Hyperwürfel im Gymnasialunterricht

TMU Kanti Sursee

Dima Nikolenkov
ETH Zürich

13 September 2023

Überblick

- Konstruktion – Geometrie Konstruktion
- Binomische Formel – Algebra Binomische Formel
- Beschreibung im KS – Lineare Funktionen Hyperwürfel im KS
- Pascal'sche Matrix und Hyperwürfel – Matrizen Multiplikation
  Wie sieht man Matrizen Multiplikation?
  Pascal'sche Dreieck
- Anzahl Untermengen – Mengenlehre Untermengen
- Anzahl $k-$Würfel in einem $n-$Würfel – Kombinatorik Kombinatorik
- Fragen

Wir bauen den 4-dimensionalen Würfel schrittweise auf.

Dim

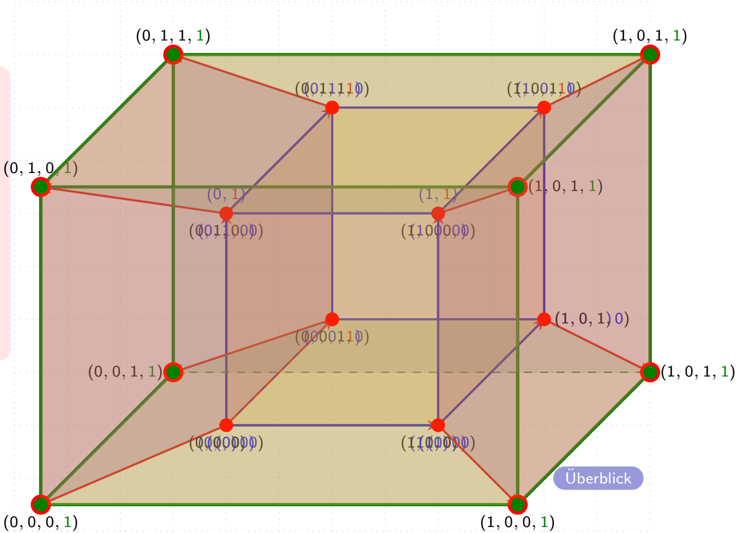
Dim

Dim

Dim

Dim

$n = 4$



Überblick

Wofür könnte man sich interessieren?

Fragen:

- Wie viele Ecken (Dimension 0) gibt es in einem $n-$Würfel?
- Wie viele Kanten (Dimension 1) gibt es in einem $n-$Würfel?
- Wie viele Flächen (Dimension 2) gibt es in einem $n-$Würfel?
- Wie viele $k-$Würfel (Dimension k) $W_{k,n}$ gibt es in einem $n-$Würfel?
- Wie bekommt man dazugehörigen Formeln?

