

# Hyperwürfel im Gymnasialunterricht

TMU Kanti Sursee

Dima Nikolenkov  
ETH Zürich

13 September 2023

## Überblick

- Konstruktion – Geometrie

Konstruktion

## Überblick

- Konstruktion – Geometrie
- Binomische Formel – Algebra

Konstruktion

Binomische Formel

## Überblick

- Konstruktion – Geometrie
- Binomische Formel – Algebra
- Beschreibung im KS – Lineare Funktionen

Konstruktion

Binomische Formel

Hyperwürfel im KS

## Überblick

- Konstruktion – Geometrie
- Binomische Formel – Algebra
- Beschreibung im KS – Lineare Funktionen
- **Pascal'sche Matrix und Hyperwürfel – Matrizen Multiplikation**  
**Wie sieht man Matrizen Multiplikation?**

Konstruktion

Binomische Formel

Hyperwürfel im KS

Pascal'sche Dreieck

## Überblick

- Konstruktion – Geometrie
- Binomische Formel – Algebra
- Beschreibung im KS – Lineare Funktionen
- Pascal'sche Matrix und Hyperwürfel – Matrizen Multiplikation  
Wie sieht man Matrizen Multiplikation?
- Anzahl Untermengen – Mengenlehre

Konstruktion

Binomische Formel

Hyperwürfel im KS

Pascal'sche Dreieck

Untermengen

## Überblick

- Konstruktion – Geometrie
- Binomische Formel – Algebra
- Beschreibung im KS – Lineare Funktionen
- Pascal'sche Matrix und Hyperwürfel – Matrizen Multiplikation  
Wie sieht man Matrizen Multiplikation?
- Anzahl Untermengen – Mengenlehre
- Anzahl  $k$ –Würfel in einem  $n$ –Würfel – Kombinatorik

Konstruktion

Binomische Formel

Hyperwürfel im KS

Pascal'sche Dreieck

Untermengen

Kombinatorik

## Überblick

- Konstruktion – Geometrie
- Binomische Formel – Algebra
- Beschreibung im KS – Lineare Funktionen
- Pascal'sche Matrix und Hyperwürfel – Matrizen Multiplikation  
Wie sieht man Matrizen Multiplikation?
- Anzahl Untermengen – Mengenlehre
- Anzahl  $k$ –Würfel in einem  $n$ –Würfel – Kombinatorik
- Fragen

Konstruktion

Binomische Formel

Hyperwürfel im KS

Pascal'sche Dreieck

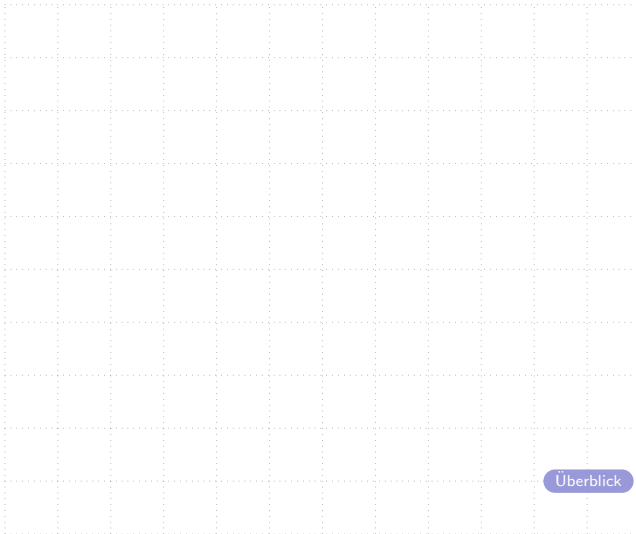
Untermengen

Kombinatorik



# Konstruktion eines 4-d Würfels

Wir bauen den 4-dimensionalen Würfel schrittweise auf.



# Konstruktion eines 4-d Würfels

Wir bauen den 4-dimensionalen Würfel schrittweise auf.

Dim  
 $n = 0$

•  
(0)

Überblick

# Konstruktion eines 4-d Würfels

Wir bauen den 4-dimensionalen Würfel schrittweise auf.

Dim  
 $n = 0$

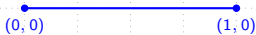


Überblick

# Konstruktion eines 4-d Würfels

Wir bauen den 4-dimensionalen Würfel schrittweise auf.

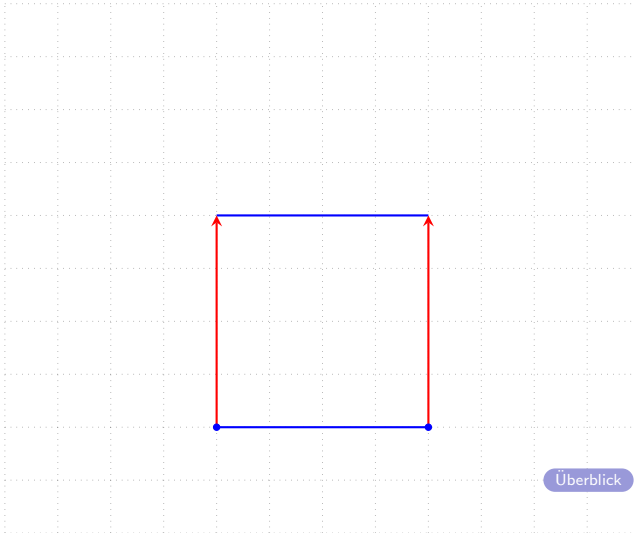
Dim  
 $n = 1$



Überblick

# Konstruktion eines 4-d Würfels

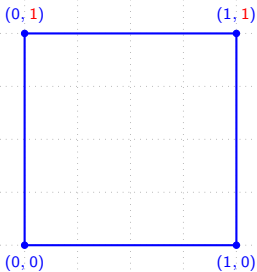
Wir bauen den 4-dimensionalen Würfel schrittweise auf.



# Konstruktion eines 4-d Würfels

Wir bauen den 4-dimensionalen Würfel schrittweise auf.

Dim  
 $n = 2$

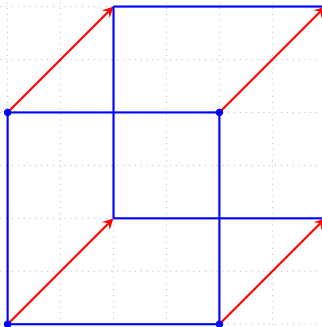


Überblick

# Konstruktion eines 4-d Würfels

Wir bauen den 4-dimensionalen Würfel schrittweise auf.

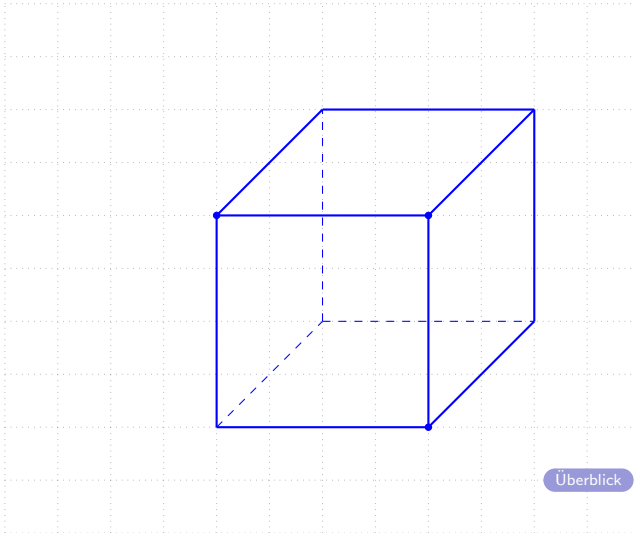
Dim  
 $n = 3$



Überblick

# Konstruktion eines 4-d Würfels

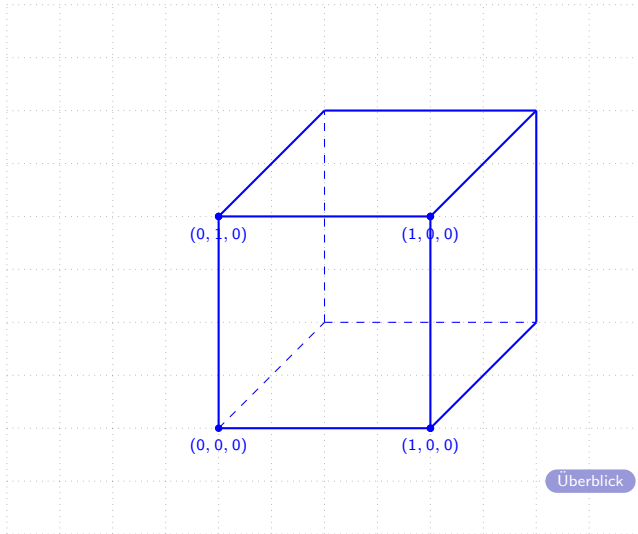
Wir bauen den 4-dimensionalen Würfel schrittweise auf.





# Konstruktion eines 4-d Würfels

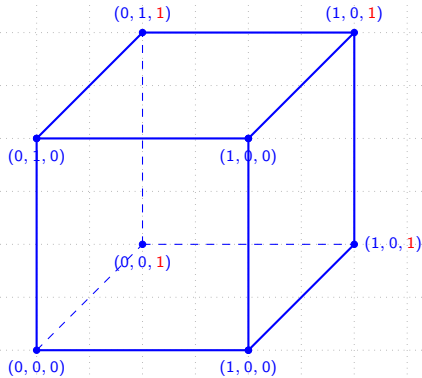
Wir bauen den 4-dimensionalen Würfel schrittweise auf.



# Konstruktion eines 4-d Würfels

Wir bauen den 4-dimensionalen Würfel schrittweise auf.

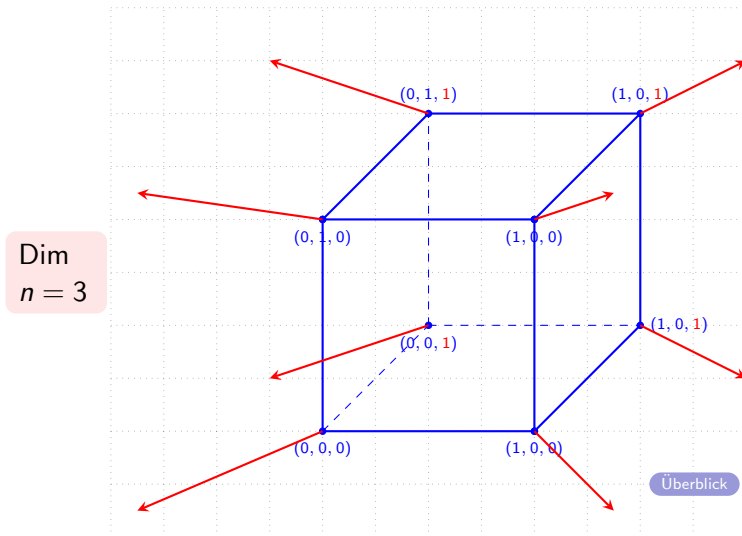
Dim  
 $n = 3$



Überblick

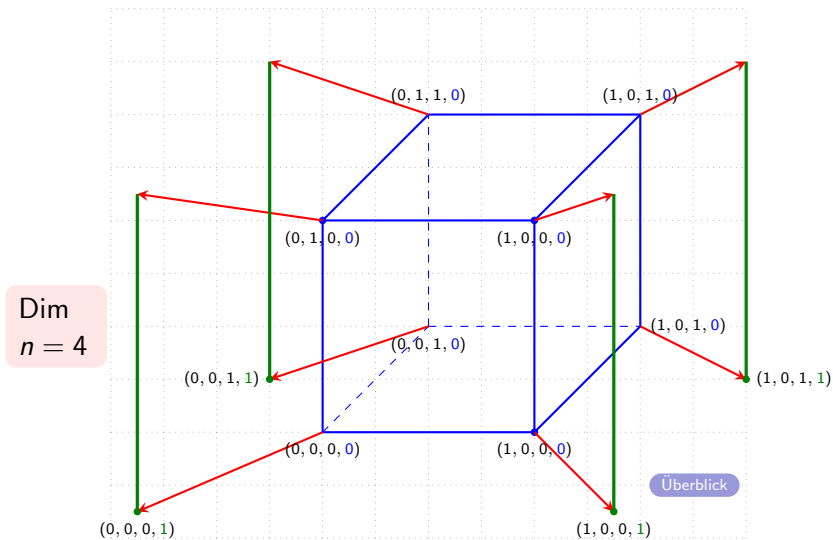
# Konstruktion eines 4-d Würfels

Wir bauen den 4-dimensionalen Würfel schrittweise auf.



