



Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Mentorierte Arbeit in Fachwissenschaftlicher Vertiefung
mit pädagogischem Fokus in Mathematik

Einführung in die Perkolationstheorie

Vanessa Piccolo

Inhalt

Ziel dieser Arbeit ist, die Perkolationstheorie einzuführen. Nach einem Motivationsteil wird das Modell der Kantenperkolation formal definiert. Danach wird die Aufmerksamkeit auf die Perkolation in \mathbb{Z} und \mathbb{Z}^2 gerichtet und wichtige Ergebnisse werden erläutert.

Zielpublikum

Lehrpersonen

Voraussetzungen

Grundkenntnisse der Wahrscheinlichkeitstheorie

Form

Lesetext mit vorgelösten Aufgaben

Betreuung

M. Akveld

Datum

1. Februar 2020

Vorwort

In dieser mentorierten Arbeit wird die Perkolationstheorie eingeführt, die ihren Ursprung ungefähr in den fünfziger Jahren hat. Perkolationsmodelle haben vielfältige Anwendungen: sie stellen in vielen Bereichen der Naturwissenschaften und darüber hinaus ein grundlegendes Werkzeug für die Untersuchung stochastischer räumlicher Vorgänge dar. Anhand der Perkolation können physikalische Phänomene wie die Ausbreitung von Flüssigkeiten in porösem Gestein, die elektrische Stromleitung, die Ausbreitung von Epidemien und Waldbränden oder sogar die Kaffeezubereitung beschrieben werden.

Es handelt sich um eine Theorie der Stochastik, die durch ihre vielen realitätsnahen Beispielen sehr fesselnd sein kann. Ausserdem können einige Resultate mit den Grundkenntnissen der Wahrscheinlichkeitstheorie abgeleitet werden. Diese Arbeit richtet sich vor allem an Lehrpersonen als Vertiefung in der Wahrscheinlichkeitstheorie, kann aber auch an mathematisch interessierte Lernende - z.B. für eine Maturaarbeit - gerichtet werden.

Die vorliegende mentorierte Arbeit ist wie folgt strukturiert: im ersten Kapitel werden vier anschauliche Beispiele des Perkolationsmodells erläutert. Kapitel 2 richtet den Fokus auf die Geschichte hinter der Theorie. Im dritten Kapitel wird das Modell der Kantenperkolation formal definiert. Insbesondere werden die Perkolationskonfiguration, der Perkolationsraum und die kritische Wahrscheinlichkeit beschrieben. Danach wird in den Kapiteln 4 und 5 die Perkolation in \mathbb{Z} bzw. \mathbb{Z}^2 behandelt. Auch wenn das Resultat für den eindimensionalen Fall keine grösseren Schwierigkeiten mit sich bringt, lässt sich dieses nicht genau gleich auf den zweidimensionalen Fall erweitern. Im Kapitel 5 werden wichtige Ergebnisse vorgestellt und zusätzlich einige Schlussfolgerungen auch für den mehrdimensionalen Fall \mathbb{Z}^d , $d \geq 3$, gezogen. Jedes Kapitel enthält spezifische Aufgaben für den Leser, deren Lösungen am Ende des Lesetexts - im Kapitel 6 - zu finden sind. Schliesslich erklärt Kapitel 7, wie die Perkolationstheorie im Mathematikunterricht eingesetzt werden kann.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	i
1 Motivation	1
1.1 Poröser Stein in mit Wasser gefülltem Gefäß	1
1.2 Ausbreitung von Epidemien und Waldbränden	2
1.3 Elektrischer Strom	3
1.4 Kaffeezubereitung	4
2 Historischer Hintergrund zur Perkolationstheorie	5
3 Das Modell der Kantenperkolation	7
3.1 Formale Definition der Kantenperkolation	8
3.1.1 Terminologie über Graphen	8
3.1.2 Perkulationskonfiguration	9
3.1.3 Perkulationsraum	10
3.2 Phasenübergang	10
4 Perkolation in \mathbb{Z}	13
5 Perkolation in \mathbb{Z}^2	15
5.1 Duale Gitter	15
5.2 Existenz eines nichttrivialen kritischen Wertes	17
5.3 Existenz eines unendlichen Clusters	22
6 Lösungen der Aufgaben	23
7 Einsatz für den Unterricht	27
A Sätze aus der Wahrscheinlichkeitstheorie	28
Literaturverzeichnis	32
Eigenständigkeitserklärung	32

Kapitel 1

Motivation

Was ist Perkolation? Diese Frage steht im Mittelpunkt dieses ersten Kapitels und wird durch die Erläuterung einiger Beispiele beantwortet. Mit der Perkolationstheorie können Phänomene wie das Leiten von elektrischem Strom, die Ausbreitung von Epidemien und Waldbränden, die Zubereitung von Kaffee beschrieben werden. In der Geologie beschreibt die Perkolation einfache Modelle zur Ausbreitung von Flüssigkeiten in porösem Gestein, die als anschauliche Beispiele der unten beschriebenen Clusterbildung dienen.

1.1 Poröser Stein in mit Wasser gefülltem Gefäss

Man betrachtet einen porösen Stein in einem mit Wasser gefüllten Gefäss und man kann sich fragen, ob das Wasser bis in das Innere des Steins durchdringen kann. Mit dem Perkulationsmodell wird der Stein als ein grosser, aber endlicher Teilgraph des quadratischen Gitters \mathbb{L}^2 modelliert. Die Kanten stellen die einzelnen Risse des Steins dar und sie werden wie folgt bezeichnet: eine Kante ist *offen* mit Wahrscheinlichkeit p , wobei $p \in [0, 1]$, und *geschlossen* mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$. Also entspricht die Wahrscheinlichkeit p dem Verhältnis zwischen den Rissen, die breit genug sind, damit Wasser durch sie hindurchfliessen kann, und den Gesamtrissen.

Zurück zum anfänglichen Problem: ein Knoten x im Inneren des Steins ist nass genau dann, wenn es einen Pfad von x zu einem beliebigen Punkt auf der Oberfläche des Steins gibt, der nur aus offenen Kanten besteht. Entfernt man alle geschlossenen Kanten, erhält man einen Cluster: ein zufälliger Teilgraph von \mathbb{L}^2 , welcher nur aus offenen Kanten besteht.

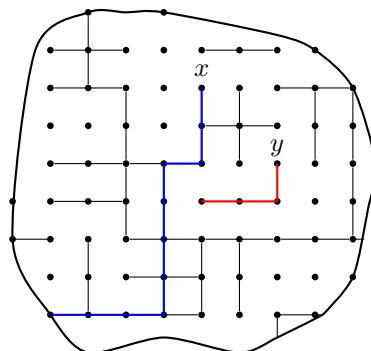


Abbildung 1.1: Eine Skizze der Struktur eines zweidimensionalen porösen Steins. Die Linien zeigen die offenen Kanten; geschlossene Kanten wurden entfernt. Beim Eintauchen des Steins in Wasser wird der Knoten x benetzt, während der Knoten y trocken bleibt.

Die Perkolationstheorie beschäftigt sich mit den geometrischen und stochastischen Eigenschaften dieser zufälligen Graphen und die Frage nach der Wahrscheinlichkeit unendlicher Cluster ist eine der zentralen Fragen der Perkolationstheorie. Insbesondere wird untersucht, wie die Grösse und Struktur des Clusters von dem Wahrscheinlichkeitswert p abhängen. Tatsächlich gilt, dass je kleiner der Wert p ist, desto weniger offene Kanten gibt es und sie sind zunehmend voneinander isoliert, während mit anwachsendem p auch die Grösse des Clusters zunimmt (es gibt mehr offene Kanten und damit steigt die Wahrscheinlichkeit, viele miteinander verbundene offene Pfade zu finden). Wie in der Abbildung 1.2 zu sehen ist, sind mit $p = 0.25$ alle Cluster eher klein, während mit $p = 0.75$ das Gitter \mathbb{L}^2 fast vollständig ausgefüllt ist.

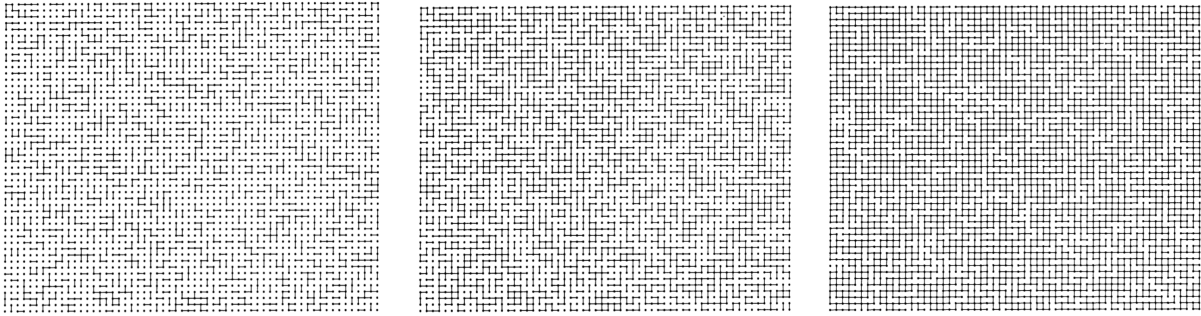


Abbildung 1.2: Simulationen mit $p = 0.25, 0.49$ und 0.75 . [2]

Bei kleinen Werten p sind alle Cluster endlich, aber nach einem bestimmten kritischen Wert p_c gibt es unendliche Cluster. Diese “makroskopische” Veränderung wird als *Phasenübergang* bezeichnet.

1.2 Ausbreitung von Epidemien und Waldbränden

In 1963 schlugen die Mathematiker H.L. Frisch und J.M. Hammersley den Einsatz der Perkolation bei der Modellierung der Ausbreitung von Infektionskrankheiten in einem grossen Obstgarten vor. Das Problem wird nachfolgend beschrieben. In einer grossen Obstplantage stehen hypothetische Bäume auf den Ecken eines quadratischen Gitters, wie die Abbildung 1.3 zeigt.

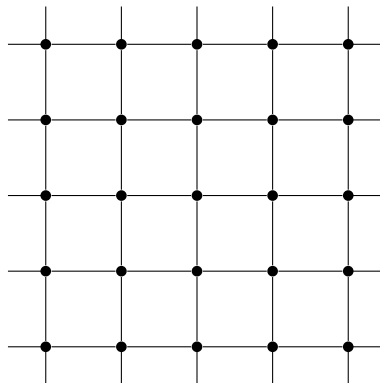


Abbildung 1.3: Die Obstplantage wird mit dem quadratischen Gitter \mathbb{L}^2 modelliert.