Binomische Formel $(x+2)^n$

$n=0$

$(x+2)^0 = 1$

$e = 1$

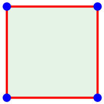
$n=1$

$(x+2)^1 = x + 2$

$e = 2$
$k = 1$

$n=2$

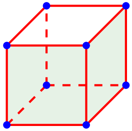
$(x+2)^2 = x^2 + 4 \cdot x + 4$



$e = 4$
$k = 4$
$f = 1$

$n=3$

$(x+2)^3 = x^3 + 6 \cdot x^2 + 12 \cdot x + 8$

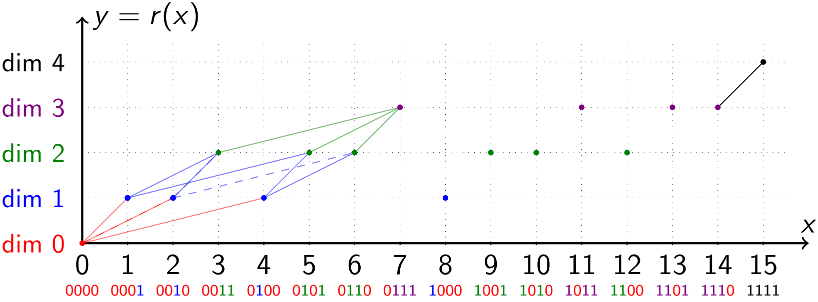


$e = 8$
$k = 12$
$f = 6$
$w = 1$

$(x+2)^4 = x^4 + 8 \cdot x^3 + 24 \cdot x^2 + 32 \cdot x + 16$

Überblick

Beschreibung eines Hyperwürfels im KS

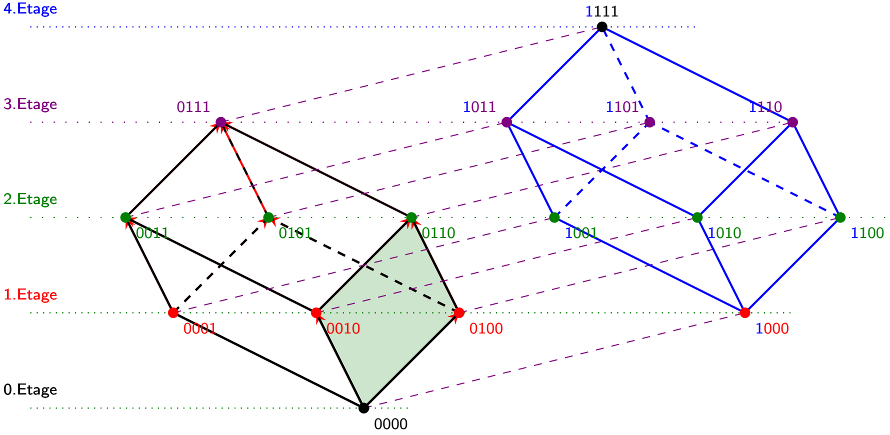


Regel 1: Punkt $(x, r(x)), x \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$, $r(x) = \#\ 1$ in Binärdarstellung

Regel 2: A und B sind verbunden, wenn $|\,x(A) - x(B)\,| = 2^k$ und $m_{AB} > 0$

Überblick

Hamming distance representation of $n-$cubes



$n = 1 -$ Kante
$n = 2 -$ Fläche
$n = 3 -$ Würfel

Pascal'sche Matrix

Betrachte P^2 der Pascalschen Matrix P in der unteren Diagonalform:

$$P \times P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix $C = P^2$ ergibt zeilenweise Ecken, Kanten, Flächen, Würfel, etc.

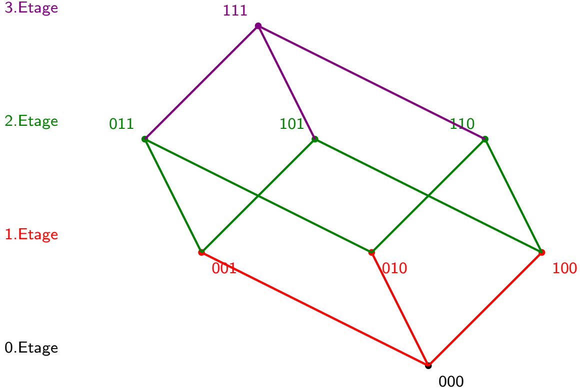
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 12 & 6 & 1 & 0 \\ 16 & 32 & 24 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Überblick

Wie sieht man 12 Kanten im 3-d Würfel?

Kanten von der 1. Etage: $3 \cdot 1 = 3$
Kanten von der 2. Etage: $3 \cdot 2 = 6$
Kanten von der 3. Etage: $1 \cdot 3 = 3$

