c)^2, \dots \right).$$

Beweis. f ist nur dann ein Fixpunkt, falls f konstant unter π ist (Lemma 2.4.8). Für jeden Zyklus in π muss die Farbe seiner Elemente also gleich sein. Die Zyklen von π erzeugen eine Partition von M . In dieser Partition gibt es jeweils r_i Mengen der Grösse k_i , für $1 \leq i \leq t$. Der Rest folgt aus dem vorherigen Lemma (Lemma 2.4.9). □

Bemerkung. (Diese Bemerkung stammt aus einer Beobachtung von mir selbst). Bemerke, dass dieses Lemma impliziert, dass für π mit $\text{ct}(\pi) = x_{k_1}^{r_1} \cdots x_{k_t}^{r_t}$

$$|\text{Fix}(\pi)| = |C|^{\sum_{j=1}^t r_j},$$

denn für $f \in \text{Fix}(\pi)$ muss man für jeden Zyklus eine Farbe wählen, dafür gibt es genau $|C|^{\sum_{j=1}^t r_j}$ Möglichkeiten. Das Betrachten von Zykeltypen gibt uns also eine einfache Methode, $\text{Fix}(\pi)$ zu berechnen, falls $\text{ct}(\pi)$ bekannt ist. Es folgt aus dieser Beobachtung zusammen mit Satz 2.3.2:

$$|B| = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |\text{Fix}(\pi)| = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |C|^{s_\pi},$$

wobei für π mit $\text{ct}(\pi) = x_{k_1}^{r_1} \cdots x_{k_t}^{r_t}$ die Zahl $s_\pi := \sum_{j=1}^t r_j$ die Anzahl verschiedener Zyklen von π ist.

Definiere die Relation \sim , sodass $f \sim g \iff W(f) = W(g)$ (zur Erinnerung, $W(f) = \prod_{m \in M} w(f(m))$). Diese ist eine Äquivalenzrelation, da diese Relation reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Lemma 2.4.11. [2, Lemma 14.7]

Es gilt: haben f, g das gleiche Muster ($f \sim_G g$), so ist $W(f) = W(g)$.

Beweis.

$$W(g) = W(\pi \triangleright f) = W(f \circ \pi^{-1}) = \prod_{m \in M} w(f \circ \pi^{-1}(m)) = \underbrace{\prod_{d \in M} w(f(d))}_{\pi \text{ ist eine Bijektion}} = W(f).$$

□

Der Abzählsatz von Pólya kann nun bewiesen werden. Sei X_i die Menge der Abbildungen $f \in X$, für welche $W(f) = W_i := c_1^{\alpha_1} \cdots c_n^{\alpha_n}$ gilt. Hat es β_i verschiedene Muster in den Abbildungen in X_i , so hat W_i im Musterinventar $\text{PInv}(X)$ den Koeffizienten β_i . Des Weiteren kann kein Muster von zwei Funktionen in verschiedenen X_i repräsentiert werden, daher gilt:

$$\text{PInv}(X) = \sum_i \beta_i W_i.$$

Bemerke, dass durch $\pi \triangleright f$ eine Gruppenwirkung von G auf X_i definiert wird: die Abgeschlossenheit folgt aus Lemma 2.4.11 und die anderen Eigenschaften aus der Definition von $\pi \triangleright f$ von G auf X . Sei π_i die Beschränkung der Gruppenwirkung $\pi \triangleright f$ auf X_i . Da eine Gruppenwirkung definiert ist, kann man den Abzählsatz von Frobenius benutzen, um β_i zu berechnen. Man findet für β_i , dass

$$\beta_i = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |\text{Fix}(\pi_i)| \text{ und somit:}$$

$$\begin{aligned} \text{PInv}(X) &= \sum_i \left(\frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |\text{Fix}(\pi_i)| \right) W_i \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \sum_i |\text{Fix}(\pi_i)| W_i \quad (\text{Vertauschung von endlichen Summen}) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \text{Inv}(\text{Fix}(\pi)) \quad (\text{Vereinigung von disjunkten Mengen}) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \text{ct}(\pi) \left(\sum_{c \in C} w(c), \sum_{c \in C} w(c)^2, \dots \right) \quad (\text{folgt aus Lemma 2.4.10}) \\ &= \text{CI} \left(\sum_{c \in C} w(c), \sum_{c \in C} w(c)^2, \dots \right). \end{aligned}$$

□

Demonstration am zweiten einführenden Problem Sei M die Menge der Flächen des Ikosaeders, $C = \{\text{rot, grün, blau}\}$ die Menge der Farben mit der Gewichtung $w(\text{rot}) = r, w(\text{grün}) = g, w(\text{blau}) = b$. Sei X die Menge aller Färbungen $f : M \rightarrow C$. Die Gruppe der Rotationen des Ikosaeders G definiert eine Gruppenwirkung auf X durch

$$\forall r \in G, \forall f \in X : r \triangleright f = f \circ r^{-1}.$$

Diese teilt X in die gewünschten Äquivalenzklassen auf. Die Gruppe G besteht aus 60 Elementen: Wähle zunächst eine gerichtete Kante \overrightarrow{AB} des Ikosaeders. Bei jeder Rotation wird diese auf eine beliebige gerichtete Kante \overrightarrow{CD} des Ikosaeders abgebildet. Es gibt dafür insgesamt 60 Möglichkeiten (30 Kanten, 2 mögliche Richtungen), und man kann sich leicht überzeugen, dass jede Rotation durch solch eine Abbildung eindeutig definiert wird.

Es gibt 4 verschiedene Typen von Rotationen in dieser Gruppe: die Identität, welche Zykeltyp x_1^{20} hat, und drei weitere Typen, welche sich durch ihre Drehachsen charakterisieren: Es gibt Rotationen mit:

1. Drehachsen, welche durch zwei gegenüberliegende Eckpunkte des Ikosaeders gehen. Von diesem Typ gibt es 24 Rotationen: 6 verschiedene Achsen und 4 verschiedene Rotationen pro Achse. Bei diesem Typ hat jede Rotation den Zykeltyp x_5^4 .
2. Drehachsen, welche durch zwei gegenüberliegende Kantenmittelpunkte verlaufen. Von diesem Typ gibt es 15 Rotationen, pro Achse ist genau eine Rotation vorhanden. Bei diesem Typ hat jede Rotation den Zykeltyp x_2^{10} .
3. Drehachsen, welche durch zwei gegenüberliegende Flächenmittelpunkte gehen. Von diesem Typ gibt es 20 Rotationen, pro Achse genau 2 und insgesamt 10 solche Rotationsachsen. Diese Rotationen sind jeweils vom Typ $x_1^2 x_3^6$.

Der Zyklenindikator von G ist gegeben durch

$$\text{CI}(G) = \frac{1}{20}(x_1^{20} + 10x_1^2 x_3^6 + 15x_2^{10} + 24x_5^4).$$

Der Abzählssatz von Pólya (Satz 2.4.7) besagt nun, dass wir das Musterinventar von X erhalten, wenn wir für x_j im Zyklenindikator $(r^j + g^j + b^j)$ einsetzen. Um die Berechnung zu vereinfachen, bemerken wir, dass nur die Terme x_1^{20} und $x_1^2 x_3^6$ zum Koeffizient von $b^3 r^7 g^{10}$ beitragen, da bei x_2^{10} bzw. x_5^4 alle von 0 ungleichen Koeffizienten gerade Zahlen bzw. durch 5 teilbare Zahlen in den Exponenten von r, g, b haben, was bei $b^3 r^7 g^{10}$ nicht der Fall ist. Der Koeffizient von $b^3 r^7 g^{10}$ bei x_1^{20} ist $\frac{20!}{3!7!10!}$, und bei $x_1^2 x_3^6$ ist er $2 \frac{6!}{3!2!1!}$. Die gesuchte Anzahl Färbungen ist gleich wie der Koeffizient von $b^3 r^7 g^{10}$ im Musterinventar von X und beträgt

$$\frac{1}{60} \left(\frac{20!}{3!7!10!} + 20 \cdot 2 \frac{6!}{3!2!1!} \right) = 369552.$$

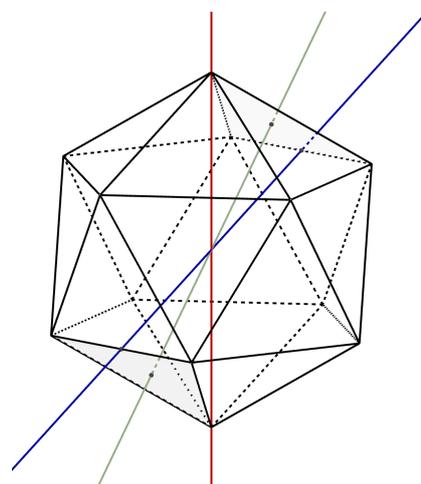


Abbildung 6: Drehachsen eines Ikosaeders

3 Resultate

In diesem Teil der Maturaarbeit wird die Anwendung der im vorherigen Abschnitt eingeführten Methoden anhand der folgenden Probleme demonstriert:

3.1 Probleme

Problem 1 (eigenes Problem, inspiriert durch [2, Problem 13A, Seite 245])

Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, ein $n \times n$ Brett mit k Farben zu färben, falls zwei Färbungen als gleich gelten sollen, **1.** wenn sie in allen Zellen übereinstimmen? **2.** wenn sie sich um höchstens eine Rotation unterscheiden? **3.** wenn sie sich um höchstens eine Rotation oder eine Spiegelung unterscheiden?

Problem 2 [2, Problem 13.2.4.A, Seite 264f]

Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die Flächen eines Würfels mit k Farben zu färben, falls zwei Färbungen als gleich gelten sollen, wenn sie sich um höchstens eine Rotation unterscheiden?

Problem 3 [2, Problem 13.2.4.A, Seite 264f]

Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, **1.** die Flächen, **2.** die Ecken eines Tetraeders mit k Farben zu färben, falls zwei Färbungen als gleich gelten sollen, wenn sie sich um höchstens eine Rotation unterscheiden?

Problem 4 (eigenes Problem, inspiriert durch [3, Seite 16f])

Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die Ecken eines regulären n -Ecks mit c Farben zu färben, wobei zwei Färbungen als gleich gezählt werden, wenn sie sich um höchstens eine Spiegelung oder Rotation unterscheiden?

Problem 5 (Eigenes Problem, inspiriert durch [3, Seite 16f])

Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, ein Armband bestehend aus 10 Perlen, 3 davon blau und 7 davon grün, zusammenzustellen? Nehme an, dass diese, abgesehen von ihrer Farbe, in allen anderen Eigenschaften übereinstimmen.

Problem 6 (Eigenes Problem)

Wie viele verschiedene Färbungen der Flächen eines Dodekaeders mit 3 Farben gibt es, sodass jede der 3 Farben ein Vielfaches von 3 Mal vorkommt, und zwei Färbungen als gleich gezählt werden, wenn sie sich um höchstens eine Rotation unterscheiden?

Problem 7 ([2, Abschnitt 14.6, Seite 285 ff], eigener Lösungsweg)

Finde eine Methode zur Berechnung der Anzahl verschiedener einfacher Graphen mit n ununterscheidbaren Ecken und k Kanten. Bestimme anschliessend die Anzahl einfacher Graphen mit 6 Ecken und 8 Kanten. Für die Definition eines einfachen Graphen, siehe Anhang (Abschnitt 6.3).

3.2 Lösungswege

3.2.1 Problem 1

Aufgabenstellung Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, ein $n \times n$ Brett mit k Farben zu färben, falls zwei Färbungen als gleich gelten sollen, **1.** wenn sie in allen Zellen übereinstimmen? **2.** wenn sie sich um höchstens eine Rotation unterscheiden? **3.** wenn sie sich um höchstens eine Rotation oder eine Spiegelung unterscheiden?

Lösung 1. In diesem Fall hat es für jede Zelle genau k Möglichkeiten zur Färbung. Stimmen zwei Färbungen in einer Zelle nicht überein, so sind sie verschieden. Daher hat man insgesamt k^{n^2} verschiedene Färbungen.