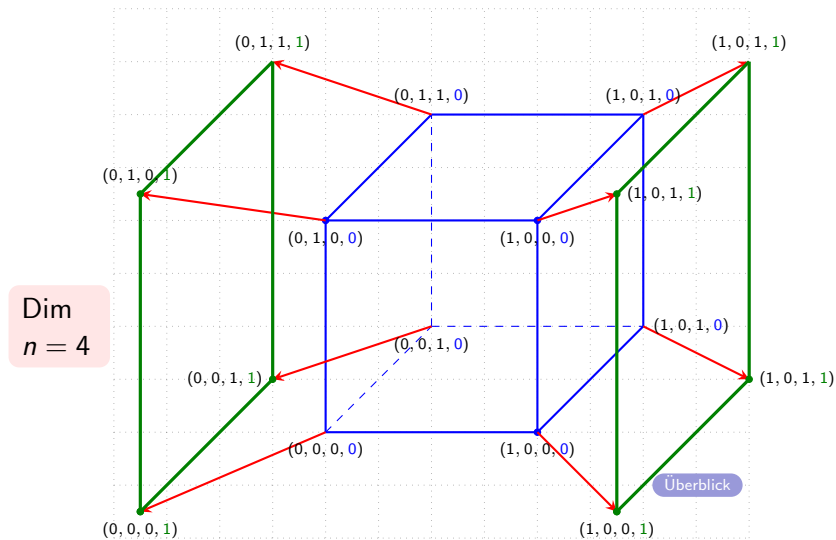
# Konstruktion eines 4-d Würfels

Wir bauen den 4-dimensionalen Würfel schrittweise auf.



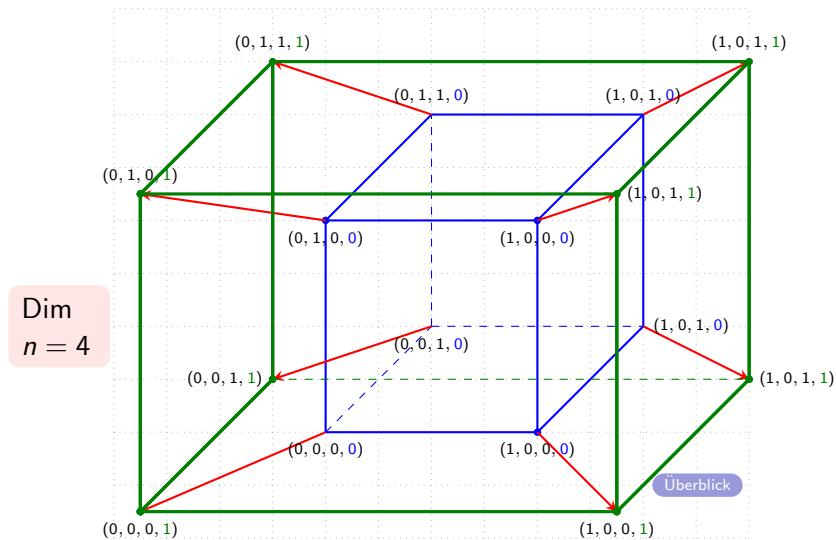
# Konstruktion eines 4-d Würfels

Wir bauen den 4-dimensionalen Würfel schrittweise auf.



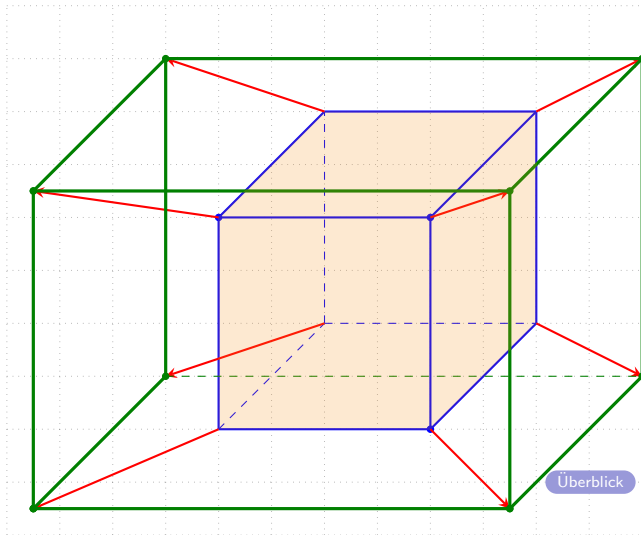
# Konstruktion eines 4-d Würfels

Wir bauen den 4-dimensionalen Würfel schrittweise auf.



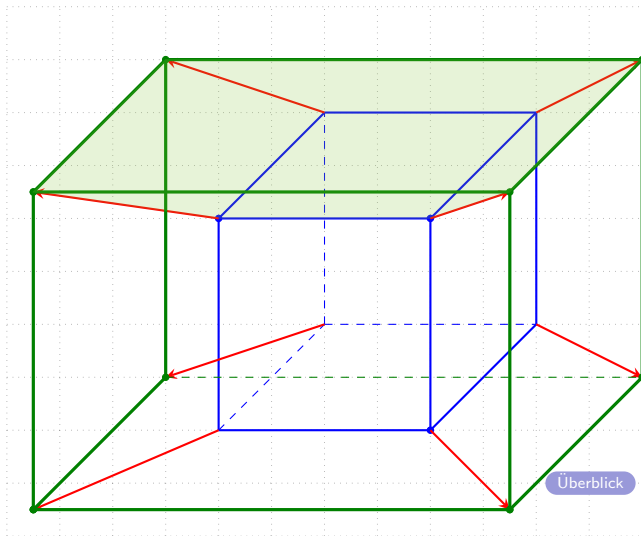
# Konstruktion eines 4-d Würfels

Wir bauen den 4-dimensionalen Würfel schrittweise auf.



# Konstruktion eines 4-d Würfels

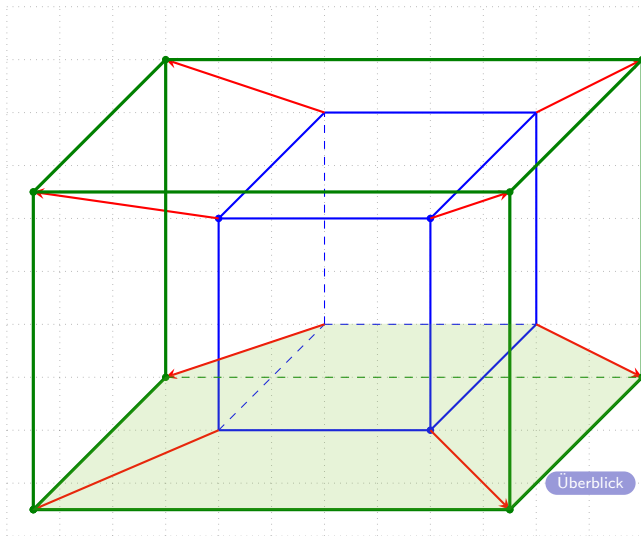
Wir bauen den 4-dimensionalen Würfel schrittweise auf.





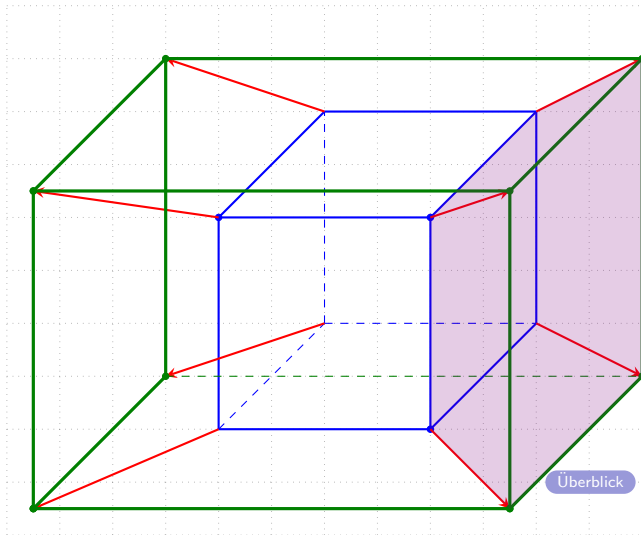
# Konstruktion eines 4-d Würfels

Wir bauen den 4-dimensionalen Würfel schrittweise auf.



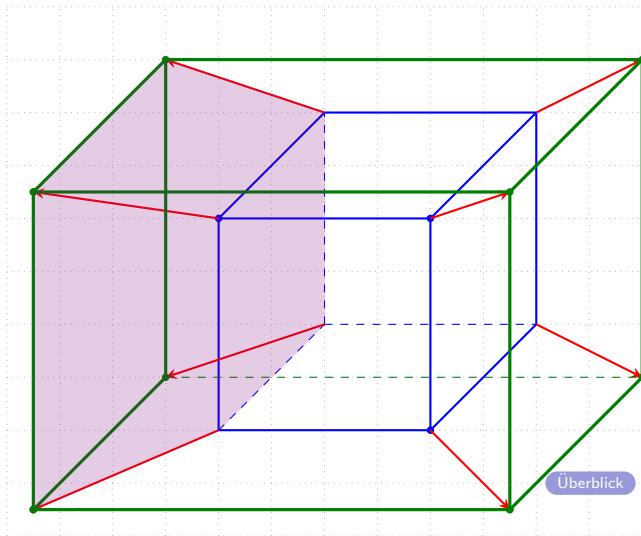
# Konstruktion eines 4-d Würfels

Wir bauen den 4-dimensionalen Würfel schrittweise auf.



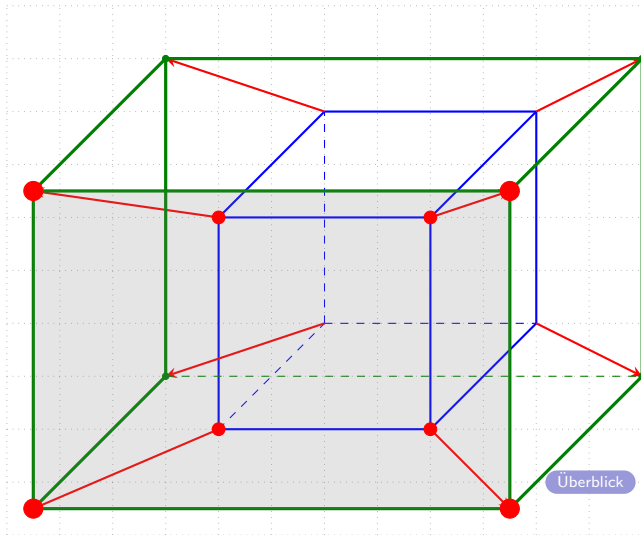
# Konstruktion eines 4-d Würfels

Wir bauen den 4-dimensionalen Würfel schrittweise auf.



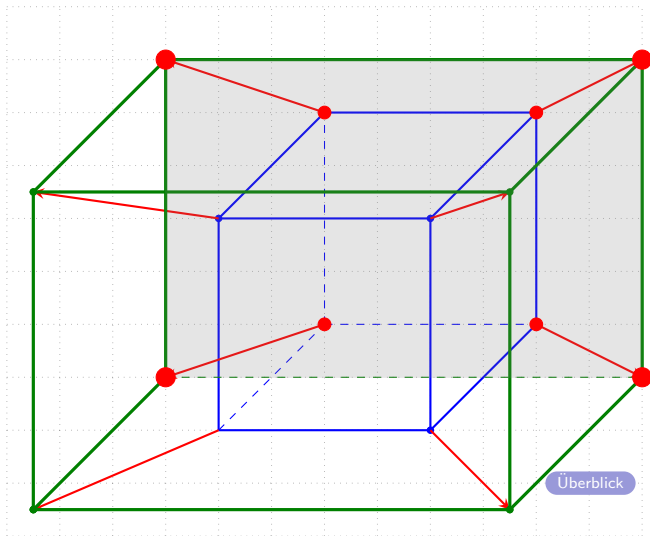
# Konstruktion eines 4-d Würfels

Wir bauen den 4-dimensionalen Würfel schrittweise auf.