Es wird angenommen, dass ein Baum im Zentrum der Plantage von einer Baumkrankheit befallen ist. Diese kann sich auf benachbarte Bäume ausbreiten. Mit Wahrscheinlichkeit p wird ein gesunder Baum von einem benachbarten erkrankten Baum angesteckt, wobei p eine bekannte Funktion des Abstandes zwischen benachbarten Bäumen ist. Daher ist p umgekehrt abhängig vom Abstand zwischen zwei Bäumen: je weiter zwei Bäume entfernt sind, desto kleiner ist die

Wahrscheinlichkeit, dass die Baumkrankheit von einem Baum auf den anderen übergreift.

Um zu vermeiden, dass ein einzelner erkrankter Baum schliesslich einen erheblichen Teil der gesamten Plantage infiziert, ist es notwendig, den Abstand zwischen den Knoten so gross zu wählen, dass p kleiner als die kritische Wahrscheinlichkeit p_c der Perkolations in \mathbb{Z}^2 ist.

Dieses Modell der Perkolations kann auch für die Ausbreitung von Waldbränden verwendet werden. Man nimmt an, dass sich jeder Baum in einem von drei Zuständen befinden kann: er kann lebend und unverbrannt sein (1), er kann in Flammen stehen (0) oder er kann verbrannt sein (-1). Es wird angenommen, dass der Baum am Knoten x für eine Zeit T_x brennt, nachdem er sich entzündet hat, wobei $\{T_x | x \in \mathbb{Z}^2\}$ eine Familie von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen ist. Ein brennender Baum sendet Funken aus und jeder Funke kann zufällig einen der benachbarten Bäume treffen. Wenn zum Zeitpunkt 0 ein Brandstifter den Baum am Ursprung (d.h. an der Stelle $(0,0)$) in Brand setzt, dann kann die Menge C aller Bäume, die nach einer bestimmten Zeit verbrannt werden, als die Menge von Knoten dargestellt werden, die vom Ursprung durch offene Pfade eines bestimmten Perkolationsprozesses erreichbar sind. In der Abbildung 1.4 wird dargestellt, wie die Ausbreitung des Feuers in einem Wald vom Wert p abhängt.

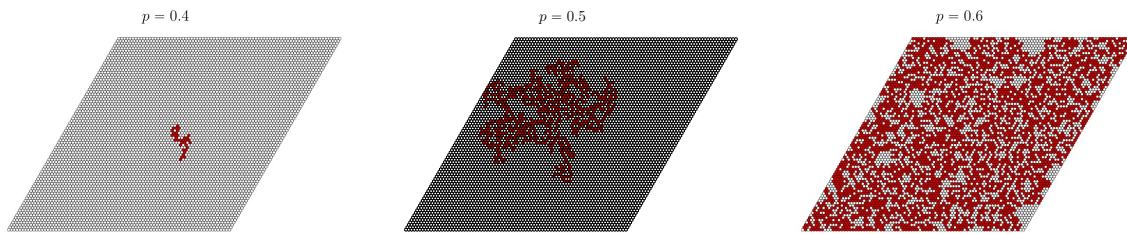


Abbildung 1.4: Ausbreitung eines Waldbrandes, wenn ein einzelner Sechseck in der Mitte in Brand gesetzt wird. In diesem Fall erfolgt der Perkolationsprozess auf Sechsecken. [7]

1.3 Elektrischer Strom

Gegeben sei eine würfelförmige Box mit isolierten Wänden. Zwei Elektroden werden auf zwei gegenüberliegenden Seiten hinzugefügt. Dann wird die Box mit kleinen Kugeln aus zwei verschiedenen Materialien völlig stochastisch gefüllt. Einige bestehen aus einem elektrisch leitfähigen Material (z.B. aus Kupfer), andere sind isolierend. Man bezeichnet mit p die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kugel leitfähig ist. Die zentrale Fragestellung ist nun, ob der elektrische Strom einer Elektrode die andere erreichen kann (d.h. ob ein Stromfluss zwischen den beiden Elektroden existiert) und wie der Wahrscheinlichkeitswert p dieses Phänomen beeinflusst.

Um einen Stromfluss zwischen den beiden Elektroden zu haben, muss ein Pfad von leitenden Kugeln zwischen den beiden gegenüberliegenden Seiten existieren. Daraus ergeben sich folgende physikalische Sachverhalte. Ist $p = 0$, gibt es nur isolierende Kugeln und somit fliesst kein Strom. Ist $p = 1$, gibt es nur leitende Kugeln und der Strom fliesst. Nimmt p von 0 auf 1 zu, muss zwingend ein *Phasenübergang* erfolgen, der von einem isolierenden Zustand in einen leitenden übergeht. Also existiert eine Perkolationschwelle $p_c \in (0,1)$, sodass die würfelförmige Box ein Isolator für $p < p_c$ und ein Leiter für $p > p_c$ ist.

1.4 Kaffeezubereitung

Auch die Zubereitung von Kaffee in einer Kaffeemaschine ist ein Phänomen der Perkolation. Tatsächlich leitet sich das Wort vom lateinischen Verb *percolare* (“durchsickern”) ab. Im Jahre 1817 wurde der Kaffee-Perkolator in Frankreich in Gebrauch genommen. Er stellte eine erste revolutionäre Stufe bei der Zubereitung des Getränks dar. Das heisse Wasser, das separat in einem anderen Behälter erhitzt wird, wird in die Kaffeekanne gegossen, um durch das Kaffeepulver zu filtern (zu *perkulieren*). Die Hitzequelle am Boden der Perkolator hat ausschliesslich die Funktion, den Kaffee warm zu halten. Ein Schema des Kaffee-Perkolators ist in der Abbildung 1.5 dargestellt.

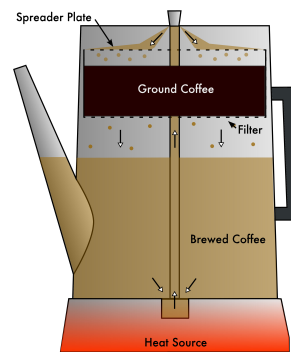


Abbildung 1.5: Schema eines Kaffee-Perkolators.¹

Das Wasser in der Kaffeemaschine muss durch eine Schicht komprimierten Kaffees fließen. Sei p eine Funktion, welche die Nicht-Festigkeit von Kaffee bezeichnet. Ist der Kaffee stark komprimiert, so ist der Weg durch den Kaffee sehr lang und deshalb fließt das Wasser nicht durch: deshalb wird kein Kaffee produziert. In diesem Fall gilt $p < p_c$. Andererseits, wenn $p > p_c$, ist der Kaffee weniger kompakt und das Wasser kann ihn durchfließen. Natürlich ist der beste Kaffee, wenn der Wert p knapp über dem kritischen Wert p_c liegt: der produzierte Kaffee ist dann so konzentriert wie möglich.

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Coffee_percolator. Website am 12. November 2019 aufgerufen.

Kapitel 2

Historischer Hintergrund zur Perkolationsstheorie

Historisch geht die Perkolationsstheorie auf P. J. Flory und W. H. Stockmayer zurück, die während des zweiten Weltkriegs beschrieben, wie aus kleinen, verzweigten Molekülen grössere Makromoleküle entstehen, wenn sich immer mehr chemische Bindungen zwischen den ursprünglichen Molekülen bilden. Dieser Prozess der Polymerisierung kann zur Ausbildung einer Vernetzung von chemischen Bindungen führen, die das gesamte System umfasst. Die ursprünglichen Moleküle entsprechen in diesem Fall unseren Punkten, die Makromoleküle unseren Clustern und das Netz unserem perkolierenden Cluster.

Der Name “Perkolationsstheorie” leitet sich vom lateinischen Verb *percolare* mit der Bedeutung “durchdringen” oder auch “eindringen” ab. Der Begriff wurde erstmals 1956 in einer Publikation von Simon Broadbent und John Hammersley erwähnt und als stochastische Methode zur Modellierung des Durchflusses von Wasser durch ein poröses Medium eingeführt, wie es im Abschnitt 1.1 erläutert wurde. Es begann alles mit einem von Broadbent verfassten Kommentar zu dem von Hammersley und Morton 1954 veröffentlichten Paper über die Monte-Carlo-Methoden. Er schrieb:

“Another problem of excluded volume, that of the random maze, may be defined as follows: A square (in two dimensions) or cubic (in three) lattice consists of “cells” at the interstices joined by “paths” which are either open or closed, the probability that a randomly-chosen path is open being p . A “liquid” which cannot flow upwards or a “gas” which flows in all directions penetrates the open paths and fills a proportion $\lambda_r(p)$ of the cells at the r th level. The problem is to determine $\lambda_r(p)$ for a large lattice. Clearly it is a non-decreasing function of p and takes values 0 at $p = 0$ and 1 at $p = 1$. Its value in the two-dimension case is not greater than in three dimensions.

It appears likely from the solution of a simplified version of the problem that as $r \rightarrow \infty$, $\lambda_r(p)$ tends strictly monotonically to $\lambda_r(p)$, a unique and stable proportion of cells occupied, independent of the way the liquid or gas is introduced into the first level. No analytical solution for a general case seems to be known.

It is difficult to express this problem for a finite lattice in a form suitable for Monte Carlo work by an electronic computer. The capacity of computer is, however, insufficient for any but very small lattices. That is another example of the authors’ remark that pen and paper might be better than machine work. [...] [2, S. 1]

Hammersley erkannte das Potenzial des Broadbent Modells und ihre anschließende Zusammenarbeit führte 1954 zur Definition des Perkolationsmodells und zu weiteren Resultaten. Trotz

einiger Publikationen wurden bis in die achtziger Jahre nur wenige mathematische Ergebnisse erzielt. Erst gegen Ende der siebziger Jahre konnte sich die Perkolationstheorie von einem Teilgebiet der statistischen Mechanik zu einem eigenständigen Forschungsgebiet etablieren. 1982 veröffentlichte der amerikanische Mathematiker Harry Kesten sein Buch *Percolation Theory for Mathematicians* [5]. Er entwickelte mathematische Modelle und leitete darin wichtige Resultate ab. Zum Beispiel bewies er, dass die kritische Wahrscheinlichkeit der Kantenperkolation auf dem quadratischen Gitter \mathbb{L}^2 gleich $\frac{1}{2}$ ist, und entwickelte das “first passage percolation” als Modell für die Ausbreitung von Krankheiten. Kesten behauptete im Juli 1982:

“Quite apart from the fact that percolation theory had its origin in an honest applied problem (see Hammersley and Welsh (1980)), it is a source of fascinating problems of the best kind a mathematician can wish for: problems which are easy to state with a minimum of preparation, but whose solutions are (apparently) difficult and require new methods.” [10]

Zusätzlich erlaubten in diesen Jahren entwickelte schnellere und grössere Computer, komplexe Modelle der Perkolationstheorie numerisch intensiver zu untersuchen.