2. Zählt man „modulo Rotationen“ oder „modulo Symmetrieabbildungen“, ist oft eine Gruppe involviert. Es ist daher keine schlechte Idee, Gruppenwirkungen zu verwenden. Betrachte die Gruppe R aller Rotationen eines $n \times n$ Bretts. Diese Gruppe R hat 4 Elemente, nämlich die Rotation im Gegenuhrzeigersinn um $0^\circ(e)$, $90^\circ(l)$, $180^\circ(h)$ und $270^\circ(r)$. Sei X die Menge aller möglichen Färbungen des $n \times n$ Bretts. Die Gruppe R induziert eine Gruppenwirkung auf der Menge X . Die Problemstellung ist daher äquivalent zur Frage „Wie viele verschiedene Bahnen hat die Äquivalenzrelation \sim_R ?“

Durch die Anwendung des Abzählssatzes von Frobenius (Satz 2.3.2) kann das Problem gelöst werden. Für e gilt: $\text{Fix}(e) = X$. Somit ist $|\text{Fix}(e)| = |X| = k^{n^2}$. Für die Rotationen l, r und h muss zwischen den Fällen n gerade und n ungerade unterschieden werden.

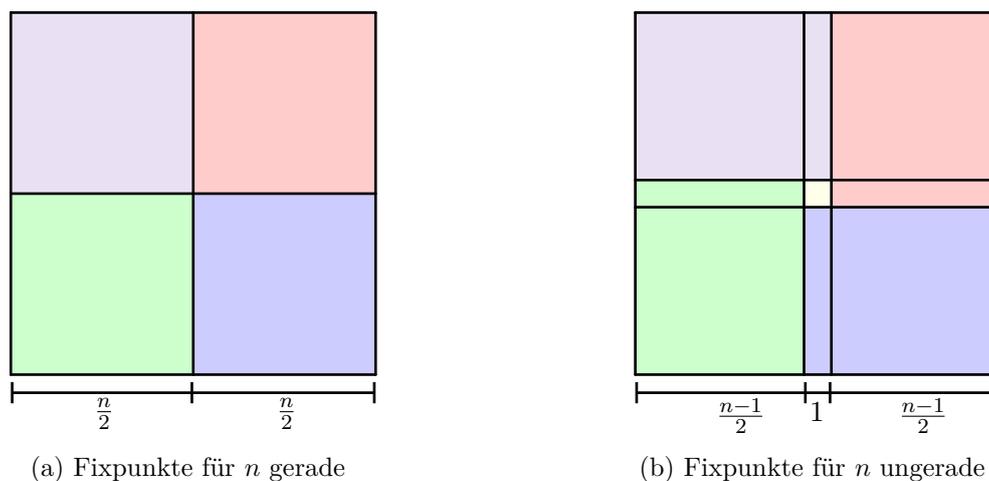


Abbildung 7

Zunächst wird der Fall n gerade behandelt: Für l und r gilt: $x \in \text{Fix}(l)$ bzw. $\text{Fix}(r)$ genau dann, wenn die Färbung durch das grüne Quadrat (siehe Abbildung 7a) mithilfe von Rotationen erzeugt werden kann. Daher ist $|\text{Fix}(l)| = |\text{Fix}(r)| = k^{n^2/4}$.

Für h ist $x \in \text{Fix}(h)$ genau dann, wenn die Färbung durch das Rechteck bestehend aus dem blauen und dem grünen Quadrat mithilfe von Rotationen um den Mittelpunkt erzeugt werden

kann. Daher ist $|\text{Fix}(h)| = k^{n^2/2}$. Insgesamt gilt daher für n gerade: Die Anzahl gesuchter Färbungen beträgt

$$\frac{1}{4}(k^{n^2} + 2 \cdot k^{n^2/4} + k^{n^2/2})$$

Sei nun n ungerade. Es gilt: $x \in \text{Fix}(l)$ bzw. $\text{Fix}(r)$ genau dann, wenn die Färbung durch Rotationen um $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ und 270° der Figur bestehend aus dem grünen und gelben Rechteck (siehe Abbildung 7b) um den Mittelpunkt erzeugt werden kann. Daher ist $|\text{Fix}(l)| = |\text{Fix}(r)| = k^{(n-1) \cdot (n+1)/4 + 1} = k^{(n^2+3)/4}$.

Für h gilt: $x \in \text{Fix}(h)$ genau dann, wenn die Färbung durch Rotationen um 0° und 180° um den Mittelpunkt der Figur bestehend aus dem grünen und dem blauen Rechteck und dem gelben Quadrat erzeugt werden kann. Man kann daher für $(n^2 + 1)/2$ Zellen die Farbe frei wählen. Daher ist $|\text{Fix}(h)| = k^{(n^2+1)/2}$.

Für n ungerade gibt es daher $\frac{1}{4}(k^{n^2} + 2 \cdot k^{(n^2+3)/4} + k^{(n^2+1)/2})$ Bahnen.

Die Anzahl Bahnen entspricht der Anzahl verschiedener Färbungen, daher haben wir:

Für n gerade gibt es $\frac{1}{4}(k^{n^2} + 2k^{\frac{n^2}{4}} + k^{\frac{n^2}{2}})$ Färbungen.

Für n ungerade gibt es $\frac{1}{4}(k^{n^2} + 2 \cdot k^{\frac{n^2+3}{4}} + k^{\frac{n^2+1}{2}})$ Färbungen.

3. Wir betrachten die Gruppe G aller Symmetrien des Quadrats. Diese Gruppe besteht aus der Menge R (aus der Teilaufgabe 2.) und zusätzlich aus 4 weiteren Elementen, nämlich den zwei Spiegelungen entlang den beiden Diagonalen und den zwei Spiegelungen entlang den Seitenhalbierenden. Sei X die Menge aller möglichen Färbungen. Die Gruppe G generiert eine Gruppenwirkung auf der Menge X . Die Problemstellung ist äquivalent zur Fragestellung „Wie viele verschiedene Bahnen hat die Äquivalenzrelation \sim_G ?“

In diesem Fall wird wieder den Abzählsatz von Frobenius (Satz 2.3.2) angewendet. Die Werte für $|\text{Fix}(g)|$ für $g \in R$ wurden in der vorherigen Teilaufgabe bereits bestimmt. Es müssen nur noch die Werte für $|\text{Fix}(g)|$ der anderen 4 Elemente bestimmt werden.

Für Spiegelungen an einer der Diagonalen ist $x \in \text{Fix}(g)$, wenn die Färbung unterhalb der Diagonalen die gespiegelte Färbung oberhalb der Diagonalen ist. Man kann daher die Färbung der Zellen oberhalb der Diagonalen und auf der Diagonalen frei wählen und somit ist $|\text{Fix}(g)| = k^{n(n+1)/2}$ für diese zwei Spiegelungen.

Für die Spiegelung an den Mittelsenkrechten: Für n gerade kann man die Färbung auf einer Hälfte des Quadrats frei färben, die andere Hälfte folgt daraus. Für n ungerade kann man die Zellen auf einer Seite und die Zellen auf der Mittelsenkrechten frei färben, die Färbung der anderen Zellen folgt daraus. Somit ergibt sich für n gerade: $|\text{Fix}(g)| = k^{n^2/2}$ und für n ungerade: $|\text{Fix}(g)| = k^{n(n+1)/2}$.

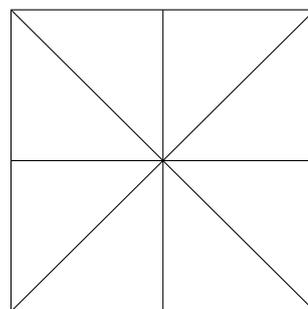


Abbildung 8: Spiegelachsen eines Quadrats

Insgesamt ergibt sich:

Für n gerade gibt es $\frac{1}{8}(k^{n^2} + 2k^{\frac{n(n+1)}{2}} + 3k^{\frac{n^2}{2}} + 2k^{\frac{n^2}{4}})$ Färbungen und
 für n ungerade gibt es $\frac{1}{8}(k^{n^2} + 4k^{\frac{n(n+1)}{2}} + k^{\frac{n^2+1}{2}} + 2k^{\frac{n^2+3}{4}})$ Färbungen.

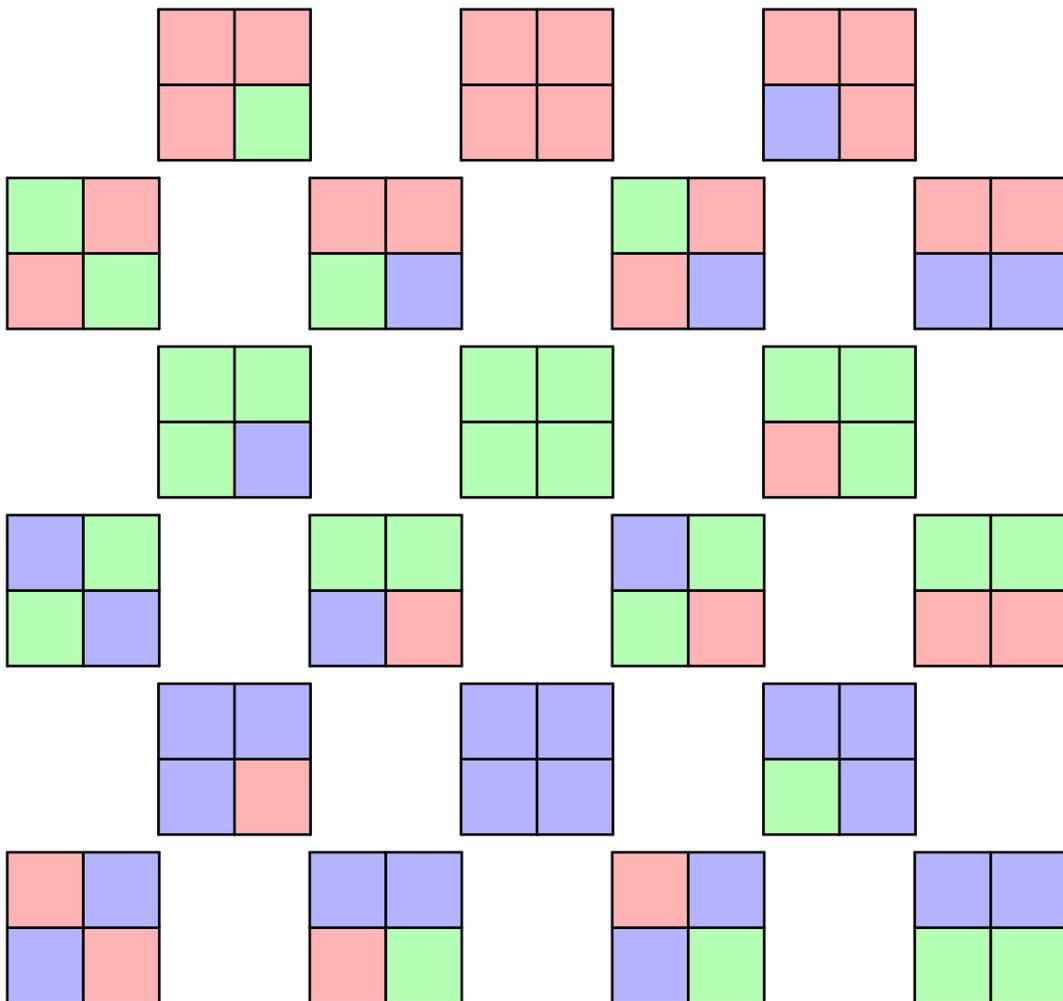


Abbildung 9: alle verschiedenen Färbungen im Fall $n = 2, k = 3$ (Teilaufgabe 3.)

3.2.2 Problem 2

Aufgabenstellung Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die Flächen eines Würfels mit k Farben zu färben, falls zwei Färbungen als gleich gelten sollen, wenn sie sich um höchstens eine Rotation unterscheiden?

Lösung Dieses Problem ist ähnlich zum Vorherigen, hier geht es wieder darum, die richtige Gruppe zu identifizieren, welche eine Gruppenwirkung definiert, bei der die Äquivalenzklassen genau die Färbungen sind, welche als gleich gezählt werden sollen. Danach kann man den Abzählsatz von Frobenius anwenden, um das Problem zu lösen.

Die gesuchte Gruppe G ist die Gruppe aller Rotationen, da die Problemstellung Färbungen unter einer Rotation als gleich zählt. Es gibt genau eine Rotation, welche die Fläche F und einer dessen Kanten k auf die andere Fläche F' und einer dessen Kanten k' abbildet. Auch bildet jede Rotation das Tupel (F, k) auf ein von der Rotation abhängiges Tupel (F', k') ab, daher ist die Anzahl der Rotationen die Anzahl der Tupel der Form (F', k') . Es gibt 6 Möglichkeiten für F' und 4 für k' und somit besteht G aus 24 Elementen. In Abbildung 10 findet man die verschiedenen möglichen Drehachsen der Rotationen der Gruppe G , Typ 1 verläuft durch gegenüberliegende Ecken, Typ 2 verläuft durch gegenüberliegende Flächenmittelpunkte und Typ 3 verläuft durch gegenüberliegende Kantenmittelpunkte.