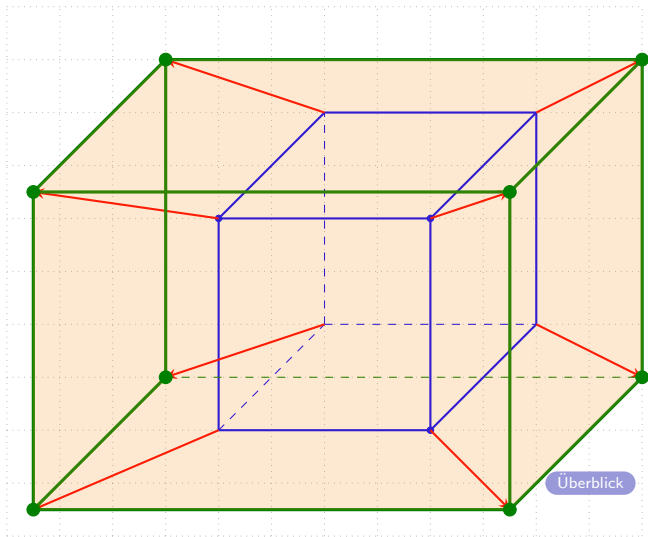
# Konstruktion eines 4-d Würfels

Wir bauen den 4-dimensionalen Würfel schrittweise auf.



# Konstruktion eines 4-d Würfels

Wir bauen den 4-dimensionalen Würfel schrittweise auf.



# Wofür könnte man sich interessieren?

Fragen:

- Wie viele Ecken (Dimension 0) gibt es in einem  $n$ -Würfel?

# Wofür könnte man sich interessieren?

Fragen:

- Wie viele Ecken (Dimension 0) gibt es in einem  $n$ -Würfel?
- Wie viele Kanten (Dimension 1) gibt es in einem  $n$ -Würfel?



# Wofür könnte man sich interessieren?

Fragen:

- Wie viele **Ecken** (Dimension **0**) gibt es in einem  $n$ -Würfel?
- Wie viele **Kanten** (Dimension **1**) gibt es in einem  $n$ -Würfel?
- Wie viele **Flächen** (Dimension **2**) gibt es in einem  $n$ -Würfel?

# Wofür könnte man sich interessieren?

Fragen:

- Wie viele **Ecken** (Dimension **0**) gibt es in einem  $n$ –Würfel?
- Wie viele **Kanten** (Dimension **1**) gibt es in einem  $n$ –Würfel?
- Wie viele **Flächen** (Dimension **2**) gibt es in einem  $n$ –Würfel?
- Wie viele  **$k$ –Würfel** (Dimension  **$k$** )  $W_{k,n}$  gibt es in einem  $n$ –Würfel?

# Wofür könnte man sich interessieren?

Fragen:

- Wie viele **Ecken** (Dimension **0**) gibt es in einem  $n$ –Würfel?
- Wie viele **Kanten** (Dimension **1**) gibt es in einem  $n$ –Würfel?
- Wie viele **Flächen** (Dimension **2**) gibt es in einem  $n$ –Würfel?
- Wie viele  **$k$ –Würfel** (Dimension  **$k$** )  $W_{k,n}$  gibt es in einem  $n$ –Würfel?
- **Wie bekommt man dazugehörigen Formeln?**

# Binomische Formel $(x + 2)^n$

$${}^{n=0}(x + 2)^0 = 1$$

•

$$e = 1$$

# Binomische Formel $(x + 2)^n$

$${}^{n=0}_{(x+2)^0} = 1$$



$$e = 1$$

$${}^{n=1}_{(x+2)^1} = x + 2$$



$$e = 2$$

$$k = 1$$

# Binomische Formel $(x + 2)^n$

$${}^{n=0} (x + 2)^0 = 1$$



$$e = 1$$

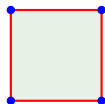
$${}^{n=1} (x + 2)^1 = x + 2$$



$$e = 2$$

$$k = 1$$

$${}^{n=2} (x + 2)^2 = x^2 + 4 \cdot x + 4$$



$$e = 4$$

$$k = 4$$

$$f = 1$$

# Binomische Formel $(x + 2)^n$

$$\overset{n=0}{(x + 2)^0} = 1$$



$$e = 1$$

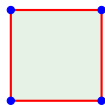
$$\overset{n=1}{(x + 2)^1} = x + 2$$



$$e = 2$$

$$k = 1$$

$$\overset{n=2}{(x + 2)^2} = x^2 + 4 \cdot x + 4$$

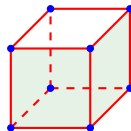


$$e = 4$$

$$k = 4$$

$$f = 1$$

$$\overset{n=3}{(x + 2)^3} = x^3 + 6 \cdot x^2 + 12 \cdot x + 8$$



$$e = 8$$

$$k = 12$$

$$f = 6$$

$$w = 1$$

# Binomische Formel $(x + 2)^n$

$${}^{n=0}(x + 2)^0 = 1$$



$$e = 1$$

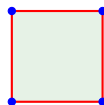
$${}^{n=1}(x + 2)^1 = x + 2$$



$$e = 2$$

$$k = 1$$

$${}^{n=2}(x + 2)^2 = x^2 + 4 \cdot x + 4$$

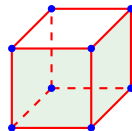


$$e = 4$$

$$k = 4$$

$$f = 1$$

$${}^{n=3}(x + 2)^3 = x^3 + 6 \cdot x^2 + 12 \cdot x + 8$$



$$e = 8$$

$$k = 12$$

$$f = 6$$

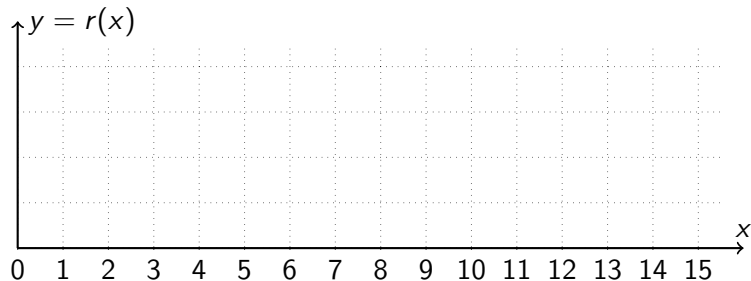
$$w = 1$$

$$(x + 2)^4 = x^4 + 8 \cdot x^3 + 24 \cdot x^2 + 32 \cdot x + 16$$

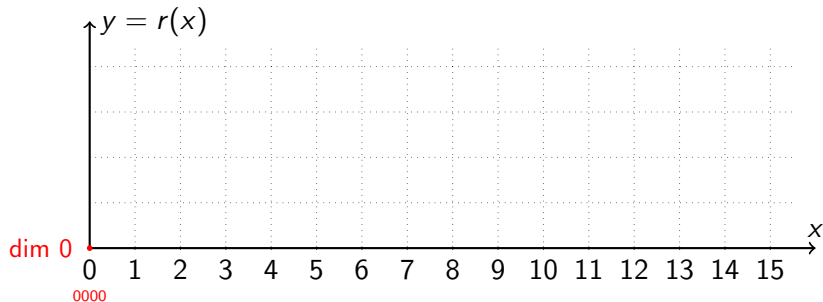
Überblick



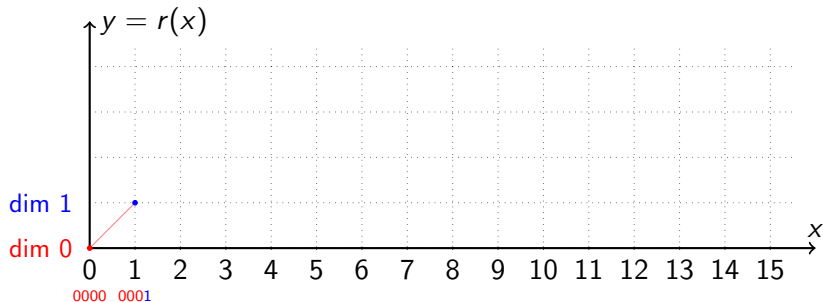
# Beschreibung eines Hyperwürfels im KS



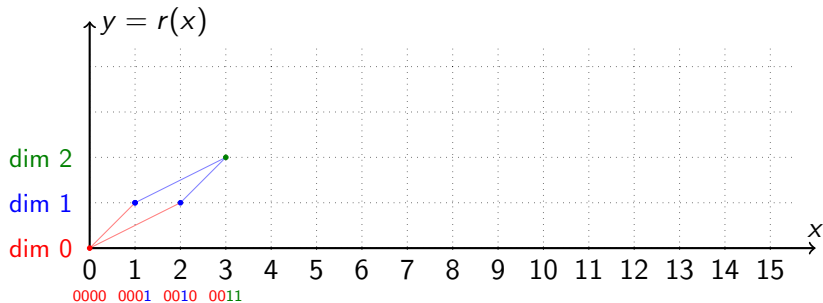
# Beschreibung eines Hyperwürfels im KS



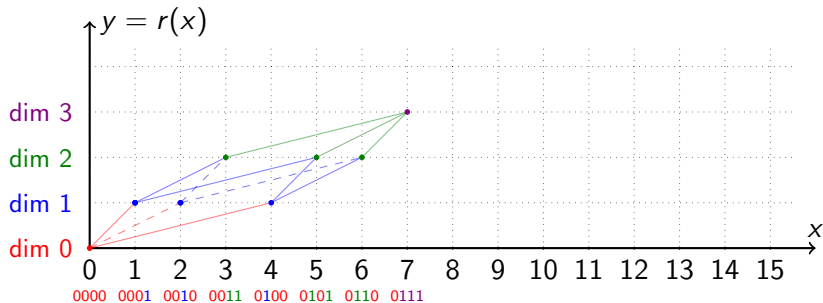
# Beschreibung eines Hyperwürfels im KS



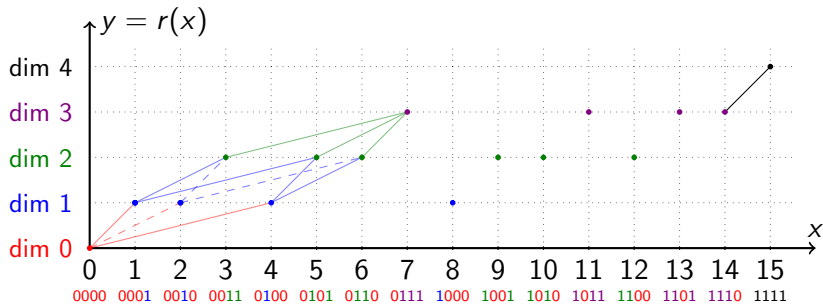
# Beschreibung eines Hyperwürfels im KS



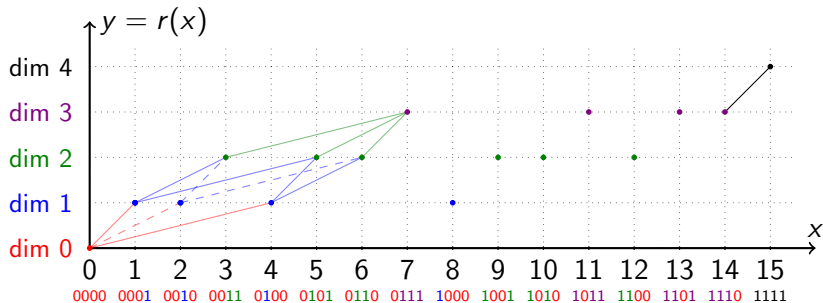
# Beschreibung eines Hyperwürfels im KS



# Beschreibung eines Hyperwürfels im KS

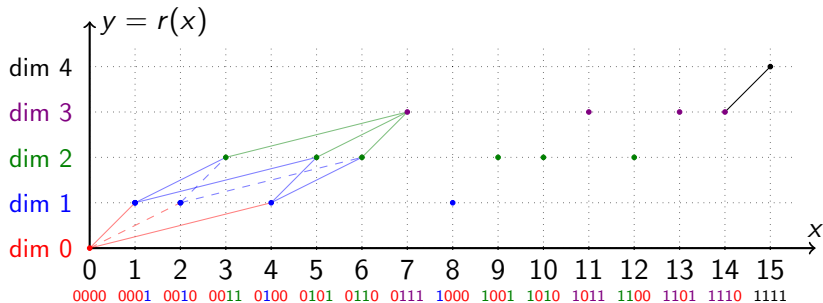


# Beschreibung eines Hyperwürfels im KS



**Regel 1:** Punkt  $(x, r(x))$ ,  $x \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ ,  $r(x) = \# 1$  in Binärdarstellung