Abbildung 2.1: John Hammersley (links) und Harry Kesten (rechts) an der Oxford University in 1993. ²

1987 bewiesen Aizenman, Kesten und Newman ein wichtiges Theorem für die Perkolation auf dem d -dimensionalen Gitter \mathbb{L}^d : existiert auf \mathbb{Z}^d ein unendlicher Cluster, ist dies der einzige. In den folgenden Jahren, bis heute, wurde der d -dimensionale Fall vertieft untersucht. Von besonderem Interesse ist die Situation bei $p = p_c$. Insbesondere wird die Wahrscheinlichkeit eines unendlichen Clusters untersucht, wenn $p = p_c$ ist.

²https://en.wikipedia.org/wiki/John_Hammersley. Website am 12. November 2019 aufgerufen.

Kapitel 3

Das Modell der Kantenperkolation

Das von Hammersley und Broadbent beschriebene Perkolationsmodell (siehe Abschnitt 1.1) wird Kantenperkolation (auf Englisch *bond percolation*) genannt. Daneben gibt es auch eine andere Art von Perkolation bezüglich den Punkten, die Knotenperkolation (auf Englisch *site percolation*) genannt wird. In dieser mentorierten Arbeit wird das Modell der Kantenperkolation betrachtet. Ich halte es aber für angemessen, das andere Modell der Perkolation kurz zu beschreiben.

Die Knotenperkolation ist ein Perkolationsmodell auf einem regelmässigen Gitter $\mathbb{L} = \mathbb{L}^d$ im d -dimensionalen Raum. Es lässt sich im quadratischen Gitter wie folgt konstruieren. Jedes Feld wird mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit besetzt, wobei die Besetzung eines Feldes unabhängig von der Besetzung der anderen Felder ist. Anhand einer solchen Verteilung sind die besetzten und benachbarten Felder in derselben Gruppe eingeschlossen: diese Gruppe wird als *Cluster* bezeichnet. Je grösser die Wahrscheinlichkeit zur Besetzung eines Feldes ist, desto grösser sind die Cluster. Ist p die Wahrscheinlichkeit, dass ein Feld besetzt ist, so bilden sich mit der Zunahme des Wertes p grössere Cluster aus.

Die Knotenperkolation wird im Vergleich zur Kantenperkolation als allgemeiner angesehen, da jedes Kantenmodell als Knotenmodell auf einem anderen Gitter formuliert werden kann, aber nicht umgekehrt. Wie wir bereits gesehen haben, bestehen bei der Kantenperkolation von jedem Feld des Gitters vier Verbindungen zu den jeweils vier Nachbarfeldern. Die Verbindung zu einem Nachbarfeld ist offen mit Wahrscheinlichkeit p und geschlossen mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$. Ein Cluster ist dann definiert als die Gruppe von Feldern, die durch einen offenen Pfad verbunden sind. Die folgende Abbildung verdeutlicht den Unterschied zwischen den beiden Arten von Perkolationsmodellen.

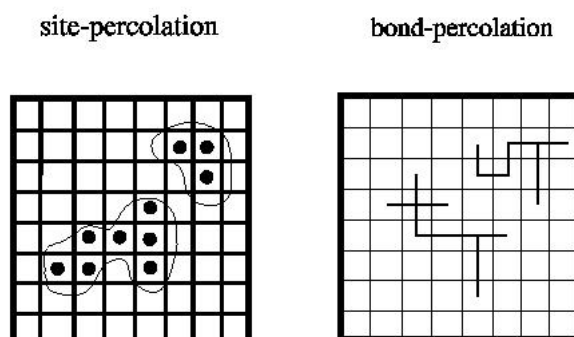


Abbildung 3.1: Das Modell der Knotenperkolation (links) und der Kantenperkolation (rechts).³

³<https://de.wikipedia.org/wiki/Perkolationsstheorie>. Website am 6. November 2019 aufgerufen.

3.1 Formale Definition der Kantenperkolation

Die Perkolations-theorie gehört der Wahrscheinlichkeitstheorie, daher ist es notwendig, ein präzises Wahrscheinlichkeitsmodell einzuführen. Im vorliegenden Abschnitt werden die notwendigen Begriffe eingeführt und der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P_p)$ wird formal definiert.

3.1.1 Terminologie über Graphen

Sei $\mathbb{Z}^d = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \mid \forall 1 \leq i \leq d, x_i \in \mathbb{Z}\}$.

Definition 3.1. Seien $x, y \in \mathbb{Z}^d$. Die **Distanz** von x nach y ist definiert durch

$$\delta(x, y) := \sum_{i=1}^d |x_i - y_i|.$$

Sie stellt den kürzesten Weg vom Knoten x zum Knoten y dar. Ist $\delta(x, y) = 1$, dann sind x und y adjazent und man schreibt $x \sim y$. Die Kante zwischen x und y wird mit $\langle x, y \rangle$ bezeichnet.

Definition 3.2. Man definiert das **d -dimensionale Gitter** $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$ als der Graph mit der Knotenmenge \mathbb{Z}^d und der Kantenmenge $\mathbb{E}^d := \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{Z}^d \text{ mit } x \sim y\}$.

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die Distanz δ eine Metrik auf \mathbb{L}^d definiert.

Erinnern Sie sich, dass für eine beliebige Menge X definiert die Abbildung $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Metrik auf X , falls für beliebige Elemente x, y und z von X die folgenden Axiome erfüllt sind:

1. $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$,
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Definition 3.3. Ein **Pfad** von einem Knoten x zu einem Knoten y der Länge n in \mathbb{L}^d ist eine Folge

$$\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$$

bestehend aus verschiedenen Knoten $\gamma_i \in \mathbb{Z}^d$, sodass $\gamma_0 = x$, $\gamma_n = y$ und für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, $\langle \gamma_{i-1}, \gamma_i \rangle \in \mathbb{E}^d$.

Ein **Kreis** der Länge n in \mathbb{L}^d ist ein Pfad $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1})$ mit der Kante $\langle \gamma_{n-1}, \gamma_0 \rangle \in \mathbb{E}^d$.

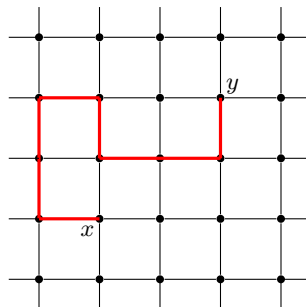


Abbildung 3.2: Ein Pfad vom Knoten x zum Knoten y der Länge 8 im quadratischen Gitter \mathbb{L}^2 .

3.1.2 Perkolationskonfiguration

Im Folgenden werden die Konfiguration der Kantenperkolation und der Cluster definiert.

Definition 3.4. Die **Konfiguration** der Kantenperkolation wird folgendermassen definiert:

$$\omega = (\omega(e) : e \in \mathbb{E}^d) \in \prod_{e \in \mathbb{E}^d} \{0, 1\}.$$

Definition 3.5. Sei $\omega \in \prod_{e \in \mathbb{E}^d} \{0, 1\}$. Dann heisst eine Kante $e \in \mathbb{E}^d$

- **offen**, falls $\omega(e) = 1$
- **geschlossen**, falls $\omega(e) = 0$.

Eine Kante ist offen bzw. geschlossen unabhängig vom Zustand aller anderen Kanten.

Bemerkung 3.6. Ein Pfad $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_n)$ heisst *offen*, falls alle Kanten $\langle \gamma_{i-1}, \gamma_i \rangle, 1 \leq i \leq n$, offen sind:

$$\omega(\langle \gamma_{i-1}, \gamma_i \rangle) = 1, \text{ für alle } 1 \leq i \leq n.$$

In diesem Fall schreibt man: $\gamma_0 \leftrightarrow \gamma_n$. Ähnlicherweise ist ein Kreis *offen*, wenn alle Kanten offen sind.

Mit diesen Definitionen können wir nun den Cluster definieren.

Definition 3.7. Sei $C(x)$ die Menge der Knoten, die mit $x \in \mathbb{Z}^d$ durch einen offenen Pfad verbunden sind:

$$C(x) = \{y \in \mathbb{Z}^d : x \leftrightarrow y\}.$$

Dann heisst $C(x)$ den **(offenen) Cluster** bei x . Man schreibt C für den (offenen) Cluster $C(0)$, wobei 0 der Ursprung des Gitters bezeichnet.

Bemerkung 3.8. Man bezeichnet mit $|C(x)|$ die Clustergrösse, d.h. die Anzahl aller Knoten, die durch einen offenen Pfad mit x verbunden sind.

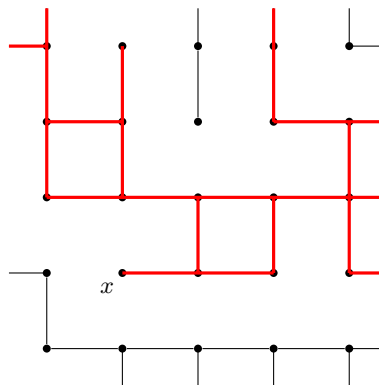


Abbildung 3.3: In rot werden die offenen Pfade bezeichnet, die mit dem Knoten x verbunden sind. Alle Knoten unterhalb der roten Linie gehören zum Cluster $C(x)$.

3.1.3 Perkolationsraum

Nachfolgend wird der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P_p)$ der Kantenperkolations bestimmt.

- Der Grundraum Ω ist der Produktraum

$$\Omega := \prod_{e \in \mathbb{E}^d} \Omega_e = \prod_{e \in \mathbb{E}^d} \{0, 1\}$$

und seine Elemente sind die Perkolationskonfigurationen $\omega = (\omega(e) : e \in \mathbb{E}^d)$.