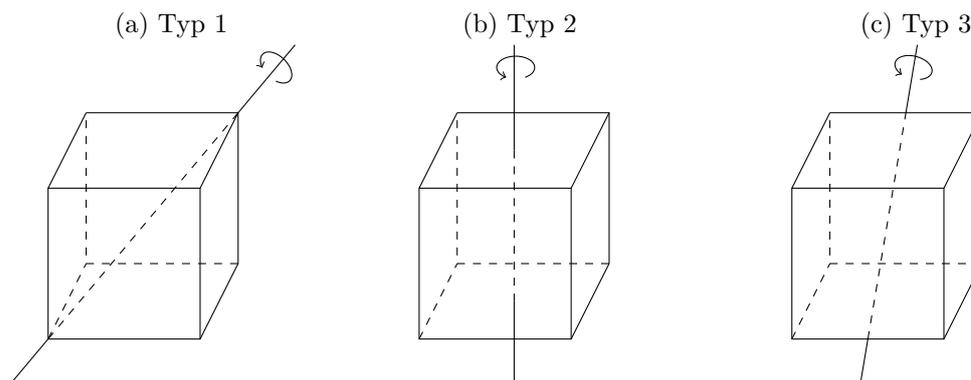


Abbildung 10: Drehachsen eines Würfels

Da es 4 Paare gegenüberliegender Ecken gibt, gibt es auch 4 Drehachsen vom Typ 1. Für jede dieser Drehachsen hat es 2 Rotationen verschieden von der Identität, nämlich die Rotationen um $\pm 120^\circ$ um die Drehachse. Beide haben Zykeltyp x_3^2 . Daher folgt aus der Bemerkung in Lemma 2.4.10, dass

$$|\text{Fix}(\pm 120^\circ \text{ Rotation Typ 1})| = k^2.$$

Vom Typ 2 verläuft jede Drehachse durch ein Paar gegenüberliegender Flächenmittelpunkte. Da es 6 Flächen gibt, gibt es 3 Paare und somit 3 Drehachsen dieser Art. Für jede dieser Drehachsen gibt es zwei Rotationen mit Zykeltyp $x_1^2 x_4$, nämlich die Rotationen um $\pm 90^\circ$, und eine Rotation

mit Zykeltyp $x_1^2 x_2^2$, nämlich die Rotation um 180° . Es gilt daher:

$$|\text{Fix}(\pm 90^\circ \text{ Rotation Typ 2})| = k^3 \quad \text{und} \quad |\text{Fix}(180^\circ \text{ Rotation Typ 2})| = k^4.$$

Vom dritten Typ gibt es insgesamt 6 Drehachsen, für jedes Paar gegenüberliegender Kantenmittelpunkte eine. Pro Drehachse existiert nur eine Rotation verschieden von der Identität. Diese ist eine 180° Drehung um diese Drehachse und hat Zykeltyp x_2^3 . Somit ist

$$|\text{Fix}(180^\circ \text{ Rotation Typ 3})| = k^3.$$

Für die Identität gilt: $|\text{Fix}(\text{id})| = k^6$. Nach Frobenius (Satz 2.3.2) gibt es daher insgesamt

$$\frac{1}{24}(k^6 + 8k^2 + 12k^3 + 3k^4) \text{ verschiedene Färbungen.}$$

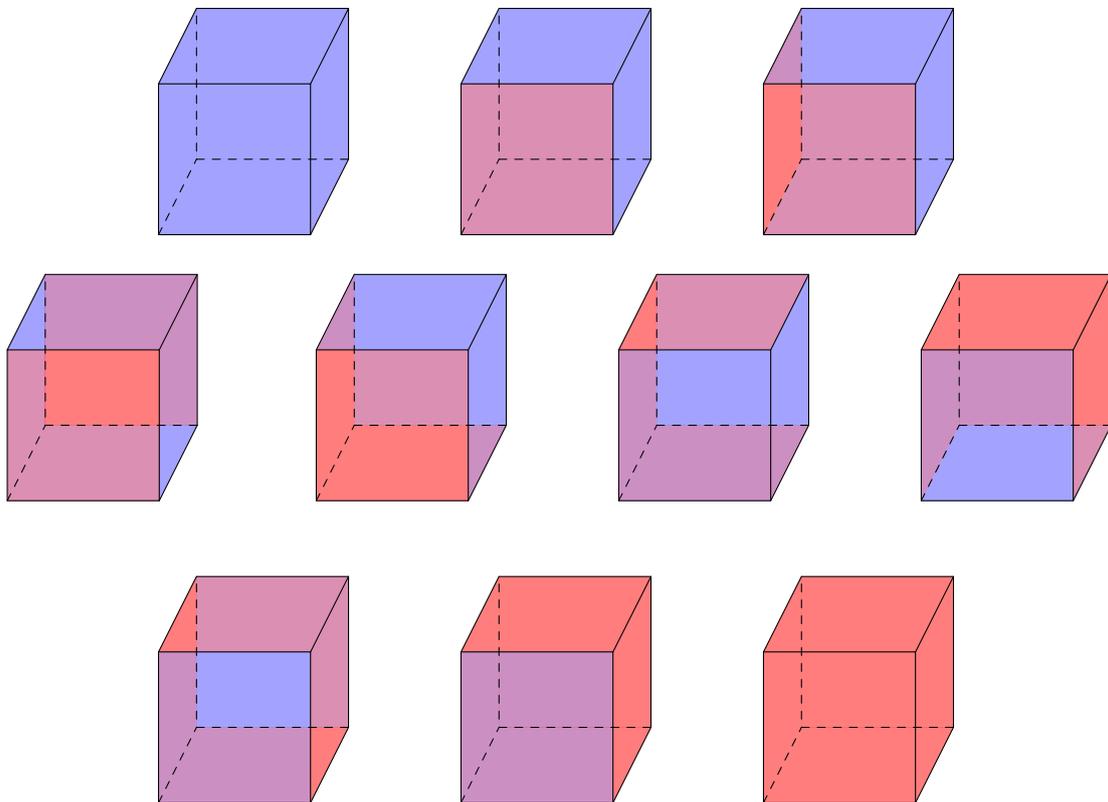


Abbildung 11: alle verschiedenen Färbungen im Fall $k = 2$

3.2.3 Problem 3

Aufgabenstellung Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, 1. die Flächen, 2. die Ecken eines Tetraeders mit k Farben zu färben, falls zwei Färbungen als gleich gelten sollen, wenn sie sich um höchstens eine Rotation unterscheiden?

Lösung Zunächst wird gezeigt, dass die Anzahl Färbungen für beide Teile des Problems übereinstimmen. Definiere dafür eine Abbildung, welche jede Ecke auf die Farbe der gegenüberliegenden Fläche abbildet. Es wird so eine Bijektion zwischen den Färbungen der Flächen und den Färbungen der Ecken definiert. Weiter sind zwei Färbungen für Flächen genau dann verschieden, wenn die Färbungen der Ecken, welche durch die Abbildung definiert wird, verschieden sind. Die Anzahl verschiedener Färbungen muss daher für beide Teilaufgaben gleich sein. Man kann also beide Teilaufgaben gleichzeitig lösen. Sei G die Gruppe aller Rotationen in der Gruppe der Symmetrieabbildungen eines Tetraeders. Es werden zwei Beobachtungen gemacht:

1. Bei einer Rotation ungleich der Identität bleibt höchstens eine der 4 Ecken an ihrem Platz.

Beweis. Würden zwei Ecken an ihrem Platz bleiben, so hätte man eine Spiegelung an einer Kante. Würden drei Ecken an ihrem Platz bleiben, so würde die 4. auch an ihrem Platz bleiben und man hätte die Identität. \square

2. Jedes Element in der Gruppe G hat eine gerade Anzahl an Zyklen in ihrem Zykeltyp.

Beweis. Nehme an, es gäbe eine Rotation g mit einer ungeraden Anzahl an Zyklen. Dann hat g entweder 1 Zyklus oder 3. Hat die Rotation g einen Zyklus, hat g Zykeltyp x_4 . Sei o.B.d.A. $g = (1234)$. Bemerke, dass Ecken 1, 2, 3 in einer Ebene liegen, und diese Rotation Ecke 1 zunächst auf Ecke 2 und bei Wiederholung auf Ecke 3 abbildet. Da die Ecke 3 nicht gleich Ecke 1 ist, spannen diese drei Ecken eine Ebene, und die Rotation bildet die Ebene auf sich selbst ab. Bei einer dritten Wiederholung muss diese Rotation daher die Ecke 3 zwingend auf einen Punkt in derselben Ebene abbilden, und Ecke 4 ist nicht auf dieser Ebene, daher ist dies nicht möglich. Gäbe es 3 Zyklen, so wäre g vom Zykeltyp $x_1^2 x_2$, ein Widerspruch zur ersten Beobachtung, dass höchstens eine Ecke an ihrem Platz bleibt. \square

Das heisst, jedes Element in der Gruppe hat entweder 2 oder 4 Zyklen, 4 Zyklen sind nur möglich, wenn das Element die Identität ist. Es gibt insgesamt 12 Elemente in der Gruppe: Betrachtet man zwei festgewählte Ecken E_1 und E_2 , wobei $E_1 \neq E_2$, so werden diese unter einer Rotation auf E'_1 bzw. E'_2 (mit $E'_1 \neq E'_2$) abgebildet. Dafür gibt es 12 Möglichkeiten und jede solche Abbildung lässt sich eindeutig zu einer Rotation zuordnen. Damit ist nach Frobenius (Satz 2.3.2) und dem Lemma 2.4.10 die Anzahl verschiedener Färbungen

$$\frac{1}{12}(k^4 + 11k^2).$$

3.2.4 Problem 4

Aufgabenstellung Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die Ecken eines regulären n -Ecks mit c Farben zu färben, wobei zwei Färbungen als gleich gezählt werden, wenn diese sich um höchstens eine Spiegelung oder Rotation unterscheiden?

Lösung Sei X die Menge aller möglichen Färbungen der n Ecken mit c Farben. Dieses Problem kann mit dem Abzählsatz von Frobenius gelöst werden, da es bei diesem Problem abgesehen von den durch eine Gruppenwirkung auf X generierten Äquivalenzklassen keine weiteren Bedingungen gibt, welche die Anzahl der möglichen Färbungen einschränkt. Jedoch werden wir trotzdem die Zykeltypen der Elemente der Gruppe berechnen, da die Argumentation mit Zykeltypen einfacher ist. Für dieses Problem wird zunächst die Gruppe identifiziert und danach für jedes Element der Gruppe dessen Zykeltyp bestimmt.

Die Gruppe G der Symmetrieabbildungen für ein regelmässiges n -Eck hat $2n$ Elemente. Dies kann man sehen, indem man zwei Eckpunkte P_1, P_2 einer Seite wählt und sie auf zwei Eckpunkte Q_1, Q_2 einer Seite abbildet. Dafür gibt es $2n$ Möglichkeiten: n Möglichkeiten für die Wahl einer Seite und 2 Möglichkeiten für die Wahl, auf welchen Punkt P_1 abgebildet wird. Es gibt nur eine Symmetrieabbildung f , für welche $f(P_j) = Q_j, j = 1, 2$ gilt, also ist $|G| \geq 2n$. Auch muss jede Symmetrieabbildung zwei Eckpunkte einer Seite auf zwei Eckpunkte einer Seite abbilden, daher ist $|G| \leq 2n$ und somit muss die Anzahl der Symmetrieabbildungen für ein n -Eck $2n$ sein. Fixiere eine Seite s und bilde diese auf eine Seite s_2 ab, wobei die Orientierung nicht verändert wird. Genau für eine Rotation wird s so auf s_2 abgebildet, und jede Rotation bildet s orientierungserhaltend auf eine andere Seite ab. Es gibt somit genau n Rotationen, denn es gibt n Möglichkeiten zur Wahl von s_2 . Die Rotationen sind jene um $\frac{2\pi k}{n}$ um den Mittelpunkt, für $0 \leq k \leq n-1$. Rotationen um $\frac{2\pi k}{n}$ mit $k \geq n$ entsprechen einer der vorhergenannten Rotationen. Die anderen Symmetrieabbildungen sind Spiegelungen, es gibt $2n - n = n$ davon. Betrachte zunächst die Rotationen. Betrachte die Rotation r_k um $\frac{2\pi k}{n}$ für k fest. Was ist der Zykeltyp dieser Rotation?

