

Kurven in der Ebene und eingeschriebene Rechtecke

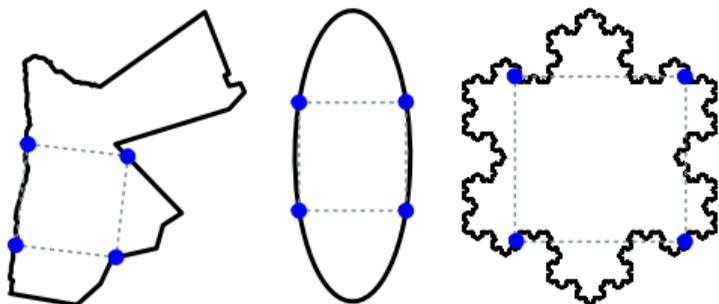
Peter Feller

ETH Zürich

Kantonsschule Sursee, 13.09.2023

- I. Das Toeplitz-Problem und ein erstes Argument.
- II. “Wozu brauchen wir Mathematik?” und “Wozu brauchen wir Topologie?”.
- III. Möbiusbänder, einbeschriebene Rechtecke und ein zweites Argument.
- IV. Moderne Entwicklungen um das Toeplitz-Problem und Knotentheorie.

I. Eine geometrische Frage: Das Toeplitz-Problem (Toeplitz 1911, [To11])



Frage (Toeplitz 1911)

Enthält jede einfach geschlossene Kurve K in der Ebene \mathbb{R}^2 vier Punkte, die die Ecken eines Quadrats bilden?

Antwort: Unbekannt!

Einfachere geometrische Fragen:

Enthält jede einfach geschlossene Kurve die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks? **Ja.**

Enthält jede einfach geschlossene Kurve die Ecken eines Rechtecks? **Ja.**

Mathematischer Inhalt dieses Vortrages:

Topologische Argumente \Rightarrow **Ja** zu den einfacheren Fragen. (Siehe auch [Sa16].)

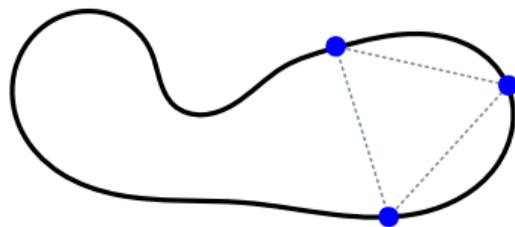
[To11] O. Toeplitz, *Ueber einige Aufgaben der Analysis situs*, Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft, Solothurn, 1911.

[Sa16] G. Sanderson, *Who cares about topology? (Inscribed rectangle problem)*, <https://www.youtube.com/@3blue1brown>, 2016.

I. Erstes Argument: Gleichseitige Dreiecke

Antwort (auf die erste einfachere Frage)

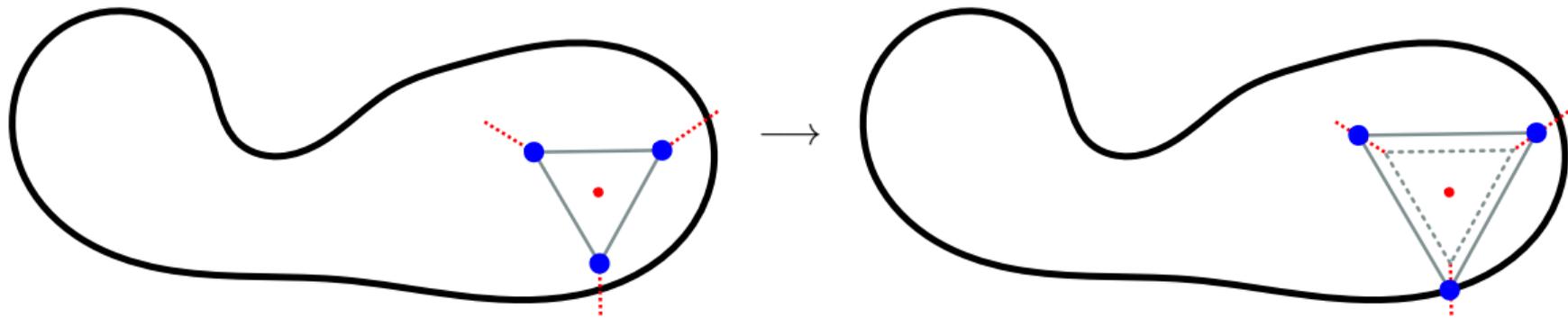
Jede einfach geschlossene Kurve $K \subset \mathbb{R}^2$ enthält drei Punkte, die die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks bilden.