- Die σ -Algebra \mathcal{F} ist die Produkt- σ -Algebra. Sie wird durch Ereignisse erzeugt, die von endlich vielen Kanten abhängen.

Formaler: sei $E \subset \mathbb{E}^d$ eine endliche Teilmenge von Kanten und sei $\omega \in \Omega$ eine Konfiguration. Wir definieren die Zylindermenge $Z_{\omega, E}$ wie folgt:

$$Z_{\omega, E} := \{\omega' \in \Omega : \omega'(e) = \omega(e) \text{ für jede Kante } e \in E\}.$$

Dann ist \mathcal{F} die σ -Algebra, die von allen Zylindermengen $Z_{\omega, E}$ erzeugt wird:

$$\mathcal{F} = \sigma(Z_{\omega, E} : \omega \in \Omega, E \subset \mathbb{E}^d \text{ mit } |E| < \infty).$$

- Sei $p \in [0, 1]$. Da Ω ein Produktraum ist, definiert man das Wahrscheinlichkeitsmass P_p als das Produktmass auf (Ω, \mathcal{F}) :

$$P_p := \prod_{e \in \mathbb{E}^d} \mu_e,$$

wobei die einzelnen Wahrscheinlichkeitsmasse μ_e , $e \in \mathbb{E}^d$, die Bernoulli-Masse auf $\{0, 1\}$ sind, d.h.

$$\mu_e(\omega(e)) = \begin{cases} p, & \text{falls } \omega(e) = 1, \\ 1 - p, & \text{falls } \omega(e) = 0. \end{cases}$$

Bemerkung 3.9. Das Wahrscheinlichkeitsmass P_p ist charakterisiert durch Folgendes:

$\forall e_1, \dots, e_k \in \mathbb{E}^d, \forall \omega_1, \dots, \omega_k \in \{0, 1\}$ gilt

$$P_p(\omega(e_1) = \omega_1, \dots, \omega(e_k) = \omega_k) = p^{\sum_{i=1}^k \omega_i} \cdot (1 - p)^{\sum_{i=1}^k (1 - \omega_i)},$$

wobei die Summe $\sum_{i=1}^k \omega_i$ (bzw. $\sum_{i=1}^k (1 - \omega_i)$) die Anzahl offener (bzw. geschlossener) Kanten ist.

Bemerkung 3.10. Je eine Kante $e \in \mathbb{E}^d$ ist *offen* mit Wahrscheinlichkeit p und *geschlossen* mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$.

3.2 Phasenübergang

Es ist nun notwendig, ein sehr wichtiges Konzept für die Perkolations einzuführen: die kritische Wahrscheinlichkeit und somit der Phasenübergang. Wir haben schon im ersten Kapitel durch verschiedene Beispiele bemerkt, dass es nach einem bestimmten Wahrscheinlichkeitswert einen unendlichen Pfad von offenen Kanten gibt. Daher muss ein kritischer Wert p_c existieren, sodass für $p < p_c$ nur endliche offene Pfade existieren, während es für $p > p_c$ - mit Wahrscheinlichkeit

1 - einen unendlich offenen Pfad gibt. Die Veränderung der qualitativen Eigenschaften eines Systems, wenn ein kritischer Wert überschritten wird, wird als **Phasenübergang** bezeichnet.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein gegebener Knoten zu einem unendlichen Cluster gehört, wird *Perkolationswahrscheinlichkeit* genannt und wie folgt definiert.

Definition 3.11. Die **Perkolationswahrscheinlichkeit** ist

$$\theta(p) := P_p(|C| = \infty).$$

Es ist leicht zu erkennen, dass $|C| = \infty$ genau dann, wenn eine unendliche Folge $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots)$ von unterschiedlichen Knoten existiert, sodass $\gamma_0 = 0$, $\gamma_i \sim \gamma_{i+1}$ und $\langle \gamma_i, \gamma_{i+1} \rangle$ offen für alle i ist. Zusätzlich gilt, dass $\theta(0) = 0$ und $\theta(1) = 1$.

Aufgabe 2. *Beweisen Sie, dass*

$$\theta(0) = 0 \text{ und } \theta(1) = 1.$$

Definition 3.12. Die **kritische Wahrscheinlichkeit** oder die **Perkolationschwelle** $p_c = p_c(d)$ wird folgendermassen definiert:

$$p_c(d) := \sup\{p: \theta(p) = 0\},$$

wobei $d \geq 1$ die Dimension des Gitters ist.

Wie es schon im Abschnitt 1.1 erwähnt wurde, falls der Wert $p_c(d)$ überschritten wird, dann existiert ein Knoten $x \in \mathbb{Z}^d$, sodass $|C(x)| = \infty$ ist. Umgekehrt existieren keine Cluster unendlicher Grösse falls $p < p_c(d)$. Somit ist

$$\theta(p) \begin{cases} = 0 & \text{wenn } p < p_c(d), \\ > 0 & \text{wenn } p > p_c(d). \end{cases}$$

Das folgende Schema veranschaulicht diesen Phasenübergang:



Aufgabe 3. *Betrachten Sie das Perkolationsmodell auf dem d -dimensionalen Gitter \mathbb{L}^d . Beweisen Sie, dass*

$$p_c(d+1) \leq p_c(d) \quad \text{für alle } d \in \mathbb{N}.$$

Definition 3.13. Wir definieren die **Perkolationsfunktion** θ als

$$\begin{aligned} \theta: [0, 1] &\rightarrow [0, 1] \\ p &\mapsto \theta(p). \end{aligned}$$

Wir wissen schon, dass

- $\theta(p) = 0$ wenn $p < p_c(d)$,
- $\theta(p) > 0$ wenn $p > p_c(d)$

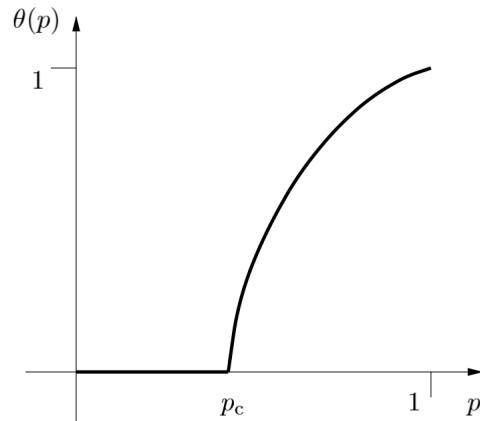


Abbildung 3.4: Skizze der Perkolationsfunktion θ . [2, S. 13]

- $\theta(0) = 0$ und $\theta(1) = 1$ (siehe Aufgabe 2).

Ausserdem ist θ eine nicht-abnehmende Funktion (siehe Aufgabe 4). Man kann auch zeigen, dass die Funktion θ rechtsseitig stetig ist [7, S.10]. Anhand dieser Informationen kann man die Perkolationsfunktion skizzieren (Abbildung 3.4).

Aufgabe 4. Erklären Sie, weshalb die Perkolationsfunktion $\theta(p)$ eine nicht-abnehmende Funktion bezüglich p ist. Sie können sogar versuchen, es formal zu beweisen (schwierig).

Kapitel 4

Perkolation in \mathbb{Z}

Man betrachtet das eindimensionale Gitter $\mathbb{L} = (\mathbb{Z}, \mathbb{E})$:



In einer Dimension kann man leicht erkennen, dass wenn $p < 1$ ist, dann gibt es - mit Wahrscheinlichkeit 1 - unendlich viele geschlossene Kanten in \mathbb{L} . In diesem Fall ist also $\theta(p) = 0$. Der kritische Wahrscheinlichkeitswert $p_c(1)$ ist daher 1, denn mit $p = 1$ sind alle Kanten offen. Dieses Resultat wird im Folgenden bewiesen.

Satz 4.1. Die kritische Wahrscheinlichkeit $p_c(1)$ für das eindimensionale Gitter \mathbb{L} ist

$$p_c(1) = 1.$$

Beweis. Man definiert das Ereignis A_k durch

$$A_k = \{\text{alle Kanten zwischen den Knoten } 2^k \text{ und } 2^{k+1} \text{ und zwischen } -2^{k+1} \text{ und } -2^k \text{ sind offen}\}.$$

Man zeigt per Induktion, dass es 2^k Kanten zwischen den Knoten 2^k und 2^{k+1} gibt.

Für $k = 0$ gilt:

$$2^{k+1} - 2^k = 2^1 - 2^0 = 1 = 2^0.$$

Man nimmt an, dass falls $k \geq 1$ ist, dann existieren 2^k Kanten.

Betrachte nun $k + 1$, dann ist die Anzahl der Kanten zwischen den Knoten 2^{k+1} und 2^{k+2} :

$$2^{k+2} - 2^{k+1} = 2 \cdot (2^{k+1} - 2^k) \stackrel{I.A.}{=} 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}.$$

Da $\{\text{alle Kanten zwischen den Knoten } 2^k \text{ und } 2^{k+1} \text{ sind offen}\}$ und $\{\text{alle Kanten zwischen den Knoten } -2^{k+1} \text{ und } -2^k \text{ sind offen}\}$ unabhängige Ereignisse sind und der Durchschnitt von beiden dem Ereignis A_k entspricht, kann die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A_k wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} P_p(A_k) &= P_p(\{\text{alle Kanten zwischen den Knoten } 2^k \text{ und } 2^{k+1} \text{ sind offen}\}) \cdot P_p(\{\text{alle Kanten zwischen den Knoten } -2^{k+1} \text{ und } -2^k \text{ sind offen}\}) \\ &= \overbrace{(p \cdot p \cdot p \cdots p)}^{2^k \text{ Male}} \cdot \overbrace{(p \cdot p \cdot p \cdots p)}^{2^k \text{ Male}} \\ &= p^{2^k} \cdot p^{2^k} \\ &= p^{2^{k+1}}. \end{aligned}$$

Man erhält einen unendlichen Cluster, wenn das Ereignis A_k für unendlich viele k gilt, d.h. wenn

$$E := \lim_{k \rightarrow +\infty} \sup A_k$$

eintritt. Also folgt

$$\theta(p) = P_p(|C| = \infty) = P_p(E).$$

Betrachte die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_p(A_k) = \sum_{k=0}^{\infty} p^{2^{k+1}}.$$

Ist $p < 1$, so konvergiert die Reihe. Aus dem Lemma von Borel-Cantelli (Lemma A.3 im Anhang) folgt, dass $P_p(E) = 0$ für $p < 1$ ist. Dies bedeutet, dass es mindestens ein k gibt, sodass das Ereignis A_k nicht eintritt. Also ist für $p < 1$ die Wahrscheinlichkeit, einen unendlichen Cluster zu haben, gleich Null. Natürlich, wenn $p = 1$, sind alle Kanten offen und damit $\theta(p) = 1$. Also ist

$$p_c(1) = \sup\{p : \theta(p) = 0\} = 1.$$

□

Kapitel 5

Perkolation in \mathbb{Z}^2

5.1 Duale Gitter

Im vorliegenden Abschnitt wird das duale Gitter behandelt. Im Allgemeinen können duale Gitter behilflich sein, den kritischen Wert zu bestimmen oder um Aussagen über die Grösse eines Clusters zu treffen. Zunächst wird erläutert, was ein duales Gitter ist.