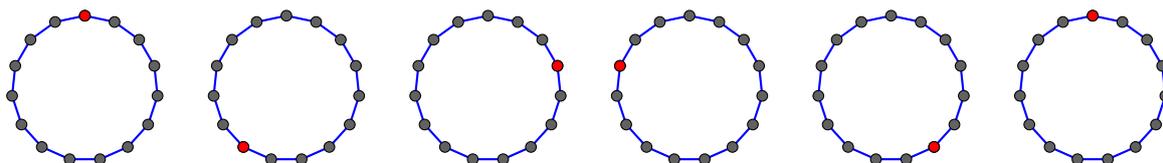


Abbildung 12: Wiederholte Anwendungen der Rotation r_6 um $\frac{2\pi 6}{15}$ in einem 15-Eck. Der Zykeltyp von r_6 ist x_5^3 , denn nach 5 wiederholten Anwendungen ist eine Ecke wieder an seiner ursprünglichen Position.

Sei $d := \text{ggT}(k, n)$, bemerke, dass d ein Teiler von n ist. Wendet man die Rotation r_k $\frac{n}{d}$ -mal an, so hat man am Ende eine Rotation von $\frac{2\pi n \cdot k}{n \cdot d} = 2\pi \frac{nk}{nd}$. Bemerke, dass nk ein Vielfaches von nd ist und somit $2\pi \frac{nk}{nd}$ ein Vielfaches von 2π , daher ist man nach $\frac{n}{d}$ wiederholter Anwendungen der Rotation r_k wieder bei der Anfangsposition. Dies stimmt mit der Beobachtung in Abbildung 12 überein.

Ist dies die kleinste Anzahl wiederholter Anwendungen dieser Rotation, damit eine Ecke wieder an ihre ursprüngliche Position gelangt? Die Antwort auf diese Frage ist ja: Nehme an, es wäre möglich, dies mit $0 < l < \frac{n}{d}$ Anwendungen zu tun. Nach l Anwendungen hat man insgesamt eine Rotation von $2\pi \cdot \frac{lk}{n}$. Damit eine Ecke wieder an ihrer Anfangsposition ist, muss dies ein Vielfaches von 2π sein. Daraus folgt, dass lk ein Vielfaches von n sein muss, und somit n ein Teiler von lk ist. Schreibe k als $d \cdot q$. Dabei ist q gemäss Definition von d teilerfremd zu n , daher teilt n die Zahl $l \cdot d$ und somit teilt $\frac{n}{d}$ die Zahl l . Dies ist ein Widerspruch, da $\frac{n}{d} > l > 0$ und somit existiert ein solches l nicht.

Für eine Rotation r_k um $\frac{2\pi k}{n}$ ist der Zykeltyp also

$$\text{ct}(r_k) = x_{n/d}^d, \quad d := \text{ggT}(k, n).$$

Die Frage ist nun, wie viele Rotationen diesen Zykeltyp haben. Alle Rotationen r_k mit diesem Zykeltyp müssen $\text{ggT}(n, k) = d$ haben. k muss also die Form $q \cdot d$ haben, wobei q teilerfremd zu $\frac{n}{d}$ ist (sonst wäre $\text{ggT}(n, k) \neq d$). k ist auch $\leq n - 1$. An dieser Stelle wird die Eulersche Phi-Funktion φ eingeführt. Diese zählt die Anzahl der teilerfremden Zahlen zu m kleiner als m :

$$\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, m \mapsto \varphi(m) := |\{j : 0 < j \leq m, \text{ggT}(j, m) = 1\}|.$$

Eine exakte Formel für $\varphi(m)$ befindet sich im Anhang (► S. 45). Die Anzahl Rotationen mit Zykeltyp $x_{n/d}^d$ ist also $\varphi(\frac{n}{d})$.

Betrachte nun die Spiegelungen. Hier unterscheidet man zwischen zwei Fällen, nämlich n gerade und n ungerade. Dies liegt daran, dass für n gerade die Spiegelachsen entweder durch zwei Ecken oder durch zwei Seitenmittelpunkte verlaufen, während bei n ungerade diese jeweils durch eine Ecke und einen Seitenmittelpunkt verlaufen (siehe Abbildung 13).

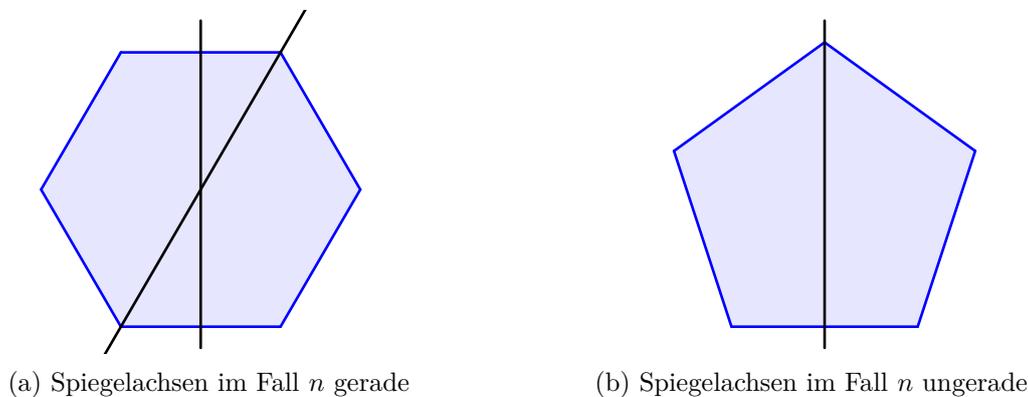


Abbildung 13: Spiegelachsen bei n -Ecken

Es gilt:

1. Im Fall n ungerade hat jede Spiegelung Zykeltyp $x_1 x_2^{(n-1)/2}$.
2. Ist n gerade, so ist für $\frac{n}{2}$ der Spiegelungen der Zykeltyp $x_2^{n/2}$ und für die anderen $\frac{n}{2}$ ist er $x_1^2 x_2^{(n-2)/2}$.

Der Zyklenindikator ist also

$$\text{CI}(G) = \frac{1}{2n} \left(\frac{n}{2} (x_2^{n/2} + x_1^2 x_2^{(n-2)/2}) + \sum_{d:d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) x_{n/d}^d \right) \text{ für } n \text{ gerade, und}$$

$$\text{CI}(G) = \frac{1}{2n} (n x_1 x_2^{(n-1)/2} + \sum_{d:d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) x_{n/d}^d) \text{ für } n \text{ ungerade.}$$

Lemma 2.4.10 gibt uns die Anzahl verschiedener Färbungen:

$$\#\text{Färbungen} = \frac{1}{2n} \left(\frac{n}{2} (c^{n/2} + c^{(n+2)/2}) + \sum_{d:d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) c^d \right) \text{ für } n \text{ gerade und}$$

$$\#\text{Färbungen} = \frac{1}{2n} (n c^{(n+1)/2} + \sum_{d:d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) c^d) \text{ für } n \text{ ungerade.}$$

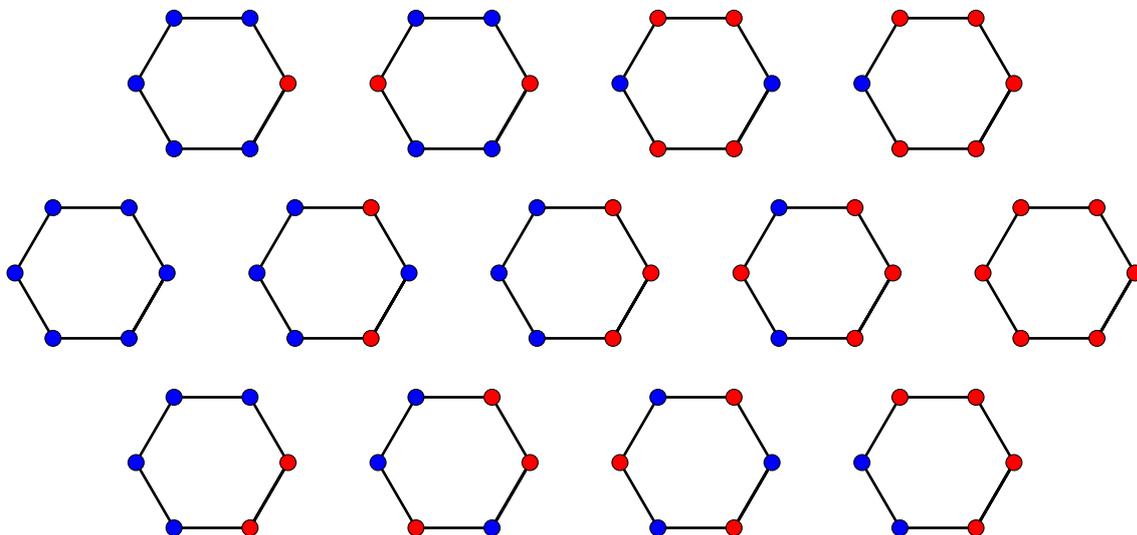


Abbildung 14: mögliche Färbungen der Ecken eines Sechsecks mit zwei Farben

3.2.5 Problem 5

Aufgabenstellung Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, ein Armband bestehend aus 10 Perlen, 3 davon blau und 7 davon grün, zusammenzustellen? Nehme an, dass diese, abgesehen von ihrer Farbe, in allen anderen Eigenschaften übereinstimmen.

Lösung Dieses Problem hat eine Bedingung, welche die Anzahl der möglichen Färbungen weiter einschränkt, daher wird der Abzählsatz von Pólya (Satz 2.4.7) angewendet. Man kann sich unter dem Armband mit 10 Perlen ein regelmässiges 10-Eck vorstellen, dessen Ecken die Perlen sind. Sei G die Gruppe der Symmetrieabbildungen dieser Figur, $C = \{b, g\}$ die Menge der Farben (blau und grün) und sei X die Menge der Färbungen der Ecken mit Farben aus C . Dann erzeugt G eine Gruppenwirkung auf X . Aus der Lösung von Problem 4 (► S. 30) weiss man, dass der Zyklenindikator dieser Gruppe durch

$$\text{CI}(G) = \frac{1}{20}(5(x_2^5 + x_1^2x_2^4) + \sum_{d: d|10} \varphi\left(\frac{10}{d}\right)x_{10/d}^d) \text{ gegeben ist.}$$

Sei $\omega(g) = 1$, $\omega(b) = b$. Mithilfe vom Abzählsatz von Pólya (Satz 2.4.7) hat man:

$$\begin{aligned} \text{PInv}(G) &= \text{CI}\left(\sum_{c \in C} \omega(c), \dots\right) = \frac{1}{20}(5((1+b)^5 + (1+b)^2(1+b^2)^4) + \sum_{d: d|10} \varphi\left(\frac{10}{d}\right)(1+b^{10/d})^d) \\ &= \frac{1}{20}(5(1+b^2)^5 + 5(1+b)^2(1+b^2)^4 + (1+b)^{10} + (1+b^2)^5 + 4(1+b^5)^2 + 4(1+b^{10})) \\ &= \frac{1}{20}((1+b)^{10} + 5(1+b)^2(1+b^2)^4 + 6(1+b^2) + 4(1+b^5)^2 + 4(1+b^{10})) \end{aligned}$$

Betrachtet man $\text{PInv}(G)$ als Polynom in b , so ist nach dem Koeffizienten von b^3 gesucht, denn dieser entspricht der Anzahl von Armbändern, bei denen 3 Perlen blau und 7 grün gefärbt sind. Die Berechnungen befinden sich in folgender Tabelle:

$(1+b)^{10}$	$5(1+b)^2(1+b^2)^4$	$6(1+b^2)^5$	$4(1+b^5)^2$	$4(1+b^{10})$
$\binom{10}{3} = 120$	$5 \cdot 8$, wähle ein b und ein b^2 ($2 \cdot 4 = 8$ Möglichkeiten)	0, da es ein gerades Polynom ist	0, weil $(1+b^5)^2 = 1 + 2b^5 + b^{10}$	0

Insgesamt hat man also $\frac{1}{20}160 = 8$ als Koeffizient für b^3 und somit gibt es 8 verschiedene Möglichkeiten, ein solches Armband zusammenzustellen.

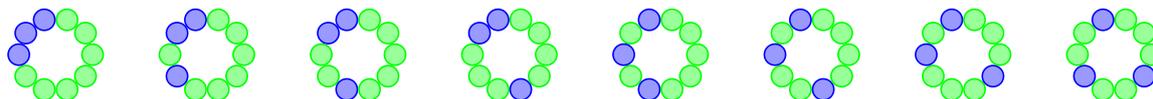


Abbildung 15: alle 8 möglichen Armbänder

3.2.6 Problem 6

Aufgabenstellung Wie viele verschiedene Färbungen mit drei Farben der Flächen eines Dodekaeders gibt es, sodass jede der 3 Farben, ein Vielfaches von 3 Mal vorkommt, und zwei Färbungen als gleich gezählt werden, falls sie sich um höchstens eine Rotation unterscheiden?