# Beschreibung eines Hyperwürfels im KS



**Regel 1:** Punkt  $(x, r(x))$ ,  $x \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ ,  $r(x) = \# 1$  in Binärdarstellung

**Regel 2:**  $A$  und  $B$  sind verbunden, wenn  $|x(A) - x(B)| = 2^k$  und  $m_{AB} > 0$

Überblick



# Hamming distance representation of $n$ -cubes

0.Etage

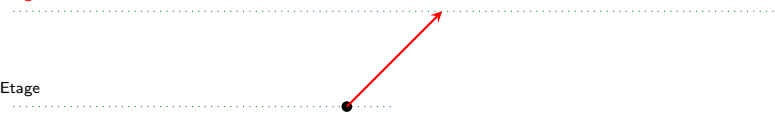


# Hamming distance representation of $n$ -cubes

1.Etage

0.Etage

$n = 1$  - Kante



The diagram illustrates a 1D hypercube (a line segment) with two levels (0.Etage and 1.Etage). A red arrow points from a black dot on the 0.Etage line to a point on the 1.Etage line, representing a transition between the two levels. The text 'n = 1 - Kante' is written below the diagram, indicating that the hypercube is a 1D line segment (Kante) and the transition is a Hamming distance of 1.

# Hamming distance representation of $n$ -cubes

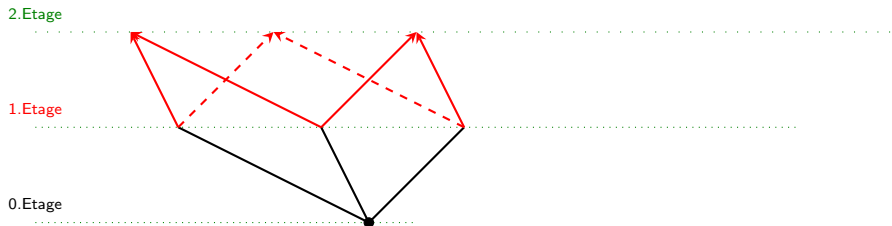
2.Etage

1.Etage

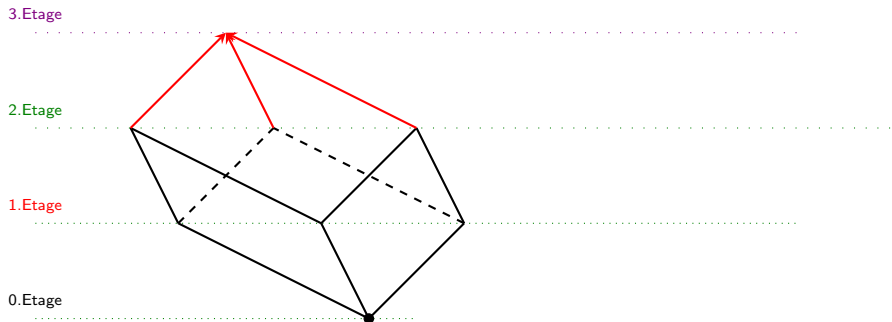
0.Etage

$n = 2$  – Fläche

# Hamming distance representation of $n$ -cubes



# Hamming distance representation of $n$ -cubes



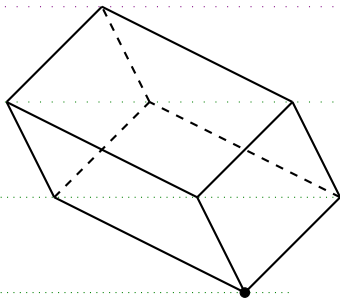
# Hamming distance representation of $n$ -cubes

3.Etage

2.Etage

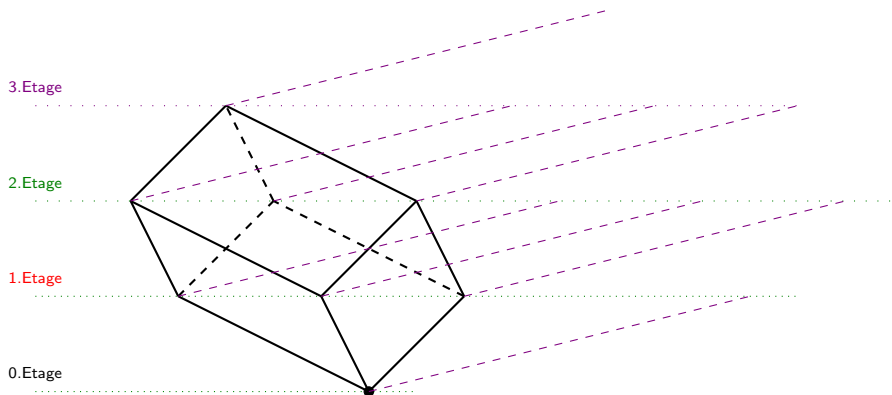
1.Etage

0.Etage



$n = 3$  – Würfel

# Hamming distance representation of $n$ -cubes



# Hamming distance representation of $n$ -cubes

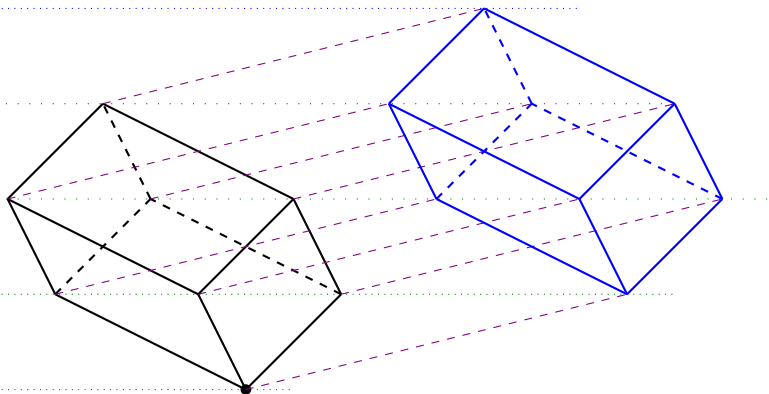
4.Etage

3.Etage

2.Etage

1.Etage

0.Etage





# Hamming distance representation of $n$ -cubes

4.Etage

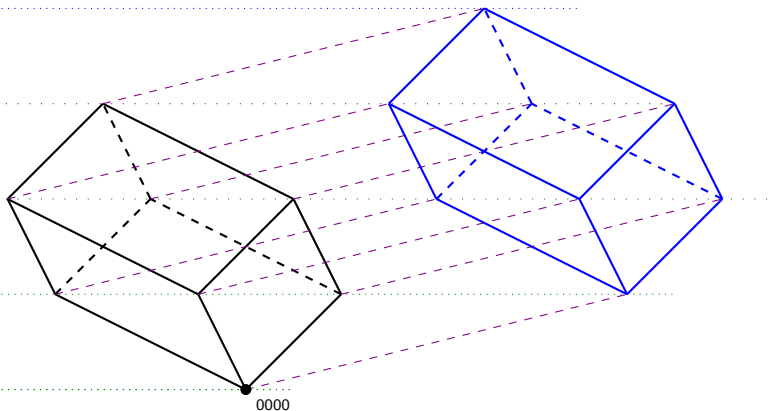
3.Etage

2.Etage

1.Etage

0.Etage

0000



# Hamming distance representation of $n$ -cubes

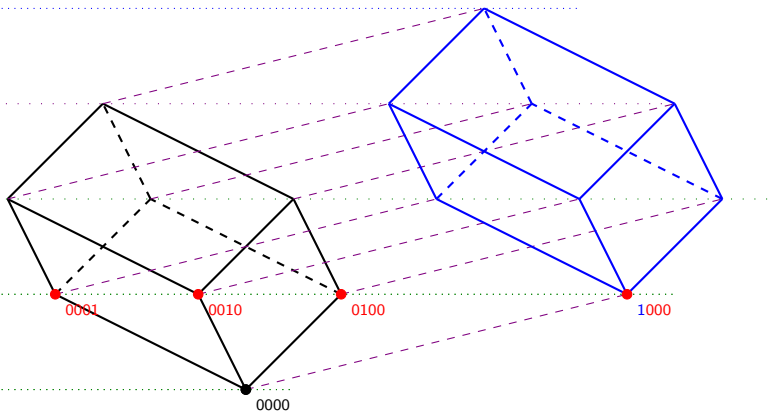
4.Etage

3.Etage

2.Etage

1.Etage

0.Etage



# Hamming distance representation of $n$ -cubes

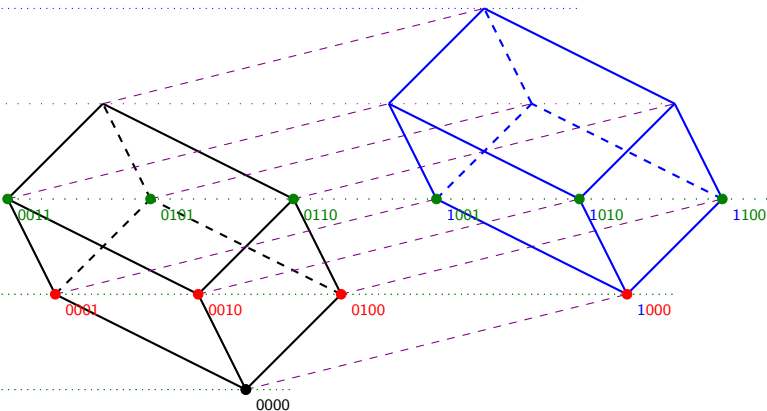
4.Etage

3.Etage

2.Etage

1.Etage

0.Etage



# Hamming distance representation of $n$ -cubes

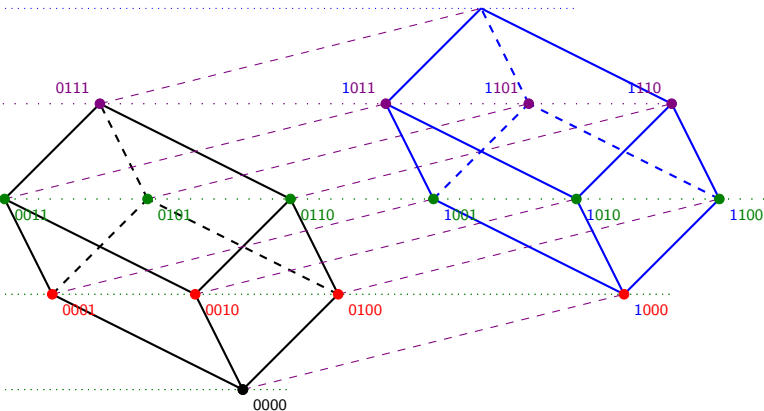
4.Etage

3.Etage

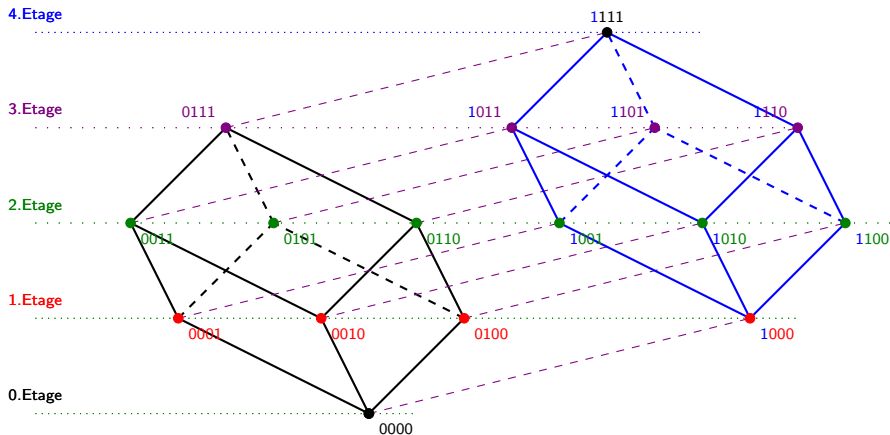
2.Etage

1.Etage

0.Etage



# Hamming distance representation of $n$ -cubes



# Pascal'sche Matrix

Betrachte  $P^2$  der Pascalschen Matrix  $P$  in der unteren Diagonalform:

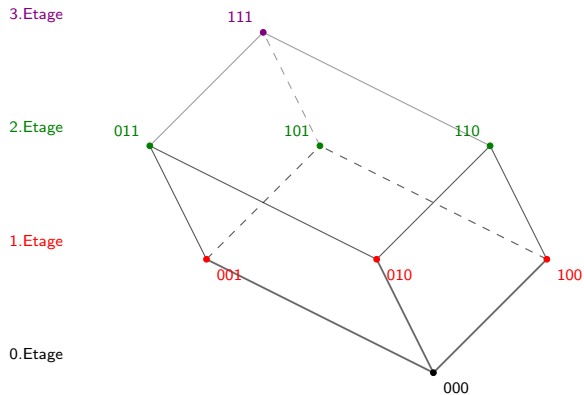
$$P \times P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix  $C = P^2$  ergibt zeilenweise **Ecken**, **Kanten**, **Flächen**, **Würfel**, etc.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 12 & 6 & 1 & 0 \\ 16 & 32 & 24 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

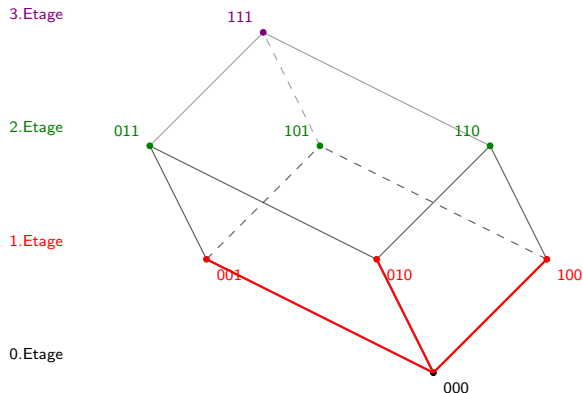
Überblick

# Wie sieht man 12 Kanten im 3-d Würfel?



# Wie sieht man 12 Kanten im 3-d Würfel?

Kanten von der 1. Etage:  $3 \cdot 1 = 3$

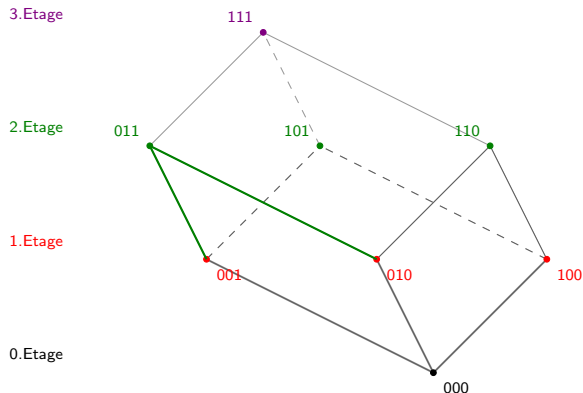




# Wie sieht man 12 Kanten im 3-d Würfel?

Kanten von der 1. Etage:  $3 \cdot 1 = 3$

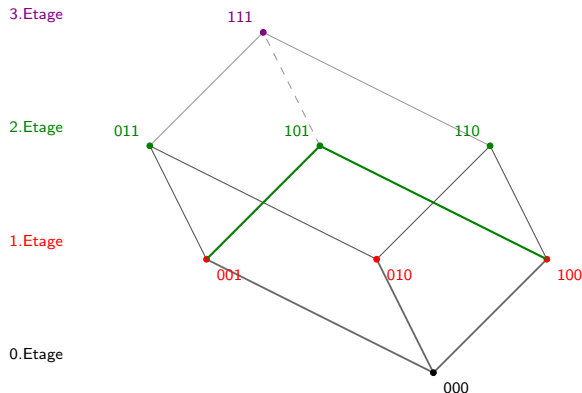
Kanten von der 2. Etage:  $3 \cdot 2 = 6$



# Wie sieht man 12 Kanten im 3-d Würfel?

Kanten von der 1. Etage:  $3 \cdot 1 = 3$

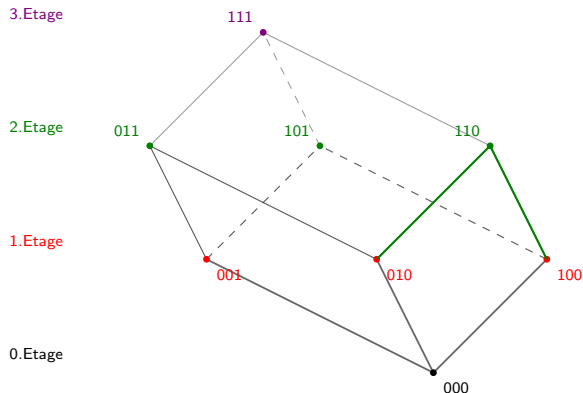
Kanten von der 2. Etage:  $3 \cdot 2 = 6$



# Wie sieht man 12 Kanten im 3-d Würfel?

Kanten von der 1. Etage:  $3 \cdot 1 = 3$

Kanten von der 2. Etage:  $3 \cdot 2 = 6$

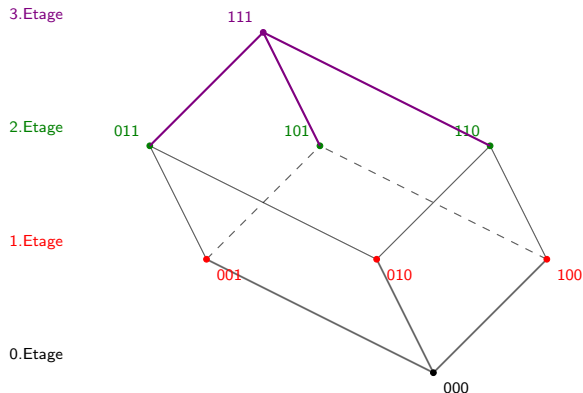


# Wie sieht man 12 Kanten im 3-d Würfel?

Kanten von der 1. Etage:  $3 \cdot 1 = 3$

Kanten von der 2. Etage:  $3 \cdot 2 = 6$

Kanten von der 3. Etage:  $1 \cdot 3 = 3$



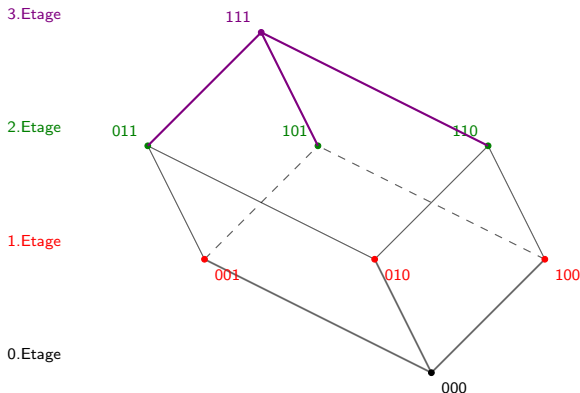
# Wie sieht man 12 Kanten im 3-d Würfel?

Kanten von der 1. Etage:  $3 \cdot 1 = 3$

Kanten von der 2. Etage:  $3 \cdot 2 = 6$

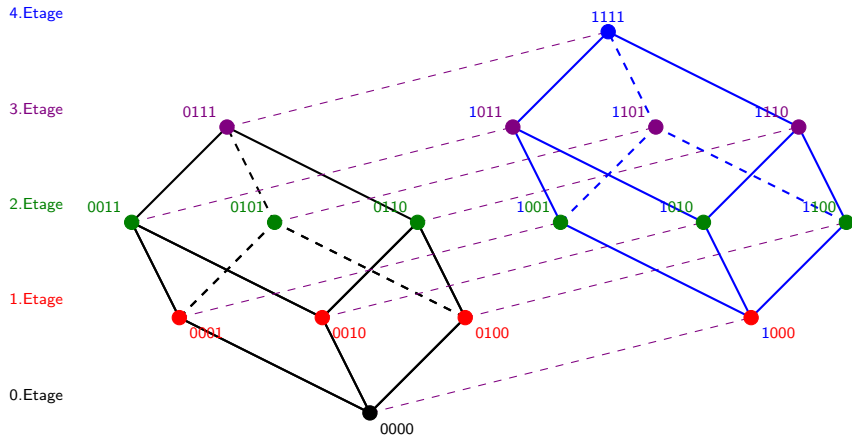
Kanten von der 3. Etage:  $1 \cdot 3 = 3$