Man betrachtet das quadratische Gitter \mathbb{L}^2 . In der Mitte jedes Feldes wird ein Gitterpunkt (weisser Kreis in der Abbildung 5.1) des dualen Gitters gesetzt.

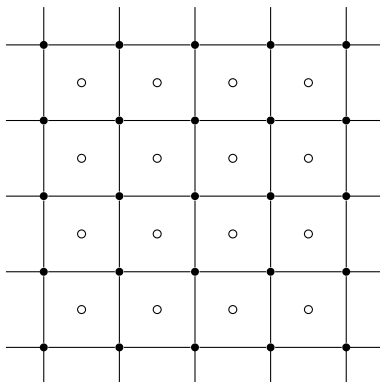


Abbildung 5.1: Erster Schritt der Konstruktion des dualen Gitters: in weisser Farbe sind die Gitterpunkte des dualen Gitters dargestellt.

Zwei duale Gitterpunkte werden mit einer dualen Kante verbunden, wenn der Abstand zwischen beiden 1 ist. Also schneidet jede Kante eines Gitters eine duale Kante. Die Abbildung 5.2 zeigt das zweidimensionale duale Gitter $(\mathbb{L}^2)^*$. Anhand der Abbildung 5.2 merkt man, dass das duale Gitter $(\mathbb{L}^2)^*$ genau dem ursprünglichen Gitter \mathbb{L}^2 mit einer Translation durch den Vektor $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ entspricht. Also ist $(\mathbb{L}^2)^*$ isomorph zu \mathbb{L}^2 selbst.

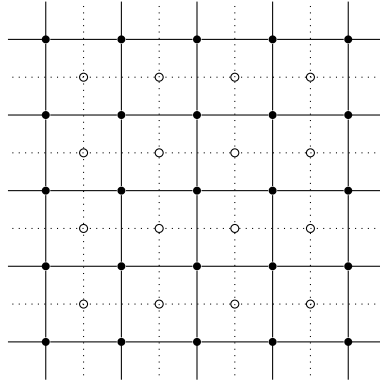
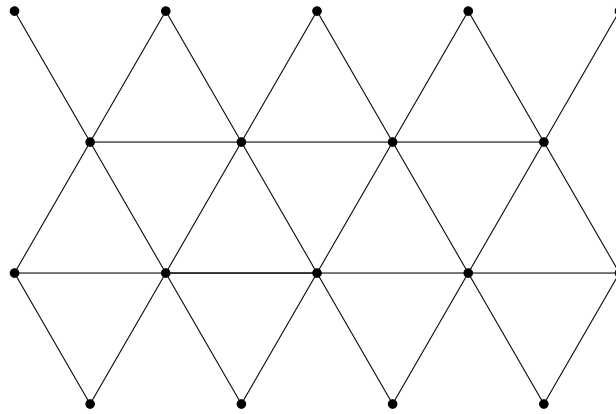


Abbildung 5.2: Zweiter Schritt der Konstruktion des dualen Gitters: die adjazenten Gitterpunkte des dualen Gitters werden verbunden.

Aufgabe 5. Betrachten Sie ein trianguläres Gitter. Was ist das dazu duale Gitter?



Sei nun L ein zweidimensionales Gitter und \mathcal{L} das dazu duale Gitter. Man kann die folgende Identität zeigen [2, S.4]:

$$p_c(L) + p_c(\mathcal{L}) = 1.$$

Wie oben erwähnt, ist das duale quadratische Gitter $(\mathbb{L}^2)^*$ eine Translation von \mathbb{L}^2 . Somit ist \mathbb{L}^2 selbstdual und die Wahrscheinlichkeit eines unendlichen Clusters ist gleich für beide. Also sind die kritischen Wahrscheinlichkeiten gleich:

$$p_c(\mathbb{L}^2) = p_c((\mathbb{L}^2)^*).$$

Daher erhält man

$$p_c(\mathbb{L}^2) = \frac{1}{2}.$$

Wie man in der Abbildung 5.2 sehen kann, schneidet jede Kante des dualen Gitters \mathcal{L} eine Kante aus L . Eine Kante des dualen Gitters wird als *offen* deklariert, wenn sie eine offene Kante des ursprünglichen Gitters schneidet, und als *geschlossen*, wenn sie eine geschlossene Kante schneidet. Abbildung 5.3 illustriert diese Definition anhand des quadratischen Gitters \mathbb{L}^2 .

Man beobachtet Folgendes: sind die Kanten von L offen mit Wahrscheinlichkeit p , sind die Kanten von \mathcal{L} offen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit p .

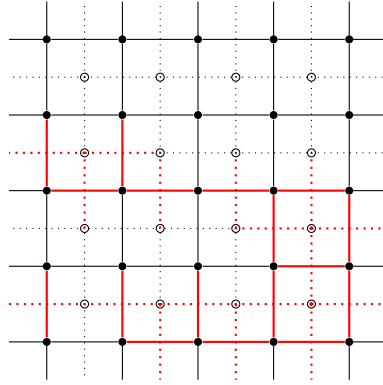


Abbildung 5.3: Eine Kante von \mathcal{L} ist offen (rot und gepunktet), wenn sie eine offene Kante von L (rot) schneidet, sonst ist sie geschlossen.

Aufgabe 6. Zeigen Sie die folgende Äquivalenz:

$$p > p_c(L) \iff 1 - p < p_c(\mathcal{L}).$$

Erklären Sie mit Ihren eigenen Worten die Bedeutung dieser Äquivalenz.

5.2 Existenz eines nichttrivialen kritischen Wertes

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass für p klein (aber positiv) $\theta(p) = 0$ und für p gross (aber weniger als 1) $\theta(p) > 0$ gilt. Wie schon im Abschnitt 3.1.4 erwähnt wurde, implizieren beide Resultate die Existenz eines kritischen Wertes p_c , bei dem die Funktion $\theta(p)$ einen strikt positiven Wert annimmt.

Bevor diese Ergebnisse bewiesen werden, wird der notwendige Begriff des *selbstmeidenden Pfades* eingeführt.

Definition 5.1. Sei $\mathbb{L}^d \subset \mathbb{R}^d$ ein Gitter im d -dimensionalen Raum. Ein **selbstmeidender Pfad** auf \mathbb{L}^d ist ein Pfad, der jeden Gitterpunkt höchstens einmal besucht.

Ein Beispiel eines selbstmeidenden Pfades ist in der Abbildung 5.4 dargestellt.

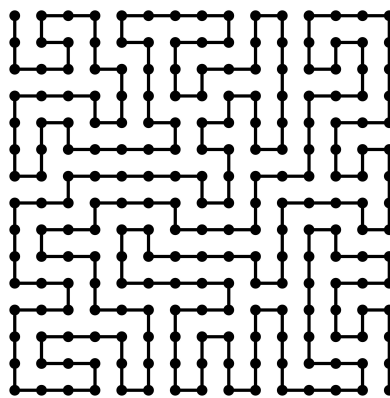
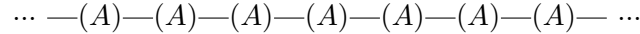


Abbildung 5.4: Dieser Pfad kehrt nie zu einem bereits besuchten Punkt zurück.⁴

⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Self-avoiding_walk. Website am 12. November 2019 aufgerufen.

Bemerkung 5.2. Im chemischen Prozess der Polymerisierung bilden sich aus einer grossen Anzahl einzelner Molekülen (Monomeren) langkettige Makromoleküle unter Aufspaltung chemischer Bindungen. Sie heissen *Polymere*. Modelle für die Anordnung dieser Molekülketten sind die selbstmeidenden Pfade, die erst in der Chemie vom Chemiker und Nobelpreisträger Paul Flory eingeführt wurden.

Jedes Monomer besitzt seine eigene Funktionalität: diese entspricht der Anzahl der verfügbaren chemischen Bindungen, die ein Monomer aufweist, d.h. die Anzahl der anderen Monomeren, mit denen es binden muss. Wenn jedes Monomer die Funktionalität zwei besitzt, dann wird ein lineares Polymer gebildet. Bezeichnet man ein Monomer durch (A) , dann wird ein lineares Polymer schematisch wie folgt dargestellt.



Zum Beispiel ist das Polyethylen ein lineares Polymer, wobei jedes Monomer CH_2 (ein Kohlenstoffatom und zwei Wasserstoffatome) ist. Das Modell endet durch Bindung mit einem Monomer der Funktionalität eins, wie zum Beispiel CH_3 , an jedem Endpunkt. Es sei darauf hingewiesen, dass das eindimensionale Gitter \mathbb{L} ein Modell für das lineare Polymer ist. Ähnlicherweise, wenn ein Polymer Monomere mit einer höheren Funktionalität beinhaltet, wird dann ein verzweigtes Polymer gebildet: diese werden oft mit anderen Gittern modelliert.

Aufgabe 7. Sei $\sigma(n)$ die Anzahl der im Ursprung startenden selbstmeidenden Pfade der Länge n .

(a) Zeigen Sie zuerst, dass

$$d^{n+1} \leq \sigma(n+1) \leq (2d-1)\sigma(n), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

und folgt daraus, dass

$$d^n \leq \sigma(n) \leq (2d-1)^{n-1}2d, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(b) Unter allen im Ursprung beginnenden Pfaden der Länge n einer Zufallsirrfahrt auf \mathbb{L}^d wird ein Pfad rein zufällig ausgewählt. Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit ab, dass er selbstmeidend ist.