Begründung:

Schritt 1:

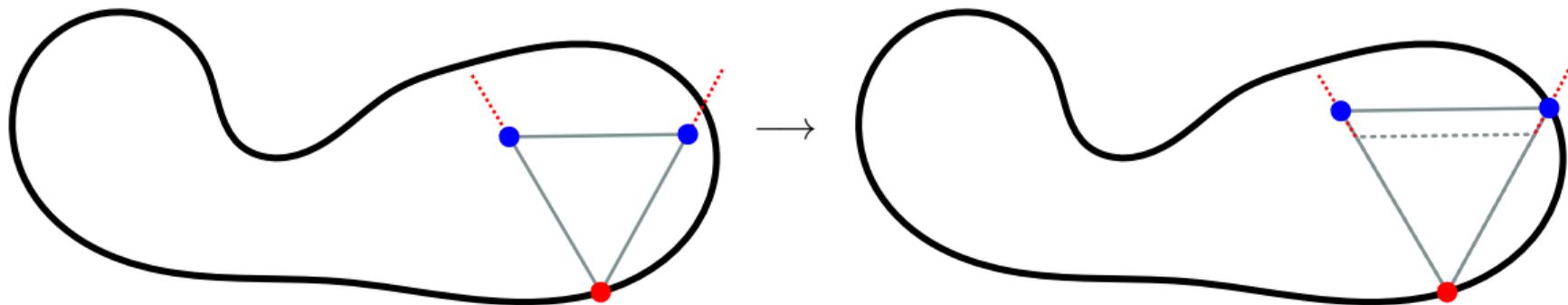
Wähle ein Dreieck im Innern von K und strecke es am **Mittelpunkt**.



I. Erstes Argument: Gleichseitige Dreiecke

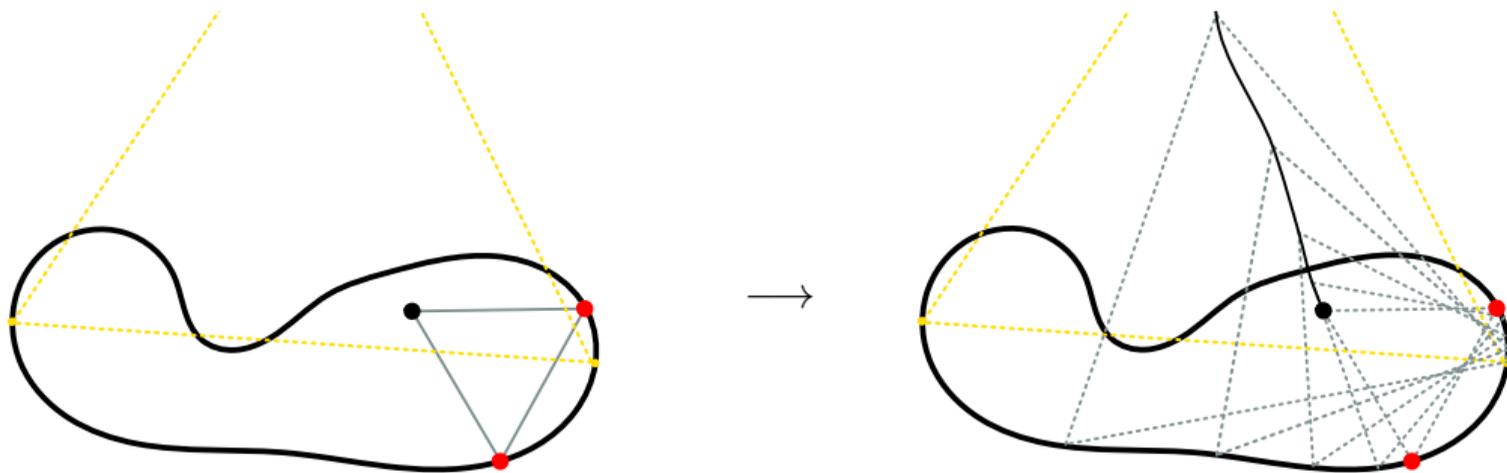
Schritt 2:

Strecke das neue Dreieck an der **Ecke** auf K .