Insgesamt:  $1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 12$  Kanten



Matrix

# Wie sieht man 24 Flächen im Hyperwürfel?



# Wie sieht man 24 Flächen im Hyperwürfel?

## Flächen von der 2. Etage

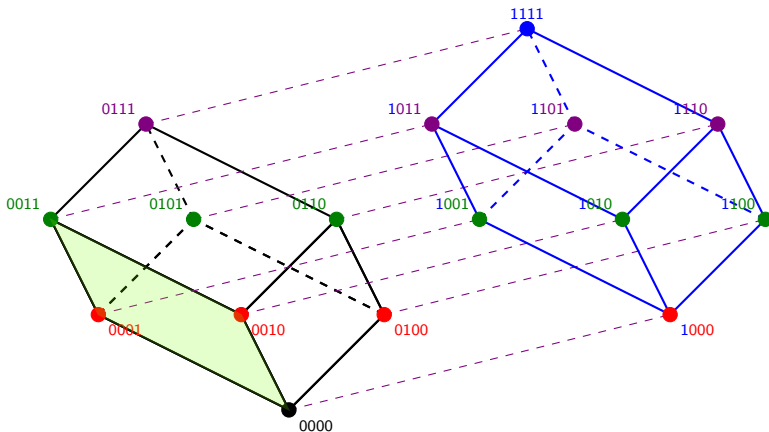
4.Etage

3.Etage

2.Etage

1.Etage

0.Etage



# Wie sieht man 24 Flächen im Hyperwürfel?

## Flächen von der 2. Etage

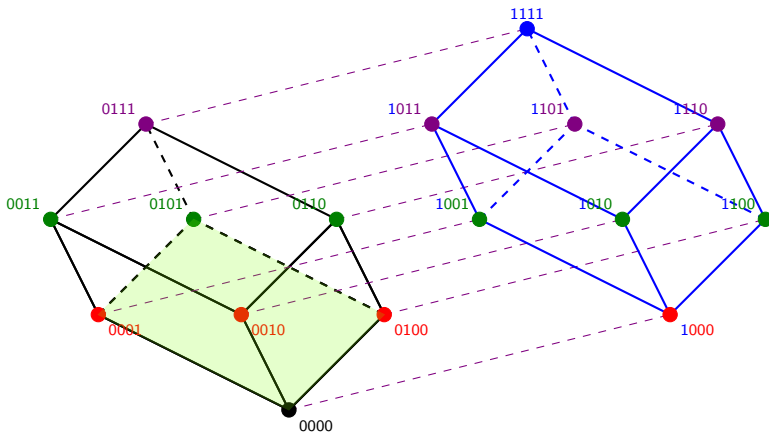
4.Etage

3.Etage

2.Etage

1.Etage

0.Etage





# Wie sieht man 24 Flächen im Hyperwürfel?

## Flächen von der 2. Etage

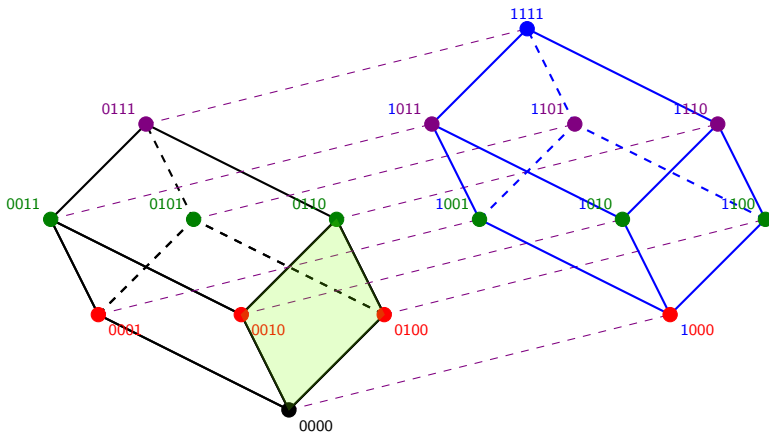
4.Etage

3.Etage

2.Etage

1.Etage

0.Etage



# Wie sieht man 24 Flächen im Hyperwürfel?

## Flächen von der 2. Etage

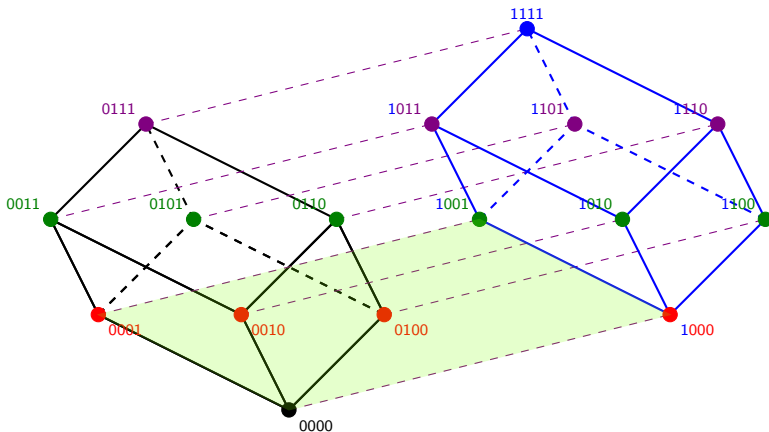
4.Etage

3.Etage

2.Etage

1.Etage

0.Etage



# Wie sieht man 24 Flächen im Hyperwürfel?

## Flächen von der 2. Etage

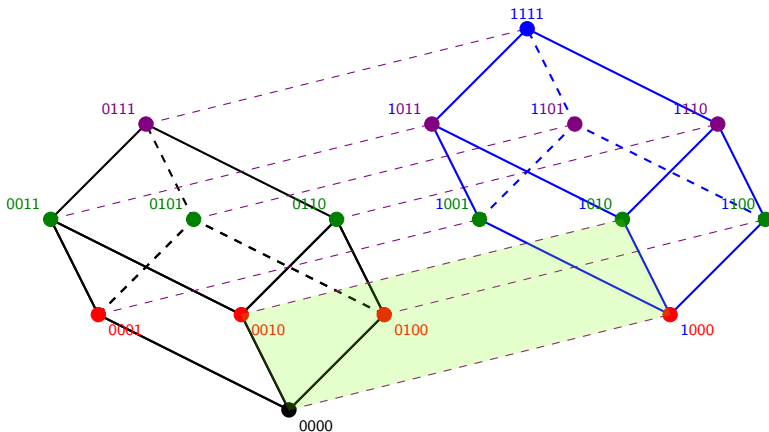
4.Etage

3.Etage

2.Etage

1.Etage

0.Etage



# Wie sieht man 24 Flächen im Hyperwürfel?

## Flächen von der 2. Etage

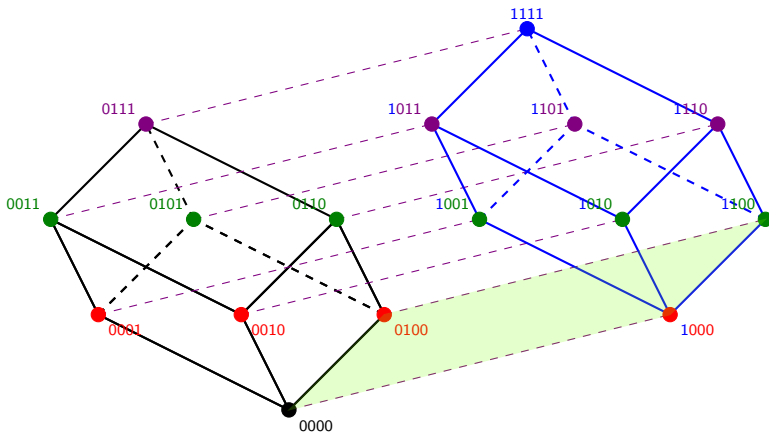
4.Etage

3.Etage

2.Etage

1.Etage

0.Etage



# Wie sieht man 24 Flächen im Hyperwürfel?

## Flächen von der 3. Etage

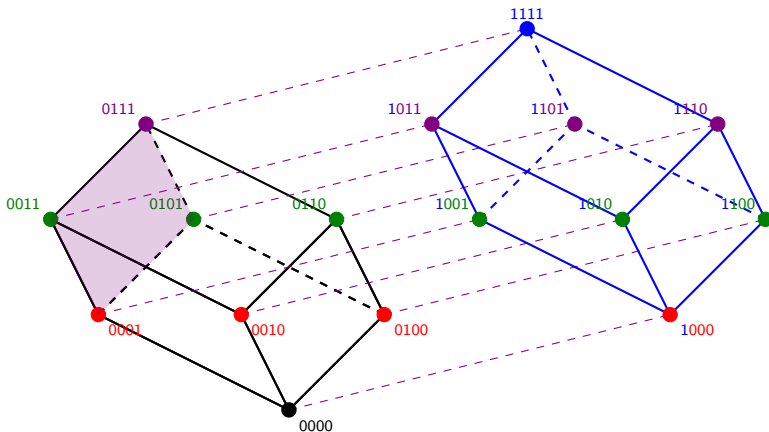
4.Etage

3.Etage

2.Etage

1.Etage

0.Etage



# Wie sieht man 24 Flächen im Hyperwürfel?

## Flächen von der 3. Etage

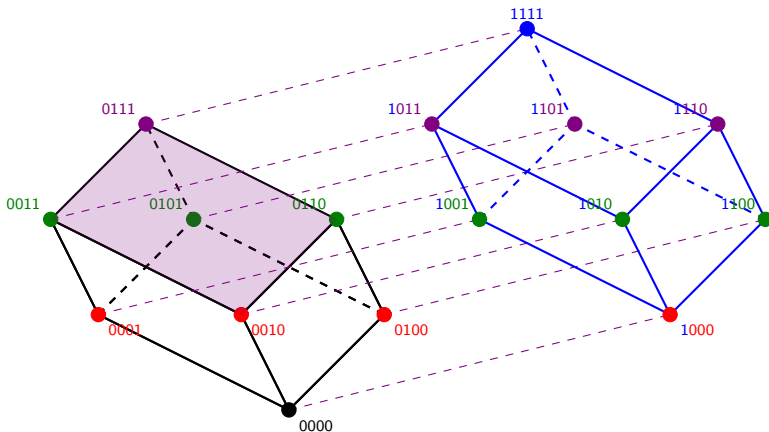
4.Etage

3.Etage

2.Etage

1.Etage

0.Etage



# Wie sieht man 24 Flächen im Hyperwürfel?

## Flächen von der 3. Etage

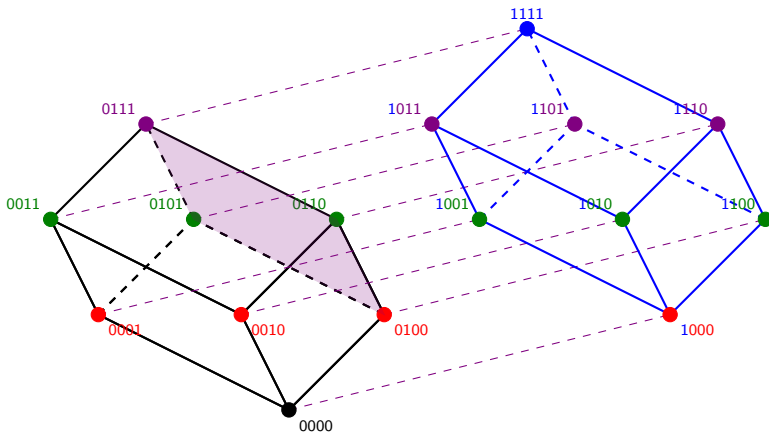
4.Etage

3.Etage

2.Etage

1.Etage

0.Etage



# Wie sieht man 24 Flächen im Hyperwürfel?

## Flächen von der 3. Etage

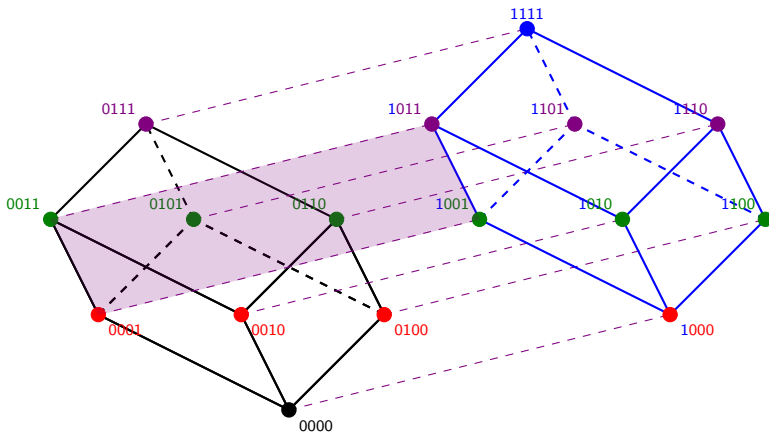
4.Etage

3.Etage

2.Etage

1.Etage

0.Etage





# Wie sieht man 24 Flächen im Hyperwürfel?

## Flächen von der 3. Etage

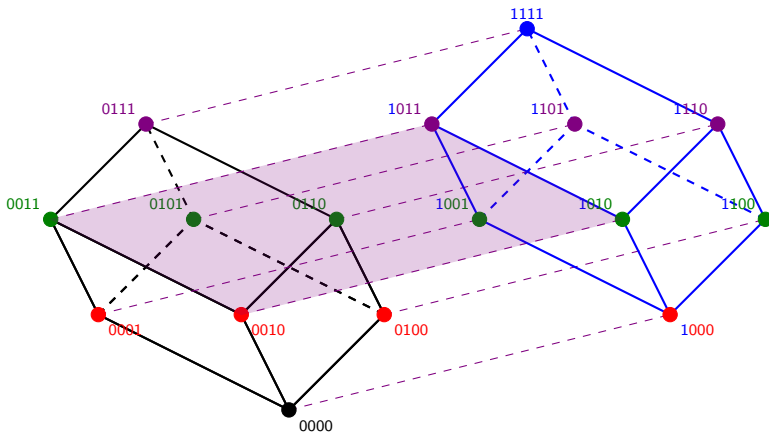
4.Etage

3.Etage

2.Etage

1.Etage

0.Etage



# Wie sieht man 24 Flächen im Hyperwürfel?

## Flächen von der 3. Etage

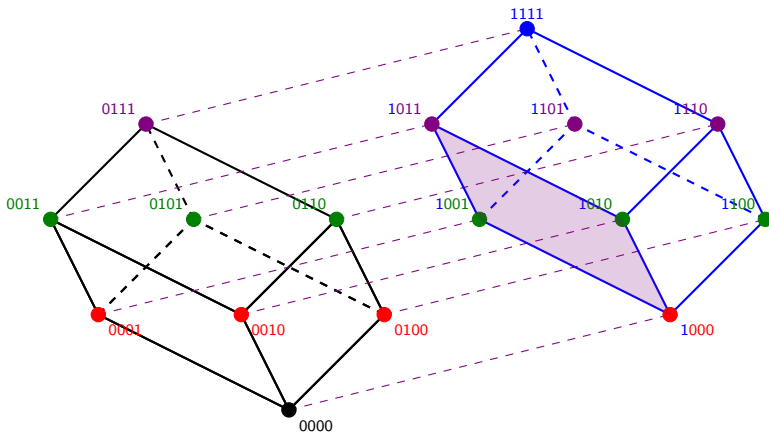
4.Etage

3.Etage

2.Etage

1.Etage

0.Etage



# Wie sieht man 24 Flächen im Hyperwürfel?

## Flächen von der 4. Etage

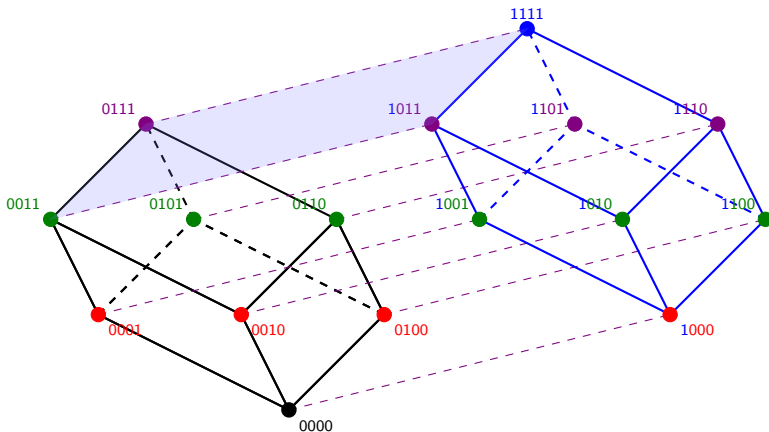
4.Etage

3.Etage

2.Etage

1.Etage

0.Etage



# Wie sieht man 24 Flächen im Hyperwürfel?

## Flächen von der 4. Etage

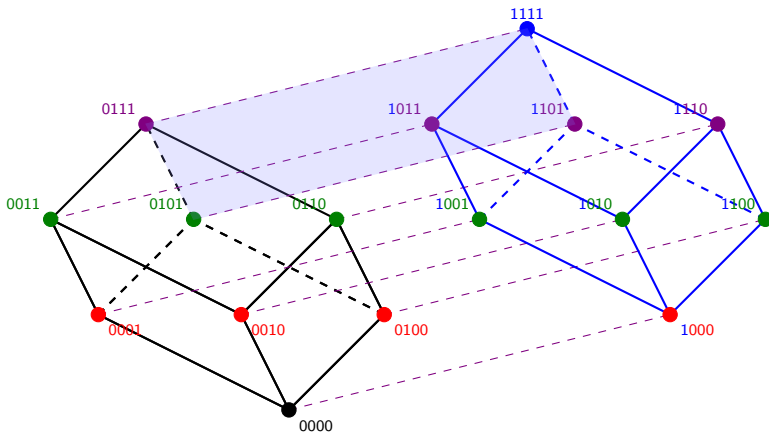
4.Etage

3.Etage

2.Etage

1.Etage

0.Etage



# Wie sieht man 24 Flächen im Hyperwürfel?

## Flächen von der 4. Etage

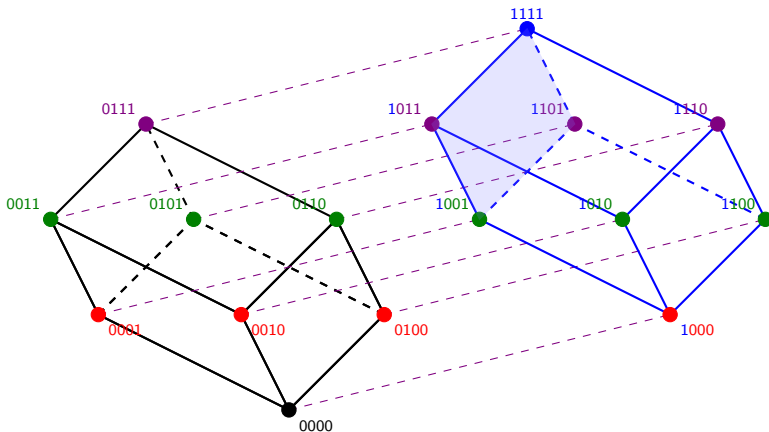
4.Etage

3.Etage

2.Etage

1.Etage

0.Etage