Das unterstehende Resultat wird nun gemäss [2, S. 15-19] und [7, S. 5] bewiesen.

Satz 5.3. Wenn $p < \frac{1}{3}$ ist, dann gilt $\theta(p) = 0$. Also ist $p_c(2) \geq \frac{1}{3}$.

Beweis. Sei F_n das folgende Ereignis:

$$F_n = \{\text{es gibt mindestens einen selbstmeidenden offenen Pfad des Ursprungs } O = (0,0) \text{ der Länge } n\}.$$

Man überlegt, dass ein unendlicher Cluster des Ursprungs offene selbstmeidende Pfade jeder beliebigen Länge enthält. Somit gilt:

$$\{|C| = \infty\} \subseteq F_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (5.1)$$

Sei $\sigma(n)$ die Anzahl der im Ursprung startenden selbstmeidenden Pfade der Länge n auf \mathbb{L}^2 und sei $N(n)$ die Anzahl solcher Pfade, die offen sind. Es folgt: $F_n = \{N(n) \geq 1\}$.

Es gilt Folgendes: für jeden im Ursprung beginnenden selbstmeidenden Pfad der Länge n auf \mathbb{L}^2

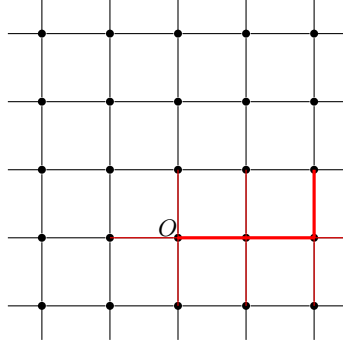


Abbildung 5.5: Ausgehend vom Ursprung O haben wir vier Möglichkeiten für die erste Strecke. Für alle anderen Knoten gibt es höchstens 3 Möglichkeiten, denn ein selbstmeidender Pfad kehrt nie zu einem bereits besuchten Punkt zurück.

(unabhängig davon, ob die Kanten offen oder geschlossen sind) nimmt die Wahrscheinlichkeit, dass jede Kante dieses Pfades offen ist, den Wert p^n . Also ist

$$E_p[N(n)] = \sigma(n) \cdot p^n.$$

Die Anzahl $\sigma(n)$ der im Ursprung startenden selbstmeidenden Pfade der Länge n ist höchstens $4 \cdot 3^{n-1}$, da es 4 Optionen für den ersten Schritt und höchstens 3 Optionen für jeden weiteren Schritt gibt, wie im folgenden Bild gezeigt wird.

Somit ist

$$\sigma(n) \leq 4 \cdot 3^{n-1}$$

und

$$E_p[N(n)] \leq 4 \cdot 3^{n-1} \cdot p^n.$$

Aus der Markov-Ungleichung (Satz A.5 und Bemerkung A.6 im Anhang) erhalten wir für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$P_p(F_n) = P_p(N(n) \geq 1) \stackrel{M-U}{\leq} E_p[N(n)] \leq 4 \cdot 3^{n-1} \cdot p^n.$$

Da $p < \frac{1}{3}$ ist, gilt:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 4 \cdot 3^{n-1} \cdot p^n = 0.$$

Aus (5.1) folgt es daher:

$$\theta(p) = P_p(|C| = \infty) \leq P_p(F_n) \leq 4 \cdot 3^{n-1} \cdot p^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

So schliesst man, dass $\theta(p) = 0$ für $p < 1/3$ ist. □

Nun wird die zweite Aussage gezeigt: wenn die Wahrscheinlichkeit p grösser als $\frac{2}{3}$ ist, dann ist die Perkulationswahrscheinlichkeit $\theta(p)$ positiv. Folglich ist die kritische Wahrscheinlichkeit $p_c(2)$ kleiner als dieser Wert. Der folgende Beweis beruht auf [2, S. 15-19] und [7, S. 5-7].

Satz 5.4. Wenn $p > \frac{2}{3}$ ist, dann gilt $\theta(p) > 0$. Also ist $p_c(2) \leq \frac{2}{3}$.

Beweis. Wie es im Abschnitt 5.1 erläutert wurde, entspricht das duale quadratische Gitter $(\mathbb{L}^2)^*$ der Translation von \mathbb{L}^2 durch den Vektor $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Wir nehmen an, dass der Cluster des Ursprungs auf \mathbb{L}^2 endlich ist. Abbildung 5.6 zeigt eine Skizze dieser Situation. Der Ursprung ist von einem geschlossenen Kreis auf \mathbb{L}^2 umgeben und die entsprechenden Kanten des dualen Gitters einen geschlossenen Kreis in $(\mathbb{L}^2)^*$ bilden, der den Ursprung von \mathbb{L}^2 in seinem Inneren enthält. Das Gegenteil gilt in ähnlicher Weise: wenn sich der Ursprung im Inneren eines geschlossenen Kreises

des dualen Gitters befindet, dann ist der offene Cluster des Ursprungs endlich.
Zusammenfassend:

$$|C| < \infty \iff \exists \text{ ein geschlossener Kreis in } (\mathbb{L}^2)^* \text{ um } O = (0, 0). \quad (5.2)$$

Diese Äquivalenz wird hier nicht bewiesen. Siehe [3, S. 386] für eine sorgfältigere Behandlung.

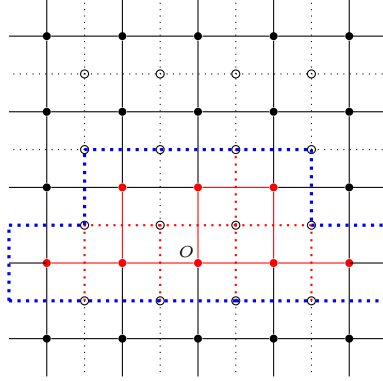


Abbildung 5.6: Ein geschlossener Kreis (blau und punktiert) des dualen Gitters umgibt den endlichen Cluster (rot) auf \mathbb{L}^2 , der den Ursprung O enthält.

Sei $G(n)$ die Anzahl der geschlossenen Kreise der Länge n in $(\mathbb{L}^2)^*$, die den Ursprung O von \mathbb{L}^2 in seinem Inneren enthalten. Aus (5.2) folgt:

$$P_p(|C| < \infty) = P_p\left(\bigcup_{n=4}^{\infty} \{G(n) \geq 1\}\right) \leq \sum_{n=4}^{\infty} P_p(G(n) \geq 1), \quad (5.3)$$

wobei wir die σ -Subadditivität von P_p benutzen haben (Satz A.2 im Anhang).

Sei $\rho(n)$ die Anzahl der Kreise der Länge n in $(\mathbb{L}^2)^*$, die den Ursprung O von \mathbb{L}^2 in seinem Inneren enthalten. Wir schätzen nun $\rho(n)$ wie folgt ab. Mithilfe der Abbildung 5.6 beobachtet man, dass jeder dieser Kreise mindestens einen Knoten der Form $(k + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ für $0 \leq k < n$ durchläuft, denn

- der Kreis umgibt den Ursprung und durchläuft daher $(k + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ für $k \geq 0$, und
- er kann nicht den Knoten $(k + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ für $k \geq n$ durchlaufen, denn seine Länge von mindestens $2n$ wäre.

Also enthält ein solcher Kreis einen selbstmeidenden Pfad der Länge $n-1$, der von einem Knoten der Form $(k + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ für $0 \leq k < n$ startet. Daher ist die Anzahl solcher selbstmeidenden Pfade höchstens $n \cdot \sigma(n-1)$, wobei man multipliziert mit n , denn der Kreis kann an n verschiedenen Knoten der Form $(k + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ beginnen. Ausserdem sind alle Kanten eines gegebenen Kreis der Länge n mit Wahrscheinlichkeit $(1-p)^n$ geschlossen. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} E_p[G(n)] &= \rho(n) \cdot (1-p)^n \\ &\leq n\sigma(n-1) \cdot (1-p)^n \\ &\leq n \cdot 4 \cdot 3^{n-2} \cdot (1-p)^n. \end{aligned}$$

Aufgrund von (5.3) und der Markov-Ungleichung (Satz A.5 und Bemerkung A.6 im Anhang)

folgt:

$$\begin{aligned}
 P_p(|C| < \infty) &\stackrel{(5.3)}{\leq} \sum_{n=4}^{\infty} P_p(G(n) \geq 1) \\
 &\leq \sum_{n=4}^{\infty} E_p[G(n)] \\
 &\leq \sum_{n=4}^{\infty} n \cdot 4 \cdot 3^{n-2} \cdot (1-p)^n \\
 &= \frac{4}{9} \sum_{n=4}^{\infty} n \cdot (3 \cdot (1-p))^n.
 \end{aligned}$$

Über das Quotientenkriterium erhält man

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(n+1) \cdot (3 \cdot (1-p))^{n+1}}{n \cdot (3 \cdot (1-p))^n} \right| = 3(1-p) \left| \frac{n+1}{n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Die Reihe ist konvergent genau dann, wenn

$$3(1-p) < 1 \iff p > \frac{2}{3}.$$

Daher wird die Summe beliebig klein, wenn p nahe 1 ist. Insbesondere konvergiert die Reihe zu einer Zahl kleiner als 1.⁵ Somit gilt für $p > \frac{2}{3}$, dass

$$\theta(p) = P_p(|C| = \infty) = 1 - P_p(|C| < \infty) > 0.$$

□

Bemerkung 5.5. Aus dem Beweis des Satzes 5.4 folgt, dass

$$\theta(p) \longrightarrow 1 \text{ wenn } p \rightarrow 1.$$

Tatsächlich für $p > \frac{2}{3}$

$$\frac{4}{9} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (3 \cdot (1-p))^n = \frac{4}{9} \frac{3(1-p)}{(3p-2)^2} \longrightarrow 0 \text{ wenn } p \rightarrow 1.$$

Aufgabe 8. *Beweisen Sie, dass*

$$0 < p_c(d) < 1, \quad \forall d \geq 2.$$

Hinweis: Die Abschätzung $p_c(d) < 1$ folgt direkt. Für die andere Abschätzung $p_c(d) > 0$ benutzen Sie ein ähnliches Argument wie beim Beweis des Satzes 5.3.