Lösung Für dieses Problem wird der Abzählsatz von Pólya verwendet, da man in diesem Fall Einschränkungen auf die Anzahl Flächen pro Farbe hat, und daher Färbungen feiner differenzieren können muss. Sei X die Menge aller Färbungen $f : M \rightarrow C$, wobei M die Menge der Flächen des Dodekaeders und $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ die Menge der Farben ist. Sei G die Gruppe der orientierungserhaltenden Symmetrien. Diese ist eine Permutationsgruppe auf M und induziert eine Gruppenwirkung auf X . G hat 60 Elemente, jedes Element abgesehen von der Identität ist eine Rotation von einer der 3 folgenden Kategorien:

Die erste Kategorie (auf der Abbildung 16 rot) besteht aus Rotationen, dessen Drehachse durch den Mittelpunkt zweier gegenüberliegenden Flächen verläuft. Zwei Flächen werden bei diesen Rotationen auf sich selbst abgebildet, die anderen sind erst nach fünffacher Applikation der Rotation an ihrem ursprünglichen Platz. Daher haben diese Rotationen Zykeltyp $x_1^2 x_5^2$. Es gibt insgesamt pro Drehachse 4 Rotationen ungleich der Identität und insgesamt gibt es 6 solche Drehachsen.

Die zweite Kategorie (auf der Abbildung 16 blau) besteht aus Rotationen, dessen Drehachse durch den Mittelpunkt zweier gegenüberliegenden Kanten verläuft. Bei diesen werden keine Flächen auf sich selbst abgebildet, aber nach zweifacher Applikation ist jede Fläche wieder an ihrer ursprünglichen Position, daher haben diese Rotationen Zykeltyp x_2^6 . Es gibt insgesamt 15 solche Drehachsen und pro Drehachse gibt es eine solche Rotation.

Die dritte Kategorie (auf der Abbildung 16 gelb) besteht aus Rotationen, dessen Drehachse durch zwei gegenüberliegende Ecken verläuft. Von dieser Kategorie gibt es insgesamt 10 Drehachsen und pro Drehachse 2 Rotationen ungleich der Identität. Es gibt keine festen Flächen, und nach dreifacher Applikation sind alle Flächen wieder an ihrer ursprünglichen Position. Gäbe es einen Zyklus der Länge 2, wäre dies unmöglich. Daher haben alle Zyklen Länge 3 und daher sind die Rotationen um eine solche Drehachse vom Zykeltyp x_3^4 .

Somit ist der Zyklenindikator gegeben durch

$$\text{CI}(G)(x_1, x_2, x_3, \dots) = \frac{1}{60}(x_1^{12} + 24x_1^2 x_5^2 + 15x_2^6 + 20x_3^4).$$

Die Berechnung des Musterinventars folgt aus dem Abzählsatz von Pólya, welcher besagt, dass

$$\text{PInv}(X) = \text{CI}(G)\left(\sum_{c \in C} w(c), \sum_{c \in C} w(c)^2, \sum_{c \in C} w(c)^3, \dots\right).$$

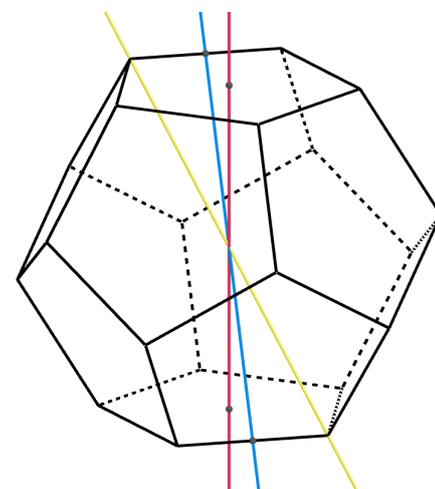


Abbildung 16: Drehachsen Dodekaeder

Sei das Gewicht für Farben $w(c_1) = 1$, $w(c_2) = x$, $w(c_3) = y$. Dann ist

$$\text{PInv}(X) = \frac{1}{60}((1+x+y)^{12} + 24(1+x+y)^2(1+x^5+y^5)^2 + 15(1+x^2+y^2)^6 + 20(1+x^3+y^3)^4).$$

Es stellt sich nun die Frage, wie man die Anzahl der gesuchten Färbungen zählen kann. Eine mögliche Methode wäre, $\text{PInv}(X)$ auszurechnen und die korrekten Kombinationen zu zählen. Dies ist aber sehr mühsam und nicht von Hand möglich. Daher verwenden wir an dieser Stelle eine Methode, welche sich „Roots of Unity Filter“ nennt. Eine genauere Angabe zu dieser Methode befindet sich im Anhang (► S. 46). Für diese Methode werden komplexe Zahlen verwendet. Diese haben die Form $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, es gilt $(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = ((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i)$ und $(a_1 + b_1i) \cdot (a_2 + b_2i) = a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)i$ (wie Multiplikation bei den reellen Zahlen, mit der Zusatzregel, dass $i^2 = -1$). Diese Zahl i ist nicht reell, daher verhalten sich die komplexen Zahlen teilweise anders als man es sich von den reellen Zahlen gewöhnt sind.

Betrachte $Q(x) = \text{PInv}(X) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ als Polynom in x und betrachte die 3 Nullstellen ω_j , $1 \leq j \leq 3$ des Polynoms $z^3 - 1$. Aus Gleichung (10) (siehe Anhang) folgt:

$$S := Q(\omega_1) + Q(\omega_2) + Q(\omega_3) = 3 \sum_{1 \leq k \leq n: 3|k} a_k$$

Bemerke, dass S nun ein Polynom in y ist. Wendet man diese Methode auch noch auf y an, so ist es möglich, nur die Möglichkeiten zu zählen, bei denen die Potenzen für x und y beide durch 3 teilbar sind: Sei $M := \{(x, y) : x, y \in \{1, \omega_1, \omega_2\}\}$ und definiere $P(x, y) = \text{PInv}(X)$. Bemerke, dass $S(y) = P(\omega_1, y) + P(\omega_2, y) + P(\omega_3, y)$. Daher ist

$$\sum_{j=1}^3 S(\omega_j) = \sum_{(x,y) \in M} P(x, y) = 9 \sum_{(j,k): 3|j,k} a_{(j,k)}.$$

Dies ist genau das Neunfache der gesuchten Zahl, da am Ende von jeder Farbe eine durch 3 teilbare Anzahl von Flächen vorhanden sein sollte. Für die letzte Farbe wird dies auch der Fall sein, da von den anderen zwei Farben jeweils eine durch 3 teilbare Anzahl in der Färbung vorhanden ist und von der letzten Farbe daher auch eine von 3 teilbare Anzahl vorhanden sein muss, da die Gesamtanzahl an Flächen durch 3 teilbar ist.

Man kann nun also die Anzahl berechnen. Als erstes bestimmt man die möglichen Werte, welche für $(1 + x^n + y^n)$ eingesetzt werden können. Ist n durch 3 teilbar, so ist $(1 + x^n + y^n) = 3$ für alle $(x, y) \in M$. Sonst ist

$$\{(1 + x^n + y^n) | (x, y) \in M\} = \{3, 1 + 2\omega_1, 1 + 2\omega_2, 2 + \omega_1, 2 + \omega_2, 1 + \omega_1 + \omega_2\}$$

Die folgenden Beobachtungen werden die Berechnung vereinfachen:

$$(1 + 2\omega_j)^2 = 1 + 4\omega_j + 4\omega_j^2 \stackrel{(8)}{=} 1 + 4\omega_1 + 4\omega_2 \stackrel{(6)}{=} -3 \text{ für } j \in \{1, 2\} \quad (3)$$

$$(2 + \omega_j)^6 = ((2 + \omega_j)^3)^2 = (8 + 12\omega_j + 6\omega_j^2 + 1)^2 \stackrel{(8)}{=} (3 + 6(1 + \omega_1 + \omega_2) + 6\omega_j)^2 \stackrel{(6)}{=} (3 + 6\omega_j)^2 = (3(1 + 2\omega_j))^2 = -3^3 \text{ für } j \in \{1, 2\} \quad (4)$$

$$(a + b\omega_1)(a + b\omega_2) = a^2 + b^2\omega_1\omega_2 + ab(\omega_1 + \omega_2) \stackrel{(6)}{=} a^2 + b^2 - ab \text{ für } a, b \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Die Berechnung wird nun termweise ohne Multiplizitäten durchgeführt: Man berechnet für den Term $(1 + x + y)^{12}$:

$$\begin{aligned} \sum_{(x,y) \in M} (1 + x + y)^{12} &= 3^{12} + 2 \cdot (2 + \omega_1)^{12} + 2 \cdot (2 + \omega_2)^{12} + (1 + 2\omega_1)^{12} + (1 + 2\omega_2)^{12} + 2 \cdot (1 + \omega_1 + \omega_2)^{12} \\ &\stackrel{(4),(6)}{=} 3^{12} + 2 \cdot (-3^3)^2 + 2 \cdot (-3^3)^2 + (-3)^6 + (-3)^6 + 0 = 3^{12} + 6 \cdot 3^6. \end{aligned}$$

Für den Term $(1 + x + y)^2(1 + x^5 + y^5)^2$ hat man:

$$\begin{aligned} \sum_{(x,y) \in M} (1 + x + y)^2(1 + x^5 + y^5)^2 &= \sum_{(x,y) \in M} (1 + x + y)^2(1 + x^2 + y^2)^2 \\ &= 3^4 + 4 \cdot (2 + \omega_1)^2(2 + \omega_2)^2 + 2 \cdot (1 + 2\omega_1)^2(1 + 2\omega_2)^2 + 2 \cdot (1 + \omega_1 + \omega_2)^4 \\ &\stackrel{(4),(5),(6)}{=} 3^4 + 4 \cdot (3^2) + 2 \cdot 3^2 + 0 = 3^4 + 6 \cdot 3^2. \end{aligned}$$

Für $(1 + x^2 + y^2)^6$ findet man:

$$\begin{aligned} \sum_{(x,y) \in M} (1 + x^2 + y^2)^6 &= 3^6 + 2 \cdot ((2 + \omega_1)^6 + (2 + \omega_2)^6 + (1 + \omega_1 + \omega_2)^6) + (1 + 2\omega_1)^6 + (1 + 2\omega_2)^6 \\ &\stackrel{(4),(6)}{=} 3^6 + 2 \cdot (-3^3 + -3^3 + 0) + (-3)^3 + (-3)^3 = 3^6 + 6 \cdot (-3^3) = 3^6 - 6 \cdot 3^3. \end{aligned}$$

Für $(1 + x^3 + y^3)^4$ gilt:

$$\sum_{(x,y) \in M} (1 + x^3 + y^3)^4 \stackrel{(9)}{=} 9 \cdot 3^4.$$

Summiert man mit den jeweiligen Multiplizitäten, erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{1}{9} \sum_{(x,y) \in M} P(x, y) &= \sum_{(j,k): 3|j,k} a_{(j,k)} \\ &= \frac{1}{9 \cdot 60} ((3^{12} + 6 \cdot 3^6) + 24 \cdot (3^4 + 6 \cdot 3^2) + 15 \cdot (3^6 - 6 \cdot 3^3) + 20 \cdot 9 \cdot 3^4) = 1041. \end{aligned}$$

Es gibt also 1041 verschiedene Färbungen, bei der jede Farbe eine durch 3 teilbare Anzahl an Flächen färbt.

3.2.7 Problem 7

Aufgabenstellung Finde eine Methode zur Berechnung der Anzahl verschiedener einfacher Graphen mit n ununterscheidbaren Ecken und k Kanten. Finde anschliessend die Anzahl einfacher Graphen mit 6 Ecken und 8 Kanten.

Lösung Teil 1: Im folgenden Abschnitt wird angenommen, dass alle betrachteten Graphen einfach sind. Man kann zunächst das Problem leicht umformulieren: Da die Ecken ununterscheidbar sind, kann man sie permutieren und der Graph bleibt gleich. Würde man die Ecken mit $1, \dots, n$ nummerieren, kann man sagen, dass zwei Graphen $(V, E_1), (V, E_2)$ als gleich gelten sollen, falls es eine Bijektion $f : V \rightarrow V$ gibt, für welche gilt: $\{v_1, v_2\} \in E_1 \iff \{f(v_1), f(v_2)\} \in E_2$. Die Anzahl als verschieden zählende Graphen bleibt gleich, denn eine Bijektion $f : V \rightarrow V$ ist eine Permutation der Ecken, und jede Permutation der Ecken ist eine Bijektion $V \rightarrow V$.