I. Erstes Argument: Gleichseitige Dreiecke

Schritt 3: Bewege die zwei **Ecken** des neuen Dreiecks auf die Endpunkte eines **Durchmessers**.



Schlussbeobachtungen:

- Wir haben eine Familie von Dreiecken mit zwei **Ecken** auf K konstruiert.
- Die dritte Ecke bewegt sich *stetig* von Innen nach Aussen.

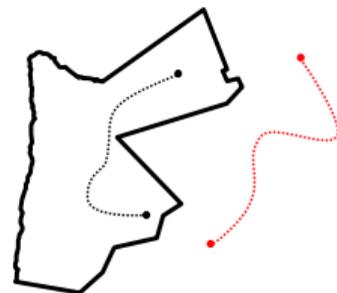
\Rightarrow Mindestens ein Dreieck in dieser Familie hat 3 Ecken, die auf K liegen. Q.E.D.

I. Erstes Argument: Fazit

Fazit: Ein topologischer Fakt (der Jordansche Kurvensatz) hat eine geometrische Konsequenz (Existenz eines einbeschriebenen Dreiecks).

Jordanscher Kurvensatz (1887)

*Jede einfach geschlossene Kurve $K \subset \mathbb{R}^2$ teilt \mathbb{R}^2 in zwei Teile.
Genauer: $\mathbb{R}^2 \setminus K$ hat zwei Zusammenhangskomponenten.*



Topologie:

Deformierbare Objekte und stetige Abbildungen.



Geometrie:

Rigide Objekte und
längenerhaltenden Abbildungen.

II. Antwortstrategien zur Frage “Wozu brauchen wir Mathematik?”

“*Warum Mathematik?*”, fragen Schüler:innen, Student:innen, Bekannte, Mitreisende im Zug, ...

Antwortstrategie 1: Mathematik ist die Sprache in der wir quantitative über die Welt reden können. Sie ist die Basis jeder quantitativen Aussage und Erklärung unserer Welt!

Z.B.: Pandemiemodelle, Abstimmungsvorhersagen, Finanzmodelle, Internet, Smartphone, ...

Konkretes Narrativ: Primzahlfaktorisation geht ins Internetbanking ein.

Einwand: Zusammenhang zwischen gelernter (Schul-)Mathematik und den Anwendungen ist schwer herzustellen.

Antwortstrategie 2: Mathematik ist elegant und mysteriös. Sie erlaubt schöne Lösungen zu (schwierigen) Problemen und bietet eine Fülle von offenen Fragen.

Konkretes Beispiel: Euklids Beweis für die Existenz unendlich vieler Primzahlen $2, 3, 5, 7, \dots$
Verwandte offene Frage: Gibt es unendlich viele Primzahlzwillinge $\{3, 5\}, \{5, 7\}, \{11, 13\}, \dots$?

Einwand: Nimmt ein Grundinteresse an mathematischen Argumenten und offenen Fragen an.

II. "Wozu brauchen wir Topologie?"

Google wurde soeben 25! (Gründung am 4.9.1998 in Kalifornien.)

Narrativ:

Topologie (Brouwers Fixpunktsatz) geht in Googles Suchalgorithmus ein.

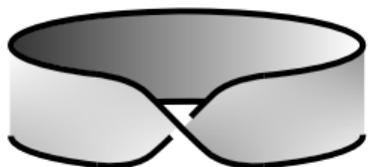
Brouwers Fixpunktsatz (1911)

*Jede stetige Selbstabbildung des Würfels $f: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^n$ hat einen Fixpunkt.
D.h. es existiert ein $v \in [0, 1]^n$ mit $f(v) = v$.*

Narrativ (ausführlicher):

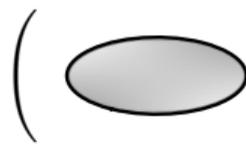
Brouwers Fixpunktsatz \Rightarrow Satz von Perron-Frobenius (Eigenvektoren von positiven Matrizen)
 \Rightarrow Netzwerkanalyse (ab 1970, Buzzword: node ranking)
 \Rightarrow Googles Suchalgorithmus (ab 1998, Buzzword: page ranking)

III. Das Möbiusband und die Kleinsche Flasche



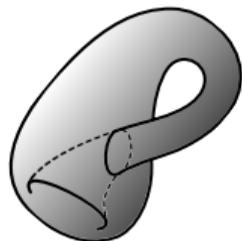
Möbiusband:

- mit Rand
- nicht orientierbar



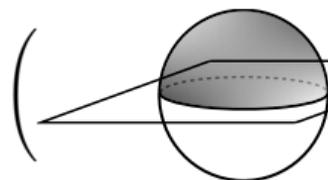
Scheibe:

- mit Rand
- orientierbar



Kleinsche Flasche:

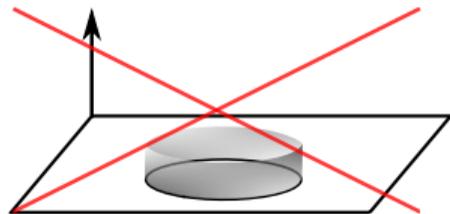
- ohne Rand
- nicht orientierbar
- keine Einbettung in \mathbb{R}^3
- entsteht aus zwei Möbiusbändern durch Verkleben



Sphäre:

- kein Rand
- orientierbar

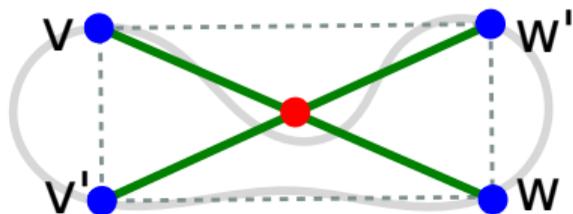
Fakt: Das Möbiusband lässt sich nicht so im oberen Halbraum $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ einbetten, dass der Rand in der xy -Ebene $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ liegt. (Begründung: Sonst würde sich die Kleinsche Flasche im \mathbb{R}^3 einbetten.)



III. Zweites Argument: Rechtecke und das Möbiusband

Antwort (auf zweite einfachere Frage, Vaughan 1977)

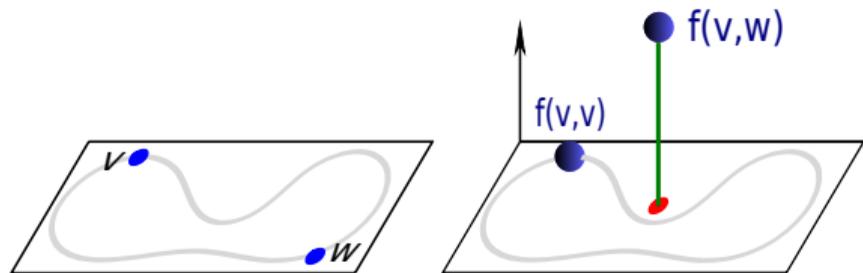
Jede einfach geschlossene Kurve K in \mathbb{R}^2 enthält vier Punkte, die die Ecken eines Rechtecks bilden.



Ecken eines Rechtecks: zwei (ungeordnete) Paare von Punkten mit dem gleichen **Mittelpunkt** und der gleichen **Distanz**.

Mittelpunkt-Distanz-Abbildung:

$$f: \overbrace{\{\{v, w\} \mid v, w \in K\}}^{\text{Möbiusband}} \rightarrow \overbrace{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{\geq 0}}^{\text{oberer Halbraum}} \subset \mathbb{R}^3$$
$$\{v, w\} \mapsto \left(\frac{v+w}{2}, |v-w| \right)$$



Behauptung: f ist nicht injektiv, d.h. es gibt $\{v, w\} \neq \{v', w'\}$ mit $f(\{v, w\}) = f(\{v', w'\})$.
(Begründung: f würde ein Möbiusband im oberen Halbraum parametrisieren.)

\Rightarrow K enthält vier Punkte v, w, v', w' , die die Ecken eines Rechtecks bilden. Q.E.D.

III. Zweites Argument: Fazit

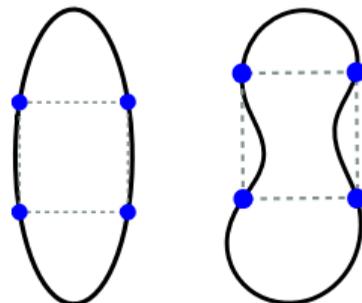
Fazit: Ein topologischer Fakt (Möbiusband lässt sich nicht im oberen Halbraum einbetten) hat eine geometrische Konsequenz (Existenz eines eingeschriebenen Rechtecks).

Relevanz für aktuelle Forschung: Dieses Argument von Vaughan bildet die Basis für eine Idee, die in den letzten Jahren zu neuen Forschungsergebnissen im Zusammenhang mit dem Toeplitz-Problem geführt hat!