⁵Für diese Berechnung benutzt man die folgende Identität:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n = \frac{x}{(1-x)^2} \text{ falls } |x| < 1.$$

5.3 Existenz eines unendlichen Clusters

Mit Bezug zum Beispiel 1.2 über die Ausbreitung von Epidemien können wir nun Folgendes sagen: Ist der Abstand der Bäume so gross, dass die Ansteckungswahrscheinlichkeit $p < \frac{1}{2}$ ist, dann wird der einzelne erkrankte Baum im Zentrum fast sicher nur einen begrenzten Teil des Obstgartens infizieren. Ist aber $p > \frac{1}{2}$, dann gibt es mit positiver Wahrscheinlichkeit einen unendlichen Cluster von infizierten Bäumen. In diesem Abschnitt wird es gezeigt, dass die Wahrscheinlichkeit $\psi(p)$ eines unendlichen Clusters erfüllt

$$\psi(p) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } p < p_c(2), \\ 1, & \text{wenn } p > p_c(2). \end{cases}$$

Zuerst werden die notwendigen Begriffe eingeführt.

Definition 5.6. Sei A ein Ereignis, das durch abzählbar viele Zufallsvariablen definiert ist. A heisst **terminales Ereignis**, wenn es nicht durch beliebige Änderungen abzählbar vieler Zufallsvariablen beeinflusst werden kann.

Lemma 5.7. Seien X_1, \dots, X_n unabhängige Zufallsvariablen und sei A ein terminales Ereignis, das durch X_1, \dots, X_n definiert ist. Dann ist $P_p(A) \in \{0, 1\}$.

Für den Beweis des Lemmas siehe [9, S. 16-18].

Nun zeigen wir die Existenz eines unendlichen Clusters in \mathbb{Z}^2 .

Satz 5.8. Die Wahrscheinlichkeit eines unendlichen Clusters in \mathbb{Z}^2 ist

$$\psi(p) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } p < p_c(2), \\ 1, & \text{wenn } p > p_c(2). \end{cases}$$

Beweis. Wir definieren das Ereignis

$$A = \{\text{es gibt irgendwo in } \mathbb{Z}^2 \text{ einen unendlichen Cluster}\}.$$

Offensichtlich ist A ein terminales Ereignis, denn ob es eintritt oder nicht, hängt nicht vom Zustand einer beliebigen endlichen Menge von Kanten ab. Aus Lemma 5.7 folgt, dass $P_p(A) \in \{0, 1\}$.

Es gilt:

$$P_p(A) = P_p\left(\bigcup_{x \in \mathbb{Z}^2} \{|C(x)| = \infty\}\right) \leq \sum_{x \in \mathbb{Z}^2} P_p(\{|C(x)| = \infty\}),$$

wobei wir die σ -Subadditivität (Satz A.2 im Anhang) benutzt haben. Die Translationsinvarianz impliziert, dass für alle $x \in \mathbb{Z}^2$ stets $P_p(\{|C(x)| = \infty\}) = P_p(\{|C(0)| = \infty\})$ ist.

Für $p < p_c(2)$, also für $\theta(p) = 0$, gilt:

$$P_p(A) \leq \sum_{x \in \mathbb{Z}^2} P_p(\{|C| = \infty\}) = 0.$$

Also ist A eine P_p -Nullmenge.

Andererseits für $p > p_c(2)$, also für $\theta(p) > 0$, gilt:

$$P_p(A) \geq P_p\left(\bigcup_{x \in \mathbb{Z}^2} \{|C(x)| = \infty\}\right) \geq P_p(\{|C(0)| = \infty\}) = \theta(p) > 0.$$

Also für $p > p_c(2)$ ist $P_p(A) = 1$. □

Kapitel 6

Lösungen der Aufgaben

In diesem Abschnitt werden die Lösungen der Aufgaben erläutert. Falls erforderlich, wurde die für die Lösung verwendete Quelle angegeben.

Aufgabe 1

Wir überprüfen die 3 Axiomen. Seien x, y und $z \in \mathbb{Z}^d$. Dann:

1. $\delta(x, y) = \sum_{i=1}^d |x_i - y_i| \geq 0$, denn der Absolutbetrag ist ≥ 0 . Ausserdem:

$$\delta(x, y) = 0 \iff \sum_{i=1}^d |x_i - y_i| = 0 \iff x_i = y_i \text{ für alle } i \in \{1, \dots, d\} \iff x = y.$$

2. $\delta(x, y) = \sum_{i=1}^d |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^d |y_i - x_i| = \delta(y, x)$.

3. Wir verwenden die Subadditivität der Betragsfunktion:

$$\delta(x, y) = \sum_{i=1}^d |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^d |x_i - z_i + z_i - y_i| \leq \sum_{i=1}^d (|x_i - z_i| + |z_i - y_i|) = \delta(x, z) + \delta(z, y).$$

Aufgabe 2

Ist $p = 0$, dann gibt es keine offenen Kanten. Also existiert kein offener Pfad durch den Ursprung. Es folgt somit:

$$\theta(0) = P_0(|C| = \infty) = 0.$$

Ist $p = 1$, dann sind alle Kanten offen. Also sind alle Knoten mit dem Ursprung durch einen offenen Pfad verbunden. Es folgt somit:

$$\theta(1) = P_1(|C| = \infty) = 1.$$

Aufgabe 3 [3, S. 321]

Wir konstruieren die Perkulationsmodelle auf die Gitter \mathbb{L}^d und \mathbb{L}^{d+1} gleichzeitig. Es gilt: ist C ein unendlicher Cluster auf \mathbb{L}^d , so ist C auch ein unendlicher Cluster im Perkulationsmodell auf \mathbb{L}^{d+1} . Sei also C_d der Cluster des Ursprung auf \mathbb{L}^d . Dann gilt

$$P_p(|C_d| = \infty) \leq P_p(|C_{d+1}| = \infty) \iff \theta_d(p) \leq \theta_{d+1}(p).$$

Aus der Definition der kritischen Wahrscheinlichkeit p_c folgt somit, dass

$$p_c(d+1) \leq p_c(d).$$

Aufgabe 4 [4, S. 2]

Es ist intuitiv einleuchtend, dass die Perkolationsfunktion θ nicht abnimmt. Mit zunehmendem Wert von p steigt tatsächlich die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kante offen ist, und damit die Anzahl der offenen Kanten. Eine höhere Anzahl von offenen Kanten impliziert eine Zunahme der Wahrscheinlichkeit, offene Pfade durch den Ursprung zu haben. Deshalb hat das Ereignis $\{|C| = \infty\}$ eine höhere Wahrscheinlichkeit für einen grösseren Wert von p .

Wir versuchen nun, es formal zu beweisen. Wir definieren einen anderen Wahrscheinlichkeitsraum. Wir setzen unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen X_e auf alle Kanten $e \in \mathbb{E}^d$, wobei jede Zufallsvariable X_e gleichverteilt auf $[0, 1]$ ist. Der Grundraum Ω' ist somit der Produktraum

$$\Omega' = \prod_{e \in \mathbb{E}^d} [0, 1].$$

Sei p fest. Wir nehmen an, dass ein Ergebnis in Ω' gegeben ist. Dann definieren wir eine Konfiguration $\omega_p(e)$, indem wir eine Kante als offen deklarieren, wenn $X_e \leq p$ ist.

Sei nun $p_1 < p_2$. Dann folgt aus $X_e \leq p_1$ sofort $X_e \leq p_2$ für alle Kanten e , d.h. für jede Kante $e \in \mathbb{E}^d$ gilt:

$$\omega_{p_1}(e) \leq \omega_{p_2}(e).$$

Besitzt die Konfiguration ω_{p_1} einen unendlichen Cluster des Ursprungs, dann hat auch ω_{p_2} einen unendlichen Cluster des Ursprungs und

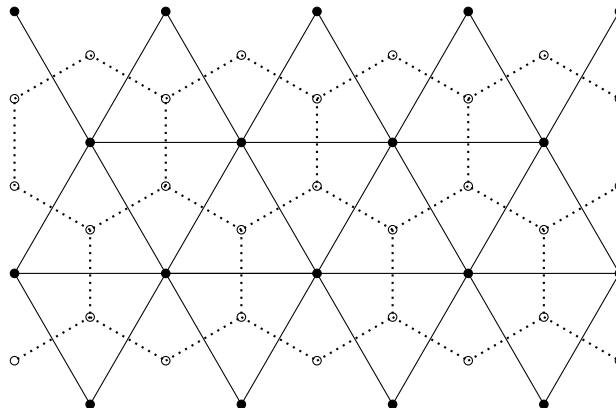
$$\{|C^{p_1}| = \infty\} \subseteq \{|C^{p_2}| = \infty\},$$

wobei C^p der Cluster des Ursprungs für das Perkolationsmodell mit Parameter p bezeichnet. Somit ist die Wahrscheinlichkeit, dass es einen unendlichen Cluster für p_1 gibt, kleiner als die Wahrscheinlichkeit, dass es einen unendlichen Cluster für p_2 gibt. Also folgt:

$$\theta(p_1) \leq \theta(p_2).$$

Aufgabe 5

Das duale Gitter eines triangulären Gitters ist ein hexagonales Gitter.



Aufgabe 6

Sei L ein zweidimensionales Gitter und \mathcal{L} das dazu duale Gitter. Wir benutzen die Identität

$$p_c(L) + p_c(\mathcal{L}) = 1, \quad (\star)$$

um die Äquivalenz zu zeigen.

\implies : Ist $p > p_c(L)$, dann folgt

$$1 - p < 1 - p_c(L) \stackrel{(\star)}{=} p_c(\mathcal{L}).$$

\impliedby : Ist $1 - p < p_c(\mathcal{L})$, dann ist

$$p > 1 - p_c(\mathcal{L}) \stackrel{(\star)}{=} p_c(L).$$

Diese Äquivalenz hat die folgende Bedeutung. Ist $p > p_c(L)$, dann gibt es unendliche Cluster in L . Es bedeutet auch, dass es keine unendlich geschlossenen Cluster in \mathcal{L} gibt. Ist umgekehrt $p < p_c(L)$, dann wissen wir, dass keine unendlichen Cluster existieren, also gibt es unendlich viele geschlossenen Cluster in \mathcal{L} .