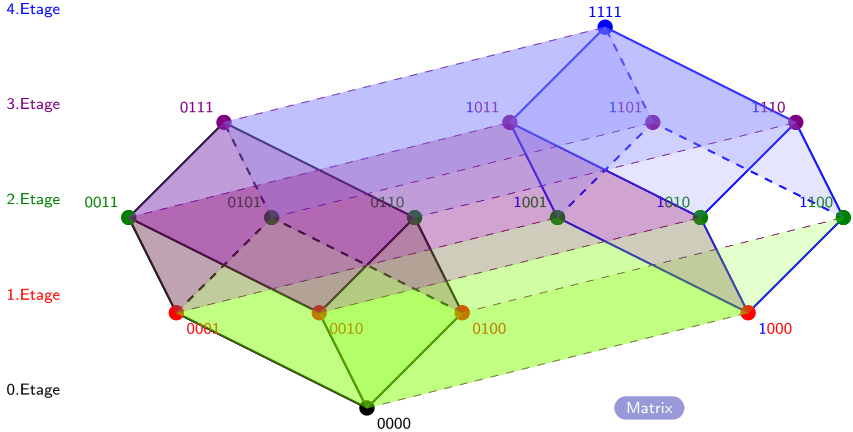
Insgesamt: $1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 12$ Kanten



Matrix

Wie sieht man 24 Flächen im Hyperwürfel?

Flächen von der 4. Etage



Insgesamt: $1 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 1 \cdot 6 = 24$ Flächen

$k-$Würfel in einem $n-$Würfel

$n-$Würfel hat $n+1$ Etagen – $0, 1, 2, \ldots, n$.
Die m-te Etage enthält Punkte mit genau m Einser. Wir zählen $k-$Würfel.

- Wähle die Etage m, in der die obere Ecke liegen soll: $0 \leq m \leq n$.
- Wähle die *obere Grenze* in dieser Etage m: $\binom{n}{m}$
  Dies ist gleich zur Wahl von m Einser aus n verfügbaren Plätzen.
- Wähle die *untere Grenze* in der Etage $m-k$: $\binom{m}{k}$
  Dies ist gleich zur Wahl von k Einser, die zu Nullen werden.

Daraus ergibt sich die folgende Formel für die Anzahl der $k-$Würfel in einem $n-$Würfel:

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \cdot \binom{m}{k}$$

Dies entspricht genau dem Produkt aus der n-ten Zeile und der k-ten Spalte der Pascalschen Matrix.

Besonderer Fall: $k=0 \iff \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \cdot \binom{m}{0}$. Die Summe der Binomialkoeffizienten ist 2^n.

Hyperwürfel und Mengenlehre

Wie viele Teilmengen hat eine Menge A mit n Elementen $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$? Wir betrachten den Fall $n = 4$ mit $A = \{a, b, c, d\}$

- Jede Teilmenge wird kodiert durch eine Liste mit 4 Positionen
- Gehört ein Element der Teilmenge schreiben wir eine 1, sonst eine 0.
- Beispiele: $\emptyset \leftrightarrow (0, 0, 0, 0)$; $\{a, c\} \leftrightarrow (1, 0, 1, 0)$; $A \leftrightarrow (1, 1, 1, 1)$;
- Die Anzahl 1 in der Liste entspricht der Anzahl Elementen in der Teilmenge
- Jede Ecke eines Hyperwürfels entspricht genau einer Teilmenge von A
- Insgesamt gibt es also in diesem Beispiel $2^4 = 16$ Teilmengen.
- Allgemein?

Kombinatorik – Beschreibung in Koordinaten

Wir beschreiben verschiedene Elemente eines Hyperwürfel in einem Koordinatensystem

- Ecken (Dim 0): $e(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \{0, 1\} \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$
- Kanten (Dim 1): $\exists j : x_j \in [0, 1]$ und $\forall i \neq j \quad x_i \in \{0, 1\}$.
- Flächen (Dim 2): $\exists j_1 \neq j_2 : x_{j_1}, x_{j_2} \in [0, 1]$ und $\forall i \notin \{j_1, j_2\} \quad x_i \in \{0, 1\}$.
- Insgesamt gibt es $E_n = W_{0,n} = 2^n$ Ecken.
- Insgesamt gibt es $K_n = W_{1,n} = n \cdot 2^{n-1}$ Kanten.
- Insgesamt gibt es $F_n = W_{2,n} = \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot 2^{n-2}$ Flächen.
- Allgemein gibt diese Formel die Anzahl der $k-$Würfel in einem $n-$Würfel

$$W_{k,n} = \binom{n}{k} \cdot 2^{n-k}$$