IV. Moderne Entwicklungen um das Toeplitz-Problem

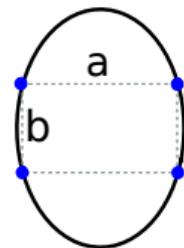
Schnirelman 1929:

Positive Antwort für glatte Kurven! D.h. jede glatte einfach geschlossene Kurve hat ein eingeschriebenes Quadrat.



Hugelmeyer 2018: Neuer Zugang via *Knotentheorie* liefert:

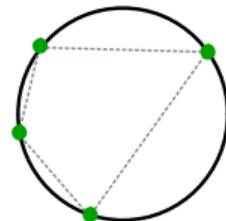
- Neuen Beweis für obiges Resultat über glatte Kurven.
- Jede glatte einfach geschlossene Kurve hat ein eingeschriebenes Rechteck mit Seitenverhältnis $\frac{a}{b} = \sqrt{3}$.



Greene-Lobb 2020:

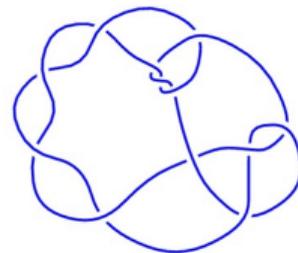
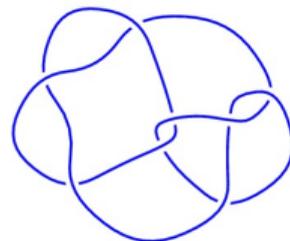
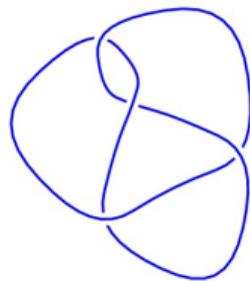
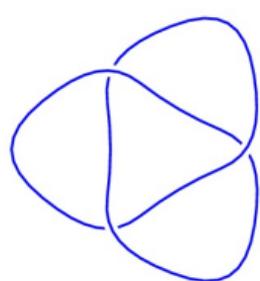
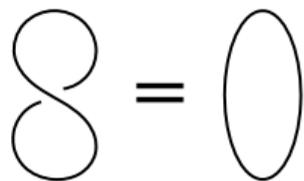
Jede glatte einfach geschlossene Kurve hat für jedes Seitenverhältnis ein eingeschriebenes Rechteck mit diesem Seitenverhältnis.

Es gilt sogar Folgendes: Jedes **kreisförmige 4-Eck** kann in jede glatte einfach geschlossene Kurve eingeschrieben werden.



IV. Knoten

Beispiele ([KI23]):

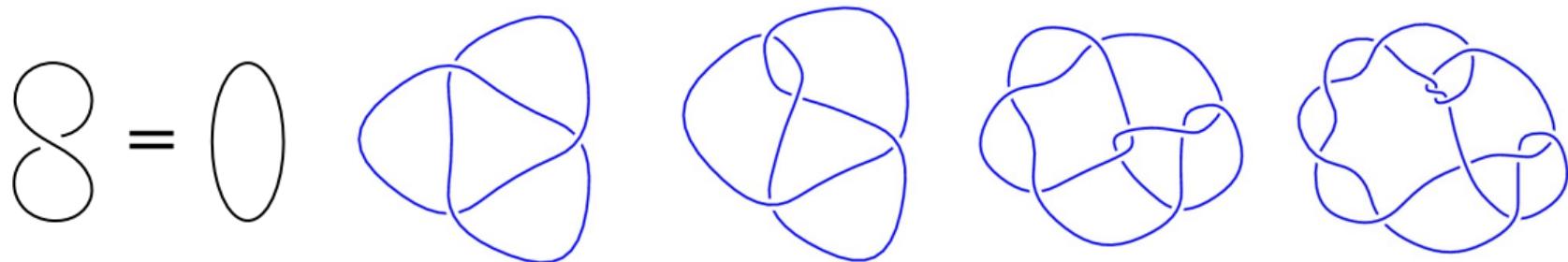


Knotentheorie

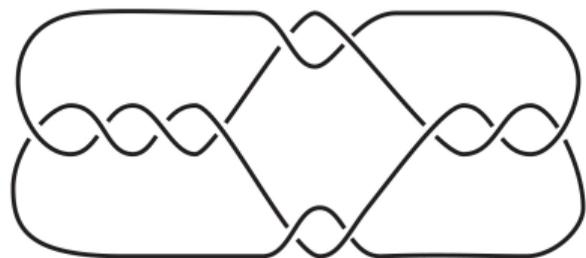
Studium von Knoten mit Hilfsmittel aus der Topologie, der Geometrie, der Algebra & der Analysis.