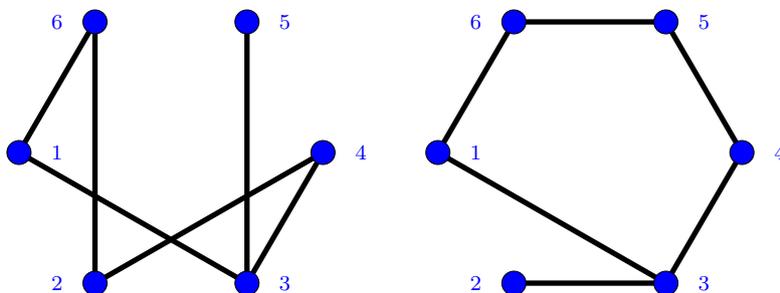


Abbildung 17: Diese Graphen zählen als gleich: vertauscht man die Position der Ecken 2 und 5, so erhält man den anderen Graphen.

Dieses Problem unterscheidet sich von den bisherigen Problemen, da man in diesem Fall keine Figur gegeben hat. Trotzdem ist es möglich, Gruppenwirkungen zu definieren. Zunächst wird eine Gruppe definiert, welche ermöglicht, gleiche Graphen miteinander zu identifizieren. Betrachte alle einfachen Graphen mit n Ecken, also alle einfache Graphen (V, E) mit $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $E \subset K := \{\{a, b\} : a, b \in V, a \neq b\}$.

Sei S_n die Menge aller Permutationen auf der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$. S_n bildet zusammen mit der Komposition eine Gruppe (► Beispiel 4 S. 8). Sei $\sigma \in S_n$. σ induziert eine Funktion auf K , nämlich:

$$\hat{\sigma} : K \rightarrow K, \{a, b\} \mapsto \{\sigma(a), \sigma(b)\}.$$

Definiere

$$\mathcal{S}_n := \{\hat{\sigma} : \sigma \in S_n\}.$$

Proposition 3.2.1. \mathcal{S}_n bildet zusammen mit der Komposition von Funktionen eine Gruppe.

Beweis. Bemerke zunächst, dass $\hat{\sigma} \forall \sigma \in S_n$ eine Bijektion ist, denn für alle $\{c, d\} \in K$ findet man genau ein Paar $a, b \in V$ mit $\sigma(a) = c, \sigma(b) = d$ und somit $\hat{\sigma}(\{a, b\}) = \{c, d\}$.

1. Abgeschlossenheit: $\hat{\sigma}_1 \circ \hat{\sigma}_2(\{a, b\}) = \{\sigma_1 \circ \sigma_2(a), \sigma_1 \circ \sigma_2(b)\} = \widehat{\sigma_1 \circ \sigma_2}$. Da $\sigma_1 \circ \sigma_2 \in S_n$, ist $\widehat{\sigma_1 \circ \sigma_2} \in \mathcal{S}_n$.
2. Da $\text{id} \in S_n$ ist $\hat{\text{id}} \in \mathcal{S}_n$ und ist die Identitätsfunktion von $K \rightarrow K$.
3. Da für $\sigma \in S_n$, $\sigma^{-1} \in S_n$ ist $\widehat{\sigma^{-1}} \in \mathcal{S}_n$ und ist das Inverse von $\hat{\sigma}$:

$$\widehat{\sigma^{-1}} \circ \hat{\sigma}(\{a, b\}) = \{\sigma^{-1} \circ \sigma(a), \sigma^{-1} \circ \sigma(b)\} = \{a, b\}.$$

□

Sei $X := \{f \mid f : K \rightarrow \{0, 1\}\}$, für jedes $f \in X$ definiere man $E_f = \{x : x \in K, f(x) = 1\}$. Es gilt: (V, E_{f_1}) und (V, E_{f_2}) werden als gleich gezählt, falls ein $\hat{\sigma} \in \mathcal{S}_n$ existiert, sodass $\hat{\sigma}(E_{f_1}) := \{\hat{\sigma}(x) : x \in E_{f_1}\} = E_{f_2}$. Dies folgt aus dem Fakt, dass (V, E) und $(\sigma(V), \hat{\sigma}(E)) = (V, \hat{\sigma}(E))$ als gleich gezählt werden. Des Weiteren existiert für (V, E_1) gleich wie (V, E_2) ein $\sigma \in S_n$, sodass $x = \{v_1, v_2\} \in E_1 \iff \hat{\sigma}(x) = \{\sigma(v_1), \sigma(v_2)\} \in E_2$. Damit ist diese Bedingung für die Gleichheit von (V, E_{f_1}) und (V, E_{f_2}) sowohl notwendig als auch genügend.

Aus $E_{f_2} = \hat{\sigma}(E_{f_1})$ folgt: $f_2(x) = 1 \iff f_1 \circ \hat{\sigma}^{-1}(x) = 1$. Dies motiviert das Definieren der Gruppenwirkung $\hat{\sigma} \triangleright f_1 := f_1 \circ \hat{\sigma}^{-1}$. Somit kann man den Abzählsatz von Pólya (Satz 2.4.7) anwenden. Es stellt sich nur noch die Frage, was $\text{ct}(\hat{\sigma})$ ist.

Sei $\text{ct}(\sigma) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$. Betrachte einen Zyklus Z der Länge m von σ . Berechne zunächst den Zykeltyp von $\hat{\sigma}$ beschränkt auf dem Teilgraph Z . Sei $E = \{\{a, b\} : a, b \in Z, a \neq b\}$. Das Ziel ist es, $\text{ct}(\hat{\sigma})$ zu finden. Betrachte dafür $u, v, u \neq v$, beide im Zyklus Z von σ mit $v = \sigma^k(u)$, wobei $1 \leq k < m$. Definiere $e = \{u, v\}$. Sei l die Länge des von $\hat{\sigma}$ induzierten Zyklus, welcher e enthält. Bemerke, dass $l \leq m$, da $\hat{\sigma}^m(e) = e$. Ist $l \neq m$, dann gilt:

$$\hat{\sigma}^l(e) = \{\sigma^l(u), \sigma^l(v)\} = \{\sigma^l(u), \sigma^l(\sigma^k(u))\} = \{\sigma^l(u), \sigma^{l+k}(u)\} \stackrel{!}{=} \{u, v\}.$$

Da $\sigma^l(u) \neq u$, muss $\sigma^l(u) = v$, und somit $l = k$. Dann muss $\sigma^{l+k}(u) = \sigma^{2k}(u) = u$ und deswegen ist $2k = m$. Somit gibt es für m ungerade nur Zyklen der Länge m , für m gerade gibt es einen Zyklus der Länge $\frac{m}{2}$, dieser enthält alle $\{u, v\}$ mit $u = \sigma^{m/2}(v)$. Daher ist $\text{ct}(\hat{\sigma})$ beschränkt auf E

$$\text{ct}(\hat{\sigma}|_E) = \begin{cases} x_m^{(m-1)/2} & \text{für } m \text{ ungerade} \\ x_m^{(m-2)/2} x_{m/2} & \text{für } m \text{ gerade} \end{cases}.$$

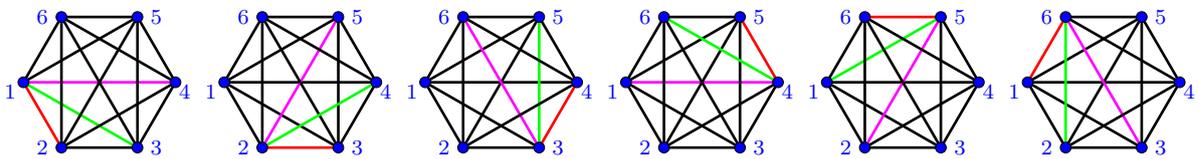


Abbildung 18: wiederholte Anwendung von $\hat{\pi}$ auf E für $\pi = (1 2 3 4 5 6)$ und $E = \{\{a, b\} \mid a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, a \neq b\}$. Man sieht: $\text{ct}(\hat{\pi}|_E) = x_3 x_6^2$.

Betrachte nun $e = \{u, v\}$ mit $u \in Z_1, v \in Z_2$, wobei Z_1 und Z_2 unterschiedliche Zyklen von σ der Länge m bzw. k sind. Sei l die Länge des Zyklus von $\hat{\sigma}$, welcher e enthält. Dann ist $\hat{\sigma}^l(e) = \{\sigma^l(u), \sigma^l(v)\} \stackrel{!}{=} \{u, v\}$. Bemerke, dass $\sigma^l(v) \neq u$, da u und v nicht im gleichen Zyklus sind. Daher ist $\sigma^l(u) = u$ und $\sigma^l(v) = v$, was impliziert, dass $m \mid l$ und $k \mid l$. Das kleinste $l > 0$ welches diese Bedingung erfüllt, ist $\text{kgV}(m, k)$.

Es soll der Zykeltyp von $\hat{\sigma}$ beschränkt auf die Menge $S = \{\{a, b\} : a \in Z_1, b \in Z_2\}$ berechnet werden. Aus der vorherigen Beobachtung folgt, dass alle Zyklen die Länge $\text{kgV}(m, k)$ haben. Insgesamt gibt es $m \cdot k$ Elemente in dieser Menge und somit $\frac{m \cdot k}{\text{kgV}(m, k)} = \text{ggT}(m, k)$ Zyklen. Es folgt, für $\text{ct}(\hat{\sigma})$ beschränkt auf die Menge S :

$$\text{ct}(\hat{\sigma}|_S) = x_{\text{kgV}(m, k)}^{\text{ggT}(m, k)}.$$

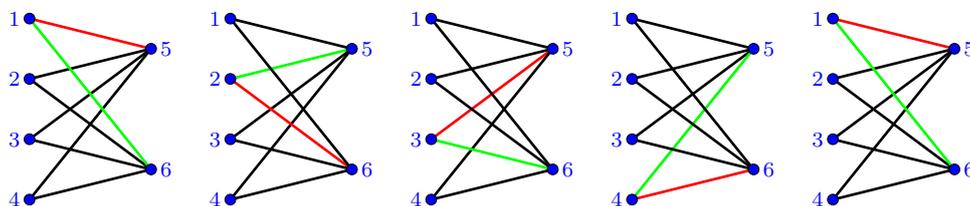


Abbildung 19: wiederholte Anwendung von $\hat{\pi}$ auf S für $\pi = (1234)(56)$ und $S = \{\{a, b\} | a \in \{1, 2, 3, 4\}, b \in \{5, 6\}\}$. Man sieht: $\text{ct}(\hat{\pi}|_S) = x_4^2$.

Mit diesen beiden Beobachtungen kann man nun den Zykeltyp von $\hat{\sigma}$ bestimmen, falls uns der Zykeltyp von σ bekannt ist, indem man zunächst $\text{ct}(\hat{\sigma}|_E)$ für alle E und dann $\text{ct}(\hat{\sigma}|_S)$ für alle S berechnet. Hat man den Zykeltyp, kann man den Abzählsatz von Pólya anwenden, um die verschiedenen Graphen zu zählen. Betrachte als Beispiel eine Permutation π mit $\text{ct}(\pi) = x_1^4 x_2^3 x_3^1 x_6^1$. Zunächst berechnet man für die einzelnen Zyklen:

Zykeltyp	x_1	x_2	x_3	x_6
induzierter Zykeltyp	-	x_1	x_3	$x_6^2 x_3$

Für jedes Paar an Zyklen findet man:

Zykeltyp	x_1^2	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_1 x_6$	x_2^2	$x_2 x_3$	$x_2 x_6$	$x_3 x_6$
induzierter Zykeltyp	x_1	x_2	x_3	x_6	x_2^2	x_6^1	$x_2 x_6$	x_6^3

Damit kann man $\text{ct}(\pi)$ berechnen:

$$\begin{aligned} \text{ct}(\pi) = x_1^4 x_2^3 x_3^1 x_6^1 &\implies \text{ct}(\hat{\pi}) = (x_1^3 x_3^1 (x_6^2 x_3)^1) ((x_1)^6 (x_2)^{12} (x_3)^4 x_6^4) ((x_2^2)^3 (x_6^1)^3 (x_6^2)^3) ((x_6^3)^1) \\ &= x_1^9 x_2^{18} x_3^6 x_6^{18} \end{aligned}$$

Teil 2: In diesem Teil geht es hauptsächlich um die Berechnungen. Sei S_6 die Gruppe aller Permutationen von 6 Elementen, sei $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $K := \{\{a, b\} : a, b \in V, a \neq b\}$. Definiere \mathcal{S}_6 gleich wie im Teil a. Sei $X := \{f \mid f : K \rightarrow \{1, x\}\}$ die Menge der Färbungen (somit sind unsere Farben $C = \{1, x\}$), definiere $E_f := \{e \in K, f(e) = x\}$. Aus dem Teil a folgt auch, dass eine Gruppenwirkung von \mathcal{S}_6 auf X definiert ist. Somit ist es möglich, den Abzählsatz von Pólya anzuwenden. Betrachte die Menge aller Permutationen von 6 Elementen S_6 . Für jeden möglichen Zykeltyp will man herausfinden, wie viele Elemente in S_6 diesen Zykeltyp haben und welchen Zykeltyp die durch Elemente dieses Zykeltyps induzierte Elemente in $\mathcal{S}_6 \subset S_{15}$ haben.