# Wie sieht man 24 Flächen im Hyperwürfel?

## Flächen von der 4. Etage

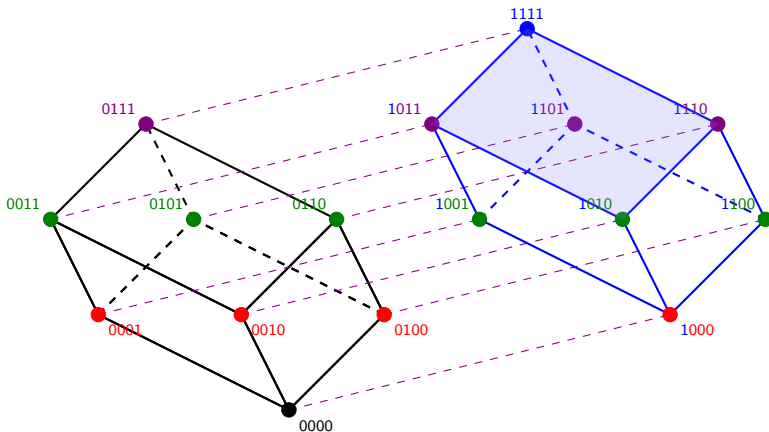
4.Etage

3.Etage

2.Etage

1.Etage

0.Etage



# Wie sieht man 24 Flächen im Hyperwürfel?

## Flächen von der 4. Etage

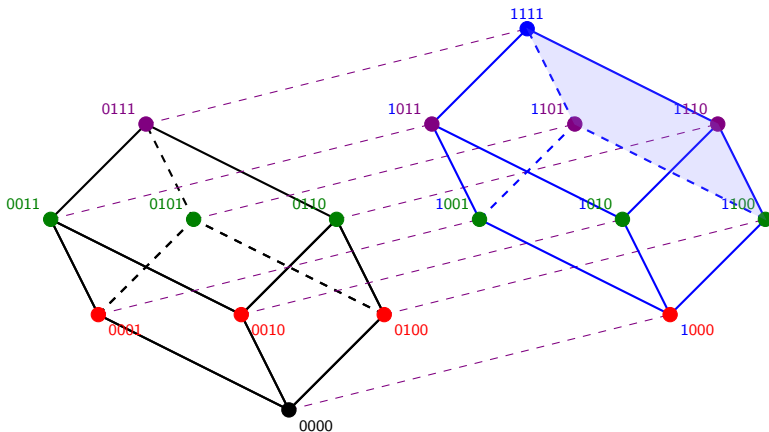
4.Etage

3.Etage

2.Etage

1.Etage

0.Etage



# Wie sieht man 24 Flächen im Hyperwürfel?

## Flächen von der 4. Etage

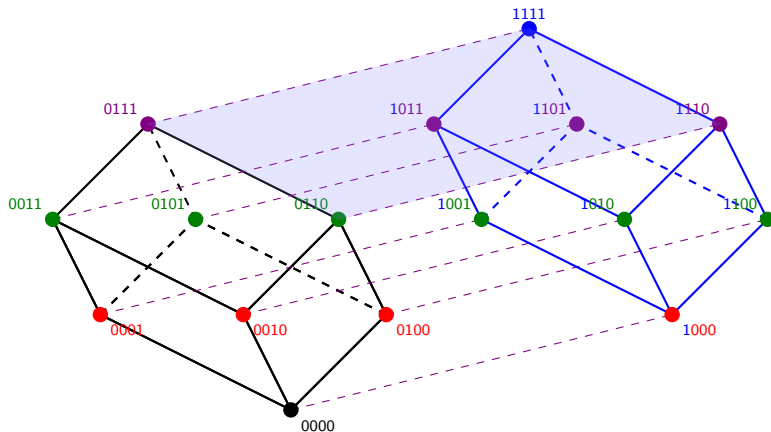
4.Etage

3.Etage

2.Etage

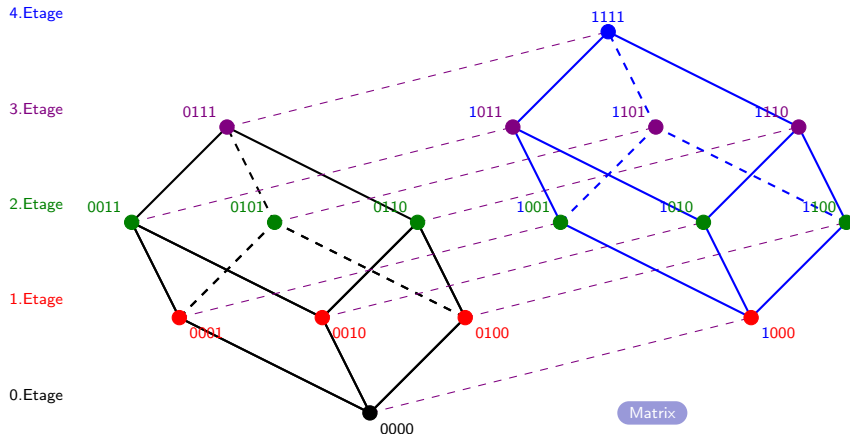
1.Etage

0.Etage





# Wie sieht man 24 Flächen im Hyperwürfel?



Insgesamt:  $1 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 1 \cdot 6 = 24$  Flächen

## $k$ –Würfel in einem $n$ –Würfel

$n$ –Würfel hat  $n + 1$  Etagen –  $0, 1, 2, \dots, n$ .

Die  $m$ -te Etage enthält Punkte mit **genau**  $m$  Einser. Wir zählen  $k$ –Würfel.

- Wähle die Etage  $m$ , in der die obere Ecke liegen soll:  $0 \leq m \leq n$ .

## $k$ –Würfel in einem $n$ –Würfel

$n$ –Würfel hat  $n + 1$  Etagen –  $0, 1, 2, \dots, n$ .

Die  $m$ -te Etage enthält Punkte mit **genau**  $m$  Einser. Wir zählen  $k$ –Würfel.

- Wähle die **Etage**  $m$ , in der die obere Ecke liegen soll:  $0 \leq m \leq n$ .
- Wähle die **obere Grenze** in dieser Etage  $m$ :  $\binom{n}{m}$   
Dies ist gleich zur Wahl von  $m$  Einser aus  $n$  verfügbaren Plätzen.

## $k$ –Würfel in einem $n$ –Würfel

$n$ –Würfel hat  $n + 1$  Etagen –  $0, 1, 2, \dots, n$ .

Die  $m$ -te Etage enthält Punkte mit **genau**  $m$  Einser. Wir zählen  $k$ –Würfel.

- Wähle die **Etage**  $m$ , in der die obere Ecke liegen soll:  $0 \leq m \leq n$ .
- Wähle die *obere Grenze* in dieser Etage  $m$ :  $\binom{n}{m}$   
Dies ist gleich zur Wahl von  $m$  Einser aus  $n$  verfügbaren Plätzen.
- Wähle die *untere Grenze* in der Etage  $m - k$ :  $\binom{m}{k}$   
Dies ist gleich zur Wahl von  $k$  Einser, die zu Nullen werden.

## $k$ –Würfel in einem $n$ –Würfel

$n$ –Würfel hat  $n + 1$  Etagen –  $0, 1, 2, \dots, n$ .

Die  $m$ -te Etage enthält Punkte mit **genau**  $m$  Einser. Wir zählen  $k$ –Würfel.

- Wähle die **Etage**  $m$ , in der die obere Ecke liegen soll:  $0 \leq m \leq n$ .
- Wähle die *obere Grenze* in dieser Etage  $m$ :  $\binom{n}{m}$   
Dies ist gleich zur Wahl von  $m$  Einser aus  $n$  verfügbaren Plätzen.
- Wähle die *untere Grenze* in der Etage  $m - k$ :  $\binom{m}{k}$   
Dies ist gleich zur Wahl von  $k$  Einser, die zu Nullen werden.

## $k$ –Würfel in einem $n$ –Würfel

$n$ –Würfel hat  $n + 1$  Etagen –  $0, 1, 2, \dots, n$ .

Die  $m$ -te Etage enthält Punkte mit **genau**  $m$  Einser. Wir zählen  $k$ –Würfel.