[KI23] <http://www.indiana.edu/~knotinfo>, 2023.

IV. Knoten



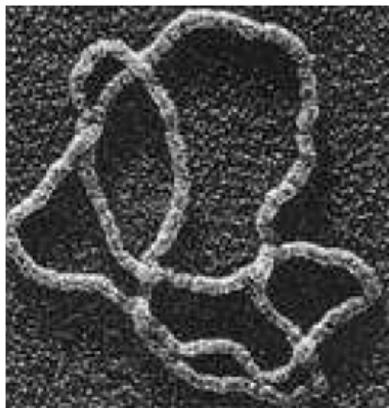
Im Allgemeinen ist es schwierig zu entscheiden, wann zwei Knoten 'gleich' sind.



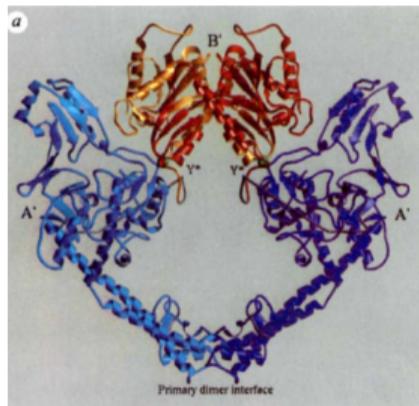
Bis zu 4 Kreuzungen:	2
Bis zu 8 Kreuzungen:	35
Bis zu 12 Kreuzungen:	2 977
Bis zu 16 Kreuzungen:	1 701 936
Bis zu 19 Kreuzungen: ([B20]):	352 152 252

[B20] B. Burton, *The Next 350 Million Knots*, 2020, 10.4230/LIPIcs.SoCG.2020.25

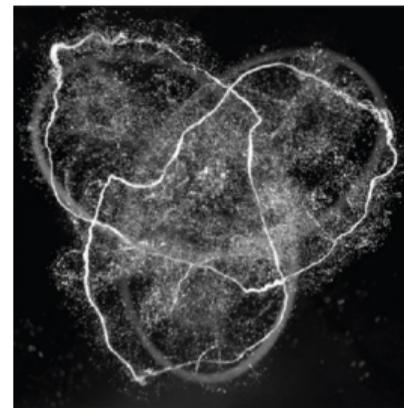
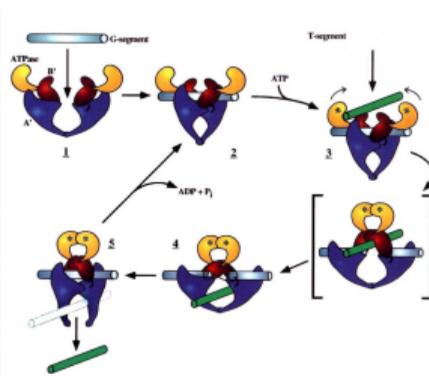
IV. Knoten: In Natur und Geschichte



[WDC85]



[BGHW96]



[KI13]

Kurze Geschichte der Knotentheorie:

19. Jahrhundert: Vortextheorie von Lord Kelvin

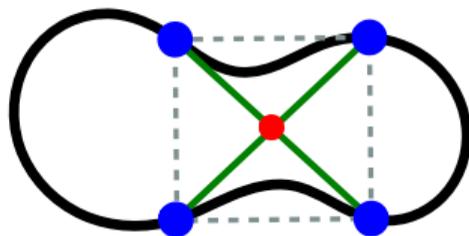
20. Jahrhundert: Teil der niedrigdimensionalen Topologie

Heute: Basis der niedrigdimensionalen Topologie. Viele Zusammenhänge zu 4-dim. Problemen.

IV. Knoten, Möbiusbänder und einbeschriebene Quadrate.

Antwort (Existenz einbeschriebener Quadrate)

Jede glatte einfach geschlossene Kurve K in \mathbb{R}^2 hat ein einbeschriebenes Quadrat.