Zykeltyp σ	induzierter Zykeltyp $\hat{\sigma}$	Anzahl
x_1^6	x_1^{15}	1
$x_1^4 x_2$	$x_1^7 x_2^4$	15
$x_1^3 x_3$	$x_1^3 x_3^4$	40
$x_1^2 x_2^2$	$x_1^3 x_2^6$	45
$x_1^2 x_4$	$x_1 x_2 x_4^3$	90
$x_1 x_2 x_3$	$x_1 x_2 x_3^2 x_6$	120
$x_1 x_5$	x_5^3	144
x_2^3	$x_1^3 x_2^6$	15
$x_2 x_4$	$x_1 x_2 x_4^3$	90
x_3^2	x_3^5	40
x_6	$x_3 x_6^2$	120

Man kann nun mit dem Abzählsatz von Pólya die Anzahl einfacher Graphen mit 6 Ecken und 8 Kanten zählen, es gilt $\text{PInv}(X) = \text{CI}(\mathcal{S}_6)(\sum_{c \in C} \omega(c), \sum_{c \in C} \omega(c)^2, \dots)$. Sei $\omega(x) = x$, $\omega(1) = 1$. In der unteren Tabelle findet man die Berechnung des Koeffizienten von x^8 der einzelnen Terme:

x_1^{15}	$x_1^7 x_2^4$	$x_1^3 x_3^4$	$x_1^3 x_2^6$	$x_1 x_2 x_4^3$	$x_1 x_2 x_3^2 x_6$	x_5^3	x_3^5	$x_3 x_6^2$
$\binom{15}{8}$	$1 + 4 \cdot \binom{7}{2} + 6 \cdot \binom{7}{4} + 4 \cdot 7$	$\binom{4}{2} \cdot \binom{3}{2}$	$\binom{6}{4} + \binom{6}{3} \cdot 3$	3	2	0	0	0

Zählt man nun alles mit Multiplizitäten, erhält man den $|\mathcal{S}_6|$ mal den Koeffizienten für die 8. Potenz von $\text{PInv}(X) = \text{CI}(\mathcal{S}_6)(\sum_{c \in C} \omega(c), \sum_{c \in C} \omega(c)^2, \dots)$. Man hat:

$$\frac{1}{720} \left(\binom{15}{8} + (1 + 4 \binom{7}{2} + 6 \binom{7}{4} + 4 \cdot 7) \cdot 15 + 40 \binom{4}{2} \binom{3}{2} + 60 \left(\binom{6}{4} + 3 \binom{6}{3} \right) + 3 \cdot 180 + 2 \cdot 120 \right) = 24.$$

Es gibt daher 24 verschiedene einfache Graphen mit 6 Ecken und 8 Kanten.

4 Diskussion

Interpretation der Resultate, Vergleich mit anderen Arbeiten, Reflexion

4.1 Fragestellungen

4.1.1 Welche Arten von Problemen können mithilfe von Gruppenwirkungen gelöst werden?

In den meisten Problemen, bei denen der Abzählssatz von Frobenius oder Pólya angewendet werden kann, handelt es sich um kombinatorische Probleme, bei welchen man die Anzahl verschiedener Elemente zählt, wobei eine Bedingung existiert, die festlegt, welche Möglichkeiten als „verschieden“ oder „gleich“ definiert werden. Um Gruppenwirkungen anzuwenden, wird zunächst eine Gruppe benötigt, welche diese Bedingung beschreibt. Des Weiteren ist es notwendig, mithilfe der durch die Gruppe erzeugten Gruppenwirkung eine Äquivalenzrelation zu induzieren, sodass alle Elemente, welche als gleich gelten, in der gleichen Äquivalenzklasse sind. Ist dies möglich, kann das Problem mithilfe von Gruppenwirkungen in das Zählen bestimmter Äquivalenzklassen umgeschrieben werden.

Oft dreht es sich schlussendlich um die Frage, ob eine geeignete Gruppe vorhanden ist. Beinhaltet das Problem eine geometrische Figur, ist die gesuchte Gruppe meistens eine Untergruppe der Symmetrieabbildungen dieser Figur. Bei anderen Problemen ist die passende Gruppe nicht immer offensichtlich, dies kann man zum Beispiel am Problem mit den Graphen (Abschnitt 3.2.7) sehen, wo die Gruppe durch eine andere Gruppe induziert wird. Probleme, bei denen eine Figur vorgegeben ist und bei denen man die Anzahl nichtisomorpher Färbungen der Flächen mit bestimmten Einschränkungen bezüglich der Anzahl Flächen für jede Farbe sucht, sind gut lösbar mithilfe von Gruppenwirkungen. Teilweise kann es jedoch sein, dass man ein Problem nicht lösen kann, selbst wenn eine Umformulierung mithilfe von Gruppenwirkungen möglich ist. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn es für die Berechnung von $|\text{Fix}(g)|$ oder $|X|$ (Menge aller möglichen Färbungen) keine gute Methode gibt. Ein Beispiel für ein solches Problem möchte ich geben:

Beispiel Es ist ein 8×8 Brett gegeben und man möchte es mit 2×1 ununterscheidbaren Steinen überdecken, sodass diese sich nicht überlagern. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür, falls man Möglichkeiten, welche sich nur durch eine Rotation unterscheiden, als gleich zählt?

Auf den ersten Blick scheint dieses Problem mithilfe von Gruppenwirkungen lösbar zu sein, denn man zählt „modulo Rotationen“. Es ist möglich, den Abzählssatz von Frobenius auf die Gruppenwirkung anzuwenden, die durch die Gruppe der Rotationen des Quadrats definiert wird. Allerdings ist die Berechnung von $|X|$ schwierig. Ist uns $|X|$ nicht bekannt, so ist diese Berechnung mithilfe von Gruppenwirkungen nicht wesentlich schneller als die Berechnung ohne, da man zunächst $|X|$ finden muss. Auch ist die Berechnung von $|\text{Fix}(r)|$ für Rotationen um $\pm 90^\circ$ bzw. 180° sehr aufwändig.

Vielleicht ist es möglich, dieses Problem durch eine Umformulierung in einen speziellen Fall eines allgemeineren Problems umzuwandeln und dann den Abzählssatz von Pólya zu verwenden. Bisher ist es mir nicht gelungen, dies zu tun.

4.1.2 Bei welchen Arten von Problemen ist es sinnvoll, Gruppenwirkungen zu verwenden?

Es wird hier vorausgesetzt, dass das Lösen des Problems durch Gruppenwirkungen möglich ist, sonst ist deren Einsatz relativ sinnlos.

Bei Problemen, die sehr grosse Zahlen involvieren, ist es sinnvoll, Gruppenwirkungen zu verwenden. Bei kleinen, vorgegebenen Zahlen ist es oftmals möglich und auch effizienter, die Probleme durch Brute Force und Ausprobieren zu lösen. Ein Beispiel dafür wäre Problem 5 (► S. 33), wo es wahrscheinlich einfacher ist, durch Ausprobieren alle Möglichkeiten zu finden. Bei Problemen, welche allgemeine Variablen enthalten, ist es sinnvoll Gruppenwirkungen zu verwenden. Beispiele dafür wären Probleme 1 (► S.24) und 4 (► S. 30). Bei Problemen, welche eine sehr grosse und schwer berechenbare Gruppe haben, ist es möglich, Gruppenwirkungen zu verwenden, allerdings ist es sehr aufwändig. Persönlich kenne ich keine generelle Methode, welche effizienter als Gruppenwirkungen in solchen Fällen ist. Ein Beispiel dafür ist das Problem 7 (► S. 37) mit den Graphen, es wäre zwar möglich, die Anzahl Möglichkeiten mithilfe von Brute Force zu berechnen, allerdings braucht dieser Prozess von Hand relativ lange, ist aufwändiger und daher auch anfälliger auf Fehler.

4.2 Reflexion

Mögliche Fehlerquellen

In meiner Arbeit geht es um das Lösen von kombinatorischen Problemen, am Ende ist meist nach einer Formel oder einer Zahl gefragt. Da die Abzählsätze und Lemma selbst nicht falsch sind, ist es sehr unwahrscheinlich, dass ein Fehler aufgrund einer falschen Methodik auftreten. Die Ursachen für fehlerhafte Resultate können deswegen nur eigene Fehler bei der Berechnung sein, das heisst konkret: falsche Anwendungen der Abzählsätze oder Ungenauigkeiten bei den Berechnungen. Um diese Fehler aufzudecken, wurden kleine Fälle getestet und es wurde bei der Anwendung des Abzählsatzes von Frobenius jeweils überprüft, ob das Resultat eine ganze Zahl ergibt. Diese Methoden zur Fehlererkennung decken viele der Fehler auf, jedoch kann es immer noch sein, dass wenige Fehler im Lösungsweg nicht aufgedeckt wurden. Teilweise ist es bei manchen Aufgaben nicht möglich, kleine Fälle zu betrachten, welches die Fehlerrückmeldung erschwert. Ein Beispiel für ein solches Problem ist Problem 6 (► S. 34), bei welchem kurz nach der Zwischenabgabe auch ein Fehler in der Berechnung gefunden wurde. Es ist also durchaus möglich, wenn auch sehr unwahrscheinlich, dass die erhaltenen Resultate fehlerhaft sind.

Arbeitsprozess

Die Ziele in der Vereinbarung dieser Maturaarbeit wurden erreicht. Die Visualisierung spezieller Fälle mithilfe von Geogebra wurde auch erreicht, zum Beispiel wurden Abbildungen 9 und 15 beide mithilfe von Geogebra erstellt. Bei dieser Arbeit hatte ich nur selten das Gefühl, unter Zeitdruck zu stehen. Dies lag einerseits an der gut befolgten Zeiteinteilung und andererseits daran, dass ich bereits zu Beginn der Arbeit das Buch mit den benötigten Methoden hatte, wodurch praktisch keinen Zeitaufwand für die Recherche entstand. Beim Schreiben dieser Arbeit sind nur wenige Schwierigkeiten aufgetaucht, wobei die meisten davon aufgrund der Darstellung und der Formatierung entstanden. Beispielsweise hatte ich Schwierigkeiten beim

korrekten Einfügen von Abbildungen und beim Erstellen des Quellenverzeichnis. Der Grund für die Entstehung dieser Schwierigkeiten war meistens mein ungenügendes Vorwissen bezüglich der Verwendung von \LaTeX , da ich bisher nicht sehr extensiv damit gearbeitet habe. Teilweise gab es auch Hindernisse beim Lösen der Probleme im Abschnitt der Resultate, jedoch wurden diese letztendlich alle überwunden.

Verbesserungsmöglichkeiten

Die Abstraktheit dieser Arbeit macht sie schwer verständlich für Personen, welche nicht daran gewöhnt sind. Da diese als Maturaarbeit dient und das Hauptpublikum daher Schülerinnen und Schüler im Gymnasium sind, welche nur wenig Erfahrung im Lesen solcher mathematisch abstrakten Texte haben, ist dies nicht ideal. Es entsteht so ein Konflikt, denn die Abstraktion ist eine der schönen und essenziellen Seiten der Mathematik, und ich möchte nur ungern auf diese verzichten. Eine Möglichkeit, diesen zu mildern, wäre die Implementation vieler Beispiele, welche zu einem besseren Verständnis beitragen.