Aufgabe 7 [3, S. 349]

- (a) Es ist leicht zu begründen, dass $\sigma(n+1) \leq (2d-1)\sigma(n)$ gilt, denn wenn man ein selbstmeidender Pfad der Länge n hat, dann gibt es höchstens $2d-1$ Möglichkeiten für den letzten Knoten. In der Tat kann ein selbstmeidender Pfad nicht zum zuletzt besuchten Punkt zurückkehren.

Für die zweite Abschätzung betrachtet man die folgende Situation: ein Pfad, bei dem in jedem Schritt genau eine der d Komponenten stets um 1 grösser wird, also zum Beispiel $(0, \dots, 0) \rightarrow (0, 1, \dots, 0) \rightarrow (1, 1, \dots, 0) \rightarrow (2, 1, \dots, 0)$, ist offensichtlich selbstmeidend. Bei jedem Schritt gibt es dafür d Möglichkeiten, also erhält man $\sigma(n+1) \geq d^{n+1}$.

Aus der ersten Abschätzung erhält man

$$\begin{aligned} \sigma(n) &\leq (2d-1)\sigma(n-1) \leq (2d-1)^2\sigma(n-2) \\ &\leq (2d-1)^3\sigma(n-3) \leq \dots \\ &\leq (2d-1)^{n-1}\sigma(1) = (2d-1)^{n-1}2d. \end{aligned}$$

Somit folgt

$$d^n \leq \sigma(n) \leq (2d-1)^{n-1}2d.$$

- (b) Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufälliger Pfad selbstmeidend ist. Es gibt insgesamt $(2d)^n$ Pfade der Länge n . Somit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich zu

$$\frac{\sigma(n)}{(2d)^n}.$$

Mit der Abschätzung von Teilaufgabe (a) erhalten wir,:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq p_n \leq \left(\frac{2d-1}{2d}\right)^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall d \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 8

Die Abschätzung $p_c(d) < 1$ für alle $d \geq 2$ folgt direkt aus Aufgabe 3. Tatsächlich gilt, dass $p_c(d+1) \leq p_c(d)$ ist und im Satz 5.4 wurde es gezeigt, dass $p_c(2) \leq \frac{2}{3}$. Also ist für alle $d \geq 2$:

$$p_c(d) \leq p_c(2) \leq \frac{2}{3} < 1.$$

Für die Abschätzung $p_c(d) > 0$ benutzen wir wieder den Begriff des selbstmeidenden Pfades. Wir betrachten das Perkulationsmodell auf \mathbb{L}^d . Sei $N_d(n)$ die Anzahl der im Ursprung beginnenden selbstmeidenden offenen Pfade der Länge n . Dann gilt:

$$\begin{aligned} E_p[N_d(n)] &= \sum_{k=1}^{\infty} k P_p(N_d(n) = k) \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty} P_p(N_d(n) = k) \\ &= P_p(N_d(n) \geq 1) \\ &\geq P_p(|C| = \infty), \end{aligned} \tag{6.1}$$

wobei die letzte Ungleichung folgt aus $\{|C| = \infty\} \subseteq \{N_d(n) \geq 1\}$ (siehe (5.1)). Die Anzahl $\sigma_d(n)$ der im Ursprung beginnenden selbstmeidenden Pfade der Länge n ist höchstens

$$2^d \cdot (2^d - 1)^{n-1},$$

da die erste Kante auf 2^d verschiedene Arten gewählt werden kann und jede weitere auf höchstens $2^d - 1$ verschiedene Arten. Ausserdem sind alle n Kanten eines solchen Pfades offen mit Wahrscheinlichkeit p^n . Aus beidem resultiert

$$E_p[N_d(n)] = \sigma_d(n) \cdot p^n \leq 2^d (2^d - 1)^{n-1} p^n$$

und aufgrund von (6.1) folgt

$$\theta(p) = P_p(|C| = \infty) \leq 2^d (2^d - 1)^{n-1} p^n.$$

Wenn man ein p^* wählt, sodass $0 < p^* < \frac{1}{2^d - 1}$, dann erhält man für $n \rightarrow \infty$, dass $\theta(p^*) = 0$ ist. Aufgrund der Definition des kritischen Wertes $p_c(d) = \sup\{p: \theta(p) = 0\}$ schliessen wir

$$p_c(d) \geq p^* > 0.$$

Kapitel 7

Einsatz für den Unterricht

Im vorliegenden Kapitel wird erläutert, wie die Perkolationstheorie - und somit was in dieser Arbeit entwickelt wurde - für den Unterricht verwendet werden kann. Dieser Absatz richtet sich daher hauptsächlich an Lehrpersonen.

Wie das erste Kapitel zeigt, entsteht die Perkolationstheorie für die Modellierung von Phänomenen wie die Ausbreitung von Flüssigkeiten in porösem Gestein, die Ausbreitung von Epidemien und Waldbränden, die Polymerisation in der Chemie. Die Anwendung von Perkulationsmodellen in Bereichen wie Physik, Geologie, Biologie, Chemie dient als Motivation für die Lernenden.

In der Tat wird Schülerinnen und Schülern nur all zu oft eingetrichtert, wie wichtig die Mathematik doch sei, ohne dass sie dies je ganz nachvollziehen können. Ausserdem sind die Lernenden am Fach desinteressiert, wenn sie dessen Nutzen oder Anwendung nicht erkennen. Dies ist bei der betreffenden Theorie jedoch nicht der Fall, da sie durch reale Situationen motiviert ist. Aus diesem Grund kann die Erläuterung auch nur einiger Unterthemen der Perkolationstheorie den Gymnasiasten aufzeigen, wie ein Problem modelliert und dann mit Werkzeugen der Mathematik studiert und gelöst werden kann.

Es ist klar, dass gute Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie erforderlich sind, um diese Theorie vertieft studieren zu können. Man braucht auch genügend Zeit, um die wichtigsten Inhalte zu präsentieren. Aus diesem Grund glaube ich, dass die Behandlung der vorliegenden Theorie, wie sie in dieser mentorierten Arbeit vorgestellt wird, besser geeignet ist für eine Maturaarbeit als den normalen Unterricht. In diesem Fall hätte man genügend Zeit, die Theorie zu vertiefen und zu versuchen, all diese Ergebnisse zu verstehen. Die vorgeschlagenen Aufgaben könnten dann von den Lernenden gelöst werden.

Allerdings kann die Lehrperson die einführenden Ideen hinter dieser Theorie anhand eines oder mehrerer einleitender Beispiele (aus Kapitel 1) im Mathematikunterricht veranschaulichen. Aus diesen einleitenden Situationen kann man das Modell der Kantenperkolation ableiten. Die Lehrperson könnte dann einige Begriffe über Graphen- und Wahrscheinlichkeitstheorie einführen und insbesondere das Kapitel 3 (vor allem die Abschnitte 3.1.1, 3.1.2 und 3.2) und den Abschnitt 5.1 verwenden. Dies würde bei den Schülerinnen und Schülern das Bewusstsein fördern, dass anfänglich schwierig scheinende Probleme durch Mathematik effizient und elegant gelöst werden können.

Anhang A

Sätze aus der Wahrscheinlichkeitstheorie

Dieser Anhang umfasst die in der Arbeit verwendeten Sätze aus der Wahrscheinlichkeitstheorie. Die Beweise werden gemäss Quelle [8] erläutert.

Im Folgenden wird immer der Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) berücksichtigt.

Satz A.1.

(i) Sei $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Ereignissen aus \mathcal{A} mit

$$A_i \subset A_{i+1} \text{ für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n).$$

(ii) Sei $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Ereignissen aus \mathcal{A} mit

$$A_i \supset A_{i+1} \text{ für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n).$$

Beweis.

(i) Wir definieren $B_1 := A_1$, $B_2 := A_2 \setminus A_1$, $B_3 := A_3 \setminus A_2$, ..., das heisst

$$B_1 := A_1 \text{ und für alle } i > 1 \ B_i := A_i \setminus A_{i-1}.$$

Die Folge $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ besteht aus disjunkten Ereignissen mit

$$\bigcup_{i=1}^n B_i = \bigcup_{i=1}^n A_i = A_n \text{ und } \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Da das Wahrscheinlichkeitsmass P σ -additiv ist und die B_i 's disjunkt sind, folgt:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i).$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P(B_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n). \end{aligned}$$

(ii) Es gilt:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^C\right)^C\right) = P(\Omega) - P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^C\right).$$

Die Folge $(A_i^C)_{i \in \mathbb{N}}$ erfüllt die Bedingung von der Aussage (i), das heisst

$$A_i^C \subset A_{i+1}^C \text{ für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Also folgt aus (i):

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P(\Omega) - \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n^C) = \lim_{n \rightarrow \infty} (P(\Omega) - P(A_n^C)) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n).$$

□

Satz A.2 (σ -Subadditivität). Seien $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ eine Folge beliebiger Ereignissen aus \mathcal{A} . Dann gilt:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Beweis. Wir definieren

$$B_i := A_i \setminus (A_{i-1} \cup \dots \cup A_1) \text{ für alle } i \geq 1.$$

Die Folge $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ besteht aus disjunkten Ereignissen mit $B_i \subset A_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Das folgende Schema veranschaulicht diese Überlegungen.

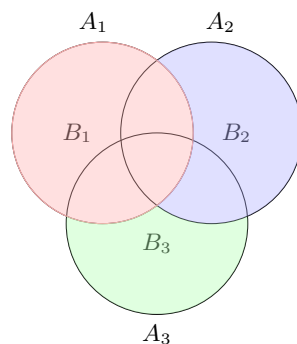


Abbildung A.1: Darstellung von drei Mengen: man sieht, dass $B_i \subset A_i$ für alle $i \in \{1, 2, 3\}$ und dass $\bigcup_{i=1}^3 B_i = \bigcup_{i=1}^3 A_i$.

Also gilt:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{P(B_i)}_{\leq P(A_i)} \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

□

Lemma A.3 (Lemma von Borel-Cantelli). Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine unendliche Folge von Ereignissen aus \mathcal{A} und sei A wie folgt definiert:

$$A = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i = \{\text{unendlich viele der } A_n \text{ treten ein}\}.$$

Dann gilt:

$$\sum_{n \geq 1} P(A_n) < \infty \Rightarrow P(A) = 0$$

Bemerkung A.4. Das Lemma von Borel-Cantelli besagt, dass mit Wahrscheinlichkeit 1 nur endlich viele der Ereignisse A_n