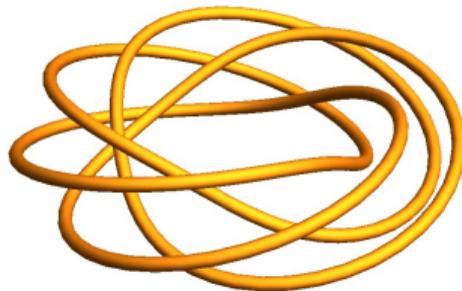
Modifikation der Mittelpunkt-Distanz Abbildung:

$$\underbrace{\{\{v, w\} \mid v, w \in K\}}_{\text{Möbiusband}} \rightarrow \underbrace{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_{\geq 0}}_{\text{4D oberer Halbraum}} \subset \mathbb{R}^4.$$

Beobachtung: Rand vom Möbiusband landet auf einem Knoten in $\mathbb{R}^3 \times \{0\} \cong \mathbb{R}^3$.

Für diese Varianten der Abbildung:

- Nicht-Injektivität liefert ein einbeschriebenes Quadrate.
- Der Rand ist folgender Knoten.



IV. Knoten als Ränder von Flächen.

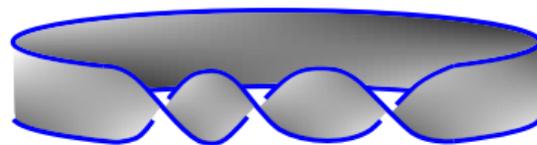
Knottheoriefrage: Welche Knoten sind Ränder von Möbiusbändern oder von Scheiben im 4-dim. oberen Halbraum?

Disk:

3D:

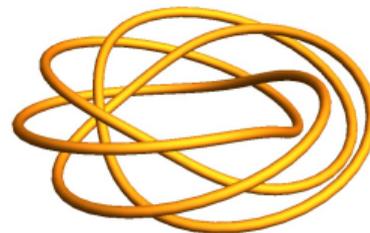


Möbius band:



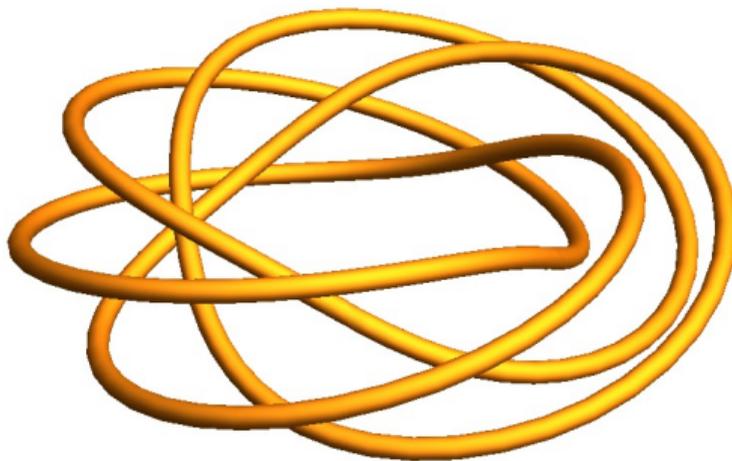
Fakt:

Folgender Knoten ist nicht der Rand eines Möbiusbands im 4-dim. oberen Halbraum:



IV. Knoten als Ränder von Flächen: Fazit

Fazit: Ein topologischer Fakt (ein gewisser Knoten ist nicht Rand eines Möbiusbands) hat eine geometrische Konsequenz (Existenz eines eingeschriebenen Quadrats).



Vielen Dank für die Aufmerksamkeit.

Mit *TEX MAKER* erstellt. Die Figuren wurden mit *Inkscape 1.0* und *Wolfram Mathematica 12* erstellt.

Naturwissenschaftliche Bilder:

- [WDC85] SA Wasserman, JM Dungan, NR Cozzarelli, *Discovery of a predicted DNA knot substantiates a model for site-specific recombination*, Science, 1985.
- [BGHW96] J. M. Berger et al., *Structure and mechanism of DNA topoisomerase II*, Nature, 1996.
- [KI13] D. Kleckner and W. Irvine, *Creation and dynamics of knotted vortices*, Nature Physics, 2013.
- [RBDSB17] D. Racko, F. Benedetti, J. Dorier, A. Stasiak, Y. Burnier, *Molecular Dynamics Simulation of Supercoiled, Knotted, and Catenated DNA Molecules, Including Modeling of Action of DNA Gyrase*, Methods in molecular biology. 2017.