Es ist das erste Mal, dass ich eine Arbeit in dieser Grösse schreibe. Auch wenn ich bei dieser Arbeit nur unter wenig Zeitdruck stand, gäbe es immer noch Verbesserungsmöglichkeiten in der Planung. Ich habe teilweise unterschätzt, wie viel Zeit erforderlich ist, um bestimmte Teile der Arbeit abzuschliessen. Auch habe ich teilweise Zeit investiert, um bestimmte Methoden aufzuschreiben, welche schlussendlich irrelevant für meine Arbeit waren.

Schlussbemerkungen

Während dem Schreiben dieser Arbeit habe ich viele neue Erfahrungen gesammelt. Ich habe ein tieferes Verständnis für Gruppenwirkungen gewonnen und auch bei der Verwendung von \LaTeX und bei der Planung und Zeiteinteilung kann ich aus dieser Arbeit viel mitnehmen. Insgesamt hat mir das Schreiben dieser Arbeit Spass gemacht, und ich bin zufrieden mit dem Endresultat.

5 Quellenverzeichnis

Literaturverzeichnis

- [1] Martin Aigner und Günter M. Ziegler. „The fundamental theorem of algebra“. In: *Proofs from THE BOOK*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2018, S. 151–153. ISBN: 978-3-662-57265-8. DOI: 10.1007/978-3-662-57265-8_21.
- [2] R. B. J. T. Allenby und Alan Slomson. *How to count. An introduction to combinatorics, Second Edition*. Boca Raton, FL: CRC Press, 2011. ISBN: 978-1-4200-8260-9.
- [3] Norbert Hungerbühler. *Kombinatorik 1*. ETH Skript. 2021.

Webseiten

- [4] *Number of graphs on n unlabeled nodes*. <https://oeis.org/A000088>. o.J.

Abbildungsverzeichnis

1	dreieckiges Brett: erstellt von Felix Xu	7
2	Beispiel Gruppenwirkungen: erstellt von Felix Xu	11
3	Fixpunktgeneration bei dreieckigem Brett: erstellt von Felix Xu	15
4	Beispiel Einschränkungen beschreiben: erstellt von Felix Xu	17
5	mögliche Muster im Beispiel Einschränkungen beschreiben: erstellt von Felix Xu	18
6	Drehachsen eines Ikosaeders: erstellt von Felix Xu	22
7	Fixpunktgeneration bei Quadrat: erstellt von Felix Xu	24
8	Spiegelachsen eines Quadrats: erstellt von Felix Xu	25
9	Problem 1: verschiedene Färbungen im Fall $n = 2, k = 3$: erstellt von Felix Xu . .	26
10	Drehachsen eines Würfels: erstellt von Felix Xu	27
11	Färbungen eines Würfels mit 2 Farben: erstellt von Felix Xu	28
12	Beispiel Rotation Problem 4: erstellt von Felix Xu	30
13	Spiegelachsen bei n -Ecken: erstellt von Felix Xu	31
14	Färbungen der Ecken eines Sechsecks mit zwei Farben: erstellt von Felix Xu . . .	32
15	Armbänder: erstellt von Felix Xu	33
16	Drehachsen eines Dodekaeders: erstellt von Felix Xu	34
17	Graphen, die als gleich zählen: erstellt von Felix Xu	37
18	Beispiel $ct(\hat{p}_i)$ mit einem Zyklus für Problem 7: erstellt von Felix Xu	38
19	Beispiel $ct(\hat{p}_i)$ mit zwei Zyklen für Problem 7: erstellt von Felix Xu	39
20	Eulersche Phi-Funktion: von https://de.wikipedia.org/wiki/Eulersche_Phi-Funktion	45
21	einfacher Graph: erstellt von Felix Xu	47

6 Anhang

6.1 Eulersche Phi-Funktion

Die eulersche Phi-Funktion ist folgendermassen definiert:

$$\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto \varphi(n) = |\{m : 1 \leq m \leq n, \text{ggT}(m, n) = 1\}|$$

Es soll eine Formel zur Berechnung von $\varphi(n)$ gefunden werden. Sei $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_j^{\alpha_j}$ die Primfaktorzerlegung von n . Definiere für jeden Teiler d von n die Menge

$$M_d := \{m : 1 \leq m \leq n, d|m\}.$$

Bemerke, dass die Anzahl Elemente in dieser Menge genau $\frac{n}{d}$ ist. Sind d_1, d_2 teilerfremde Teiler von n , so ist die Menge

$$M_{d_1 d_2} = M_{d_1} \cap M_{d_2}.$$

Die nicht teilerfremden Zahlen zu n haben sicher einen Primfaktor mit n gemeinsam und sind daher alle in der Menge

$$M := \bigcup_{p:p|n} M_p.$$

Aus dem Prinzip der Inklusion-Exklusion [2, Theorem 4.2] ist die Kardinalität dieser Menge

$$\begin{aligned} |M| &= \sum_{k=1}^j |M_{p_k}| - \sum_{1 \leq k < l \leq j} |M_{p_k} \cap M_{p_l}| + \sum_{1 \leq k < l < m \leq j} |M_{p_k} \cap M_{p_l} \cap M_{p_m}| - \dots \\ &= \sum_{k=1}^j |M_{p_k}| - \sum_{1 \leq k < l \leq j} |M_{p_k p_l}| + \sum_{1 \leq k < l < m \leq j} |M_{p_k p_l p_m}| - \dots \\ &= \sum_{k=1}^j \frac{n}{p_k} - \sum_{1 \leq k < l \leq j} \frac{n}{p_k p_l} + \sum_{1 \leq k < l < m \leq j} \frac{n}{p_k p_l p_m} - \dots \end{aligned}$$

Die Menge M ist die Menge aller nicht teilerfremden Zahlen zu n , daher ist

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= n - |M| \\ &= n - \left(\sum_{k=1}^j \frac{n}{p_k} - \sum_{1 \leq k < l \leq j} \frac{n}{p_k p_l} + \dots \right) \\ &= n \prod_{k=1}^j \left(1 - \frac{1}{p_k} \right) \end{aligned}$$

Somit hat man eine allgemeine Formel für $\varphi(n)$.

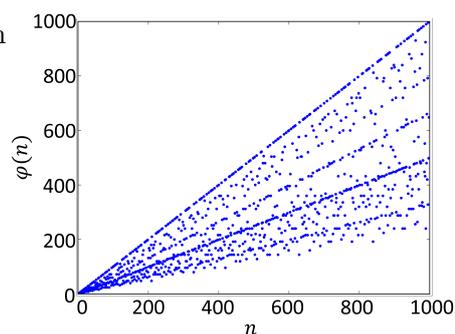


Abbildung 20: die ersten 1000 Werte der Eulerschen Phi-Funktion

6.2 Einheitswurzeln

Dieser Teil ist für das Problem 6 (► S. 34) relevant. Sei $p > 2$ eine Primzahl, betrachte das Polynom $z^p - 1$ und dessen Nullstellen (diese können auch komplex sein) $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p$. Die Existenz von p Nullstellen folgt aus dem Fundamentalsatz der Algebra (einen Beweis zu diesem Satz findet man in [1]). Es gilt:

$$\begin{aligned} z^p - 1 &= (z - \omega_1) \cdot (z - \omega_2) \cdot \dots \cdot (z - \omega_p) \\ &= z^p - (\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_p)z^{p-1} + \dots - \omega_1\omega_2 \dots \omega_p \end{aligned}$$

Durch einen Koeffizientenvergleich kann man folgendes aus der Gleichung herauslesen:

$$\sum_{j=1}^p \omega_j = 0 \quad (6) \quad \text{und} \quad \prod_{j=1}^p \omega_j = 1. \quad (7)$$

Da $\omega_j, \omega_k, j, k = 1, 2, \dots, p$ Nullstellen sind, gilt für diese ausserdem:

$$(\omega_j \omega_k)^p = \omega_j^p \omega_k^p = 1,$$

daher ist $\Omega_p := \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p\}$ geschlossen unter der Multiplikation. Ausserdem ist für alle $j = 1, \dots, p : \omega_j^{p-1} \in \Omega_p$, somit ist für jedes ω_j das inverse Element in Ω_p . Des Weiteren ist die Multiplikation assoziativ, Ω_p erfüllt also alle Eigenschaften einer Gruppe. Bemerke, dass $\omega_{j_1} \neq \omega_{j_2}$ für $j_1 \neq j_2$, denn $z^p - 1 = (\omega_{j_1}^{-1} z)^p - 1 = w^p - 1$, wobei $w = \omega_{j_1}^{-1} z$. 1 ist eine einfache Nullstelle des Polynoms $w^p - 1$, denn $w^p - 1 = (w - 1)(w^{p-1} + w^{p-2} + \dots + w + 1)$ und 1 ist keine Nullstelle von $w^{p-1} + \dots + 1$. Somit ist $w = 1$, also $z = \omega_{j_1}$ auch eine einfache Nullstelle. Bemerke, dass $\{\omega_j^k, 0 \leq k \leq p-1\}$ eine Untergruppe von Ω_p ist (für $k \geq p : \omega_j^k = \omega_j^{k-p}$). Aus dem Satz von Lagrange (2.1.5) folgt, dass die Kardinalität dieser Untergruppe die Kardinalität von Ω_p teilt. Da p prim ist, ist die Anzahl Elemente in dieser Untergruppe entweder 1 oder p . Für alle $\omega_j \neq 1 : 1, \omega_j \in \{\omega_j^k, 0 \leq k \leq p\}$, daher ist diese Menge gleich Ω_p . Insbesondere ist hier $\omega_j^k \neq 1 \forall k \neq p$. Somit ist

$$\{\omega_j^k : 1 \leq k \leq p\} = \Omega_p \text{ für } \omega_j \neq \omega_p = 1 \text{ und } \omega_j^p = 1 \quad (8)$$

Es gilt $\{\omega_k^j : 1 \leq k \leq p\} = \{(\omega_1^k)^j : 1 \leq k \leq p\} = \{(\omega_1^j)^k : 1 \leq k \leq p\}$, und man erhält deswegen:

$$\begin{aligned} \{\omega_k^j : 1 \leq k \leq p\} &= \Omega_p \text{ für } p \nmid j \\ \{\omega_k^j : 1 \leq k \leq p\} &= \{1\} \text{ für } p \mid j \end{aligned}$$

Daraus folgt zusammen mit (6):

$$\sum_{j=0}^p \omega_j^k = \begin{cases} 0 & \text{für } p \nmid k \\ p & \text{für } p \mid k \end{cases} \quad (9)$$

Betrachte nun ein Polynom $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$. Es gilt:

$$\sum_{j=0}^p P(\omega_j) = \sum_{j=0}^p \sum_{k=0}^n a_k \omega_j^k = \sum_{k=0}^n a_k \sum_{j=0}^p \omega_j^k \stackrel{(9)}{=} \sum_{0 \leq k \leq n, p|k} a_k \cdot p \quad (10)$$

Man kann damit also die Summe aller Koeffizienten der Vielfachen von p -ten Potenzen berechnen.

6.3 Was ist ein einfacher Graph?

Definition 6.3.1. [2, Definition 9.1]

Ein einfacher Graph G ist ein geordnetes Paar (V, E) , wobei V eine Menge von Ecken und E eine Menge von Kanten ist. Die Menge V hat die Form

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}.$$

Die Elemente in V werden Ecken genannt. Eine Kante ist definiert als $\{v_i, v_j\}$ wobei $v_i, v_j \in V$. Die Menge E ist also

$$E = \{\{v_i, v_j\} : \{v_i, v_j\} \text{ ist eine Kante}\}.$$

Ein Graph kann visualisiert werden, indem man die Ecken als Punkte und die Kanten als Verbindungslinien zwischen den Punkten zeichnet (siehe Abbildung 21).

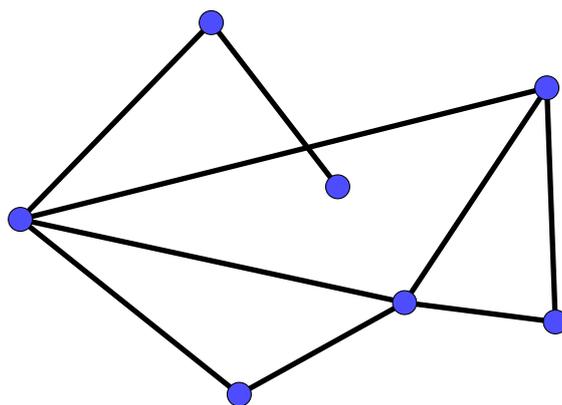


Abbildung 21: Beispiel eines einfachen Graphen mit 7 Ecken (blau) und 9 Kanten (schwarz).