- Wähle die **Etage**  $m$ , in der die obere Ecke liegen soll:  $0 \leq m \leq n$ .
- Wähle die *obere Grenze* in dieser Etage  $m$ :  $\binom{n}{m}$   
Dies ist gleich zur Wahl von  $m$  Einser aus  $n$  verfügbaren Plätzen.
- Wähle die *untere Grenze* in der Etage  $m - k$ :  $\binom{m}{k}$   
Dies ist gleich zur Wahl von  $k$  Einser, die zu Nullen werden.

Daraus ergibt sich die folgende Formel für die Anzahl der  $k$ –Würfel in einem  $n$ –Würfel:

$$\sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \cdot \binom{m}{k}$$

## $k$ –Würfel in einem $n$ –Würfel

$n$ –Würfel hat  $n + 1$  Etagen –  $0, 1, 2, \dots, n$ .

Die  $m$ -te Etage enthält Punkte mit **genau**  $m$  Einser. Wir zählen  $k$ –Würfel.

- Wähle die **Etage**  $m$ , in der die obere Ecke liegen soll:  $0 \leq m \leq n$ .
- Wähle die *obere Grenze* in dieser Etage  $m$ :  $\binom{n}{m}$   
Dies ist gleich zur Wahl von  $m$  Einser aus  $n$  verfügbaren Plätzen.
- Wähle die *untere Grenze* in der Etage  $m - k$ :  $\binom{m}{k}$   
Dies ist gleich zur Wahl von  $k$  Einser, die zu Nullen werden.

Daraus ergibt sich die folgende Formel für die Anzahl der  $k$ –Würfel in einem  $n$ –Würfel:

$$\sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \cdot \binom{m}{k}$$

Dies entspricht genau dem Produkt aus der  $n$ -ten Zeile und der  $k$ -ten Spalte der Pascalschen Matrix.

# $k$ –Würfel in einem $n$ –Würfel

$n$ –Würfel hat  $n + 1$  Etagen –  $0, 1, 2, \dots, n$ .

Die  $m$ -te Etage enthält Punkte mit **genau**  $m$  Einser. Wir zählen  $k$ –Würfel.

- Wähle die **Etage**  $m$ , in der die obere Ecke liegen soll:  $0 \leq m \leq n$ .
- Wähle die *obere Grenze* in dieser Etage  $m$ :  $\binom{n}{m}$   
Dies ist gleich zur Wahl von  $m$  Einser aus  $n$  verfügbaren Plätzen.
- Wähle die *untere Grenze* in der Etage  $m - k$ :  $\binom{m}{k}$   
Dies ist gleich zur Wahl von  $k$  Einser, die zu Nullen werden.

Daraus ergibt sich die folgende Formel für die Anzahl der  $k$ –Würfel in einem  $n$ –Würfel:

$$\sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \cdot \binom{m}{k}$$

Dies entspricht genau dem Produkt aus der  $n$ -ten Zeile und der  $k$ -ten Spalte der Pascalschen Matrix.

Besonderer Fall:  $k = 0 \iff \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \cdot \binom{m}{0}$ . Die Summe der Binomialkoeffizienten ist  $2^n$ .



Wie viele Teilmengen hat eine Menge  $A$  mit  $n$  Elementen  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ?

# Hyperwürfel und Mengenlehre

Wie viele Teilmengen hat eine Menge  $A$  mit  $n$  Elementen  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ?

Wir betrachten den Fall  $n = 4$  mit  $A = \{a, b, c, d\}$

- Jede Teilmenge wird kodiert durch eine Liste mit 4 Positionen

# Hyperwürfel und Mengenlehre

Wie viele Teilmengen hat eine Menge  $A$  mit  $n$  Elementen  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ?

Wir betrachten den Fall  $n = 4$  mit  $A = \{a, b, c, d\}$

- Jede Teilmenge wird kodiert durch eine Liste mit 4 Positionen
- Gehört ein Element der Teilmenge schreiben wir eine 1, sonst eine 0.

# Hyperwürfel und Mengenlehre

Wie viele Teilmengen hat eine Menge  $A$  mit  $n$  Elementen  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ?

Wir betrachten den Fall  $n = 4$  mit  $A = \{a, b, c, d\}$

- Jede Teilmenge wird kodiert durch eine Liste mit 4 Positionen
- Gehört ein Element der Teilmenge schreiben wir eine 1, sonst eine 0.
- Beispiele:  $\emptyset \leftrightarrow (0, 0, 0, 0)$ ;  $\{a, c\} \leftrightarrow (1, 0, 1, 0)$ ;  $A \leftrightarrow (1, 1, 1, 1)$ ;

Wie viele Teilmengen hat eine Menge  $A$  mit  $n$  Elementen  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ?

Wir betrachten den Fall  $n = 4$  mit  $A = \{a, b, c, d\}$

- Jede Teilmenge wird kodiert durch eine Liste mit 4 Positionen
- Gehört ein Element der Teilmenge schreiben wir eine 1, sonst eine 0.
- Beispiele:  $\emptyset \leftrightarrow (0, 0, 0, 0)$ ;  $\{a, c\} \leftrightarrow (1, 0, 1, 0)$ ;  $A \leftrightarrow (1, 1, 1, 1)$ ;
- Die Anzahl 1 in der Liste entspricht der Anzahl Elementen in der Teilmenge

# Hyperwürfel und Mengenlehre

Wie viele Teilmengen hat eine Menge  $A$  mit  $n$  Elementen  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ?

Wir betrachten den Fall  $n = 4$  mit  $A = \{a, b, c, d\}$

- Jede Teilmenge wird kodiert durch eine Liste mit 4 Positionen
- Gehört ein Element der Teilmenge schreiben wir eine 1, sonst eine 0.
- Beispiele:  $\emptyset \leftrightarrow (0, 0, 0, 0)$ ;  $\{a, c\} \leftrightarrow (1, 0, 1, 0)$ ;  $A \leftrightarrow (1, 1, 1, 1)$ ;
- Die Anzahl 1 in der Liste entspricht der Anzahl Elementen in der Teilmenge
- Jede Ecke eines Hyperwürfels entspricht genau einer Teilmenge von  $A$

# Hyperwürfel und Mengenlehre

Wie viele Teilmengen hat eine Menge  $A$  mit  $n$  Elementen  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ?

Wir betrachten den Fall  $n = 4$  mit  $A = \{a, b, c, d\}$

- Jede Teilmenge wird kodiert durch eine Liste mit 4 Positionen
- Gehört ein Element der Teilmenge schreiben wir eine 1, sonst eine 0.
- Beispiele:  $\emptyset \leftrightarrow (0, 0, 0, 0)$ ;  $\{a, c\} \leftrightarrow (1, 0, 1, 0)$ ;  $A \leftrightarrow (1, 1, 1, 1)$ ;
- Die Anzahl 1 in der Liste entspricht der Anzahl Elementen in der Teilmenge
- Jede Ecke eines Hyperwürfels entspricht genau einer Teilmenge von  $A$
- Insgesamt gibt es also in diesem Beispiel  $2^4 = 16$  Teilmengen.

# Hyperwürfel und Mengenlehre

Wie viele Teilmengen hat eine Menge  $A$  mit  $n$  Elementen  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ?  
Wir betrachten den Fall  $n = 4$  mit  $A = \{a, b, c, d\}$

- Jede Teilmenge wird kodiert durch eine Liste mit 4 Positionen
- Gehört ein Element der Teilmenge schreiben wir eine 1, sonst eine 0.
- Beispiele:  $\emptyset \leftrightarrow (0, 0, 0, 0)$ ;  $\{a, c\} \leftrightarrow (1, 0, 1, 0)$ ;  $A \leftrightarrow (1, 1, 1, 1)$ ;
- Die Anzahl 1 in der Liste entspricht der Anzahl Elementen in der Teilmenge
- Jede Ecke eines Hyperwürfels entspricht genau einer Teilmenge von  $A$
- Insgesamt gibt es also in diesem Beispiel  $2^4 = 16$  Teilmengen.
- **Allgemein?**



Wir beschreiben verschiedene Elemente eines Hyperwürfel in einem Koordinatensystem

- Ecken (Dim 0):  $e(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\} \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$

Wir beschreiben verschiedene Elemente eines Hyperwürfel in einem Koordinatensystem

- **Ecken** (Dim 0):  $e(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\} \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$
- **Kanten** (Dim 1):  $\exists j : x_j \in [0, 1] \text{ und } \forall i \neq j \quad x_i \in \{0, 1\}.$

Wir beschreiben verschiedene Elemente eines Hyperwürfel in einem Koordinatensystem

- **Ecken** (Dim 0):  $e(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\} \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$
- **Kanten** (Dim 1):  $\exists j : x_j \in [0, 1] \text{ und } \forall i \neq j \quad x_i \in \{0, 1\}.$
- **Flächen** (Dim 2):  $\exists j_1 \neq j_2 : x_{j_1}, x_{j_2} \in [0, 1] \text{ und } \forall i \notin \{j_1, j_2\} \quad x_i \in \{0, 1\}.$

Wir beschreiben verschiedene Elemente eines Hyperwürfel in einem Koordinatensystem

- **Ecken** (Dim 0):  $e(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\} \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$
- **Kanten** (Dim 1):  $\exists j : x_j \in [0, 1] \text{ und } \forall i \neq j \quad x_i \in \{0, 1\}.$
- **Flächen** (Dim 2):  $\exists j_1 \neq j_2 : x_{j_1}, x_{j_2} \in [0, 1] \text{ und } \forall i \notin \{j_1, j_2\} \quad x_i \in \{0, 1\}.$
- Insgesamt gibt es  $E_n = W_{0,n} = 2^n$  Ecken.

Wir beschreiben verschiedene Elemente eines Hyperwürfel in einem Koordinatensystem

- **Ecken** (Dim 0):  $e(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\} \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$
- **Kanten** (Dim 1):  $\exists j : x_j \in [0, 1] \text{ und } \forall i \neq j \quad x_i \in \{0, 1\}.$
- **Flächen** (Dim 2):  $\exists j_1 \neq j_2 : x_{j_1}, x_{j_2} \in [0, 1] \text{ und } \forall i \notin \{j_1, j_2\} \quad x_i \in \{0, 1\}.$
- Insgesamt gibt es  $E_n = W_{0,n} = 2^n$  Ecken.
- Insgesamt gibt es  $K_n = W_{1,n} = n \cdot 2^{n-1}$  Kanten.

# Kombinatorik – Beschreibung in Koordinaten

Wir beschreiben verschiedene Elemente eines Hyperwürfel in einem Koordinatensystem

- **Ecken** (Dim 0):  $e(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\} \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$
- **Kanten** (Dim 1):  $\exists j : x_j \in [0, 1] \text{ und } \forall i \neq j \quad x_i \in \{0, 1\}.$
- **Flächen** (Dim 2):  $\exists j_1 \neq j_2 : x_{j_1}, x_{j_2} \in [0, 1] \text{ und } \forall i \notin \{j_1, j_2\} \quad x_i \in \{0, 1\}.$
- Insgesamt gibt es  $E_n = W_{0,n} = 2^n$  Ecken.
- Insgesamt gibt es  $K_n = W_{1,n} = n \cdot 2^{n-1}$  Kanten.
- Insgesamt gibt es  $F_n = W_{2,n} = \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot 2^{n-2}$  Flächen.

# Kombinatorik – Beschreibung in Koordinaten

Wir beschreiben verschiedene Elemente eines Hyperwürfel in einem Koordinatensystem

- **Ecken** (Dim 0):  $e(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\} \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$
- **Kanten** (Dim 1):  $\exists j : x_j \in [0, 1]$  und  $\forall i \neq j \quad x_i \in \{0, 1\}$ .
- **Flächen** (Dim 2):  $\exists j_1 \neq j_2 : x_{j_1}, x_{j_2} \in [0, 1]$  und  $\forall i \notin \{j_1, j_2\} \quad x_i \in \{0, 1\}$ .
- Insgesamt gibt es  $E_n = W_{0,n} = 2^n$  Ecken.
- Insgesamt gibt es  $K_n = W_{1,n} = n \cdot 2^{n-1}$  Kanten.
- Insgesamt gibt es  $F_n = W_{2,n} = \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot 2^{n-2}$  Flächen.
- Allgemein gibt diese Formel die Anzahl der  $k$ -Würfel in einem  $n$ -Würfel

$$W_{k,n} = \binom{n}{k} \cdot 2^{n-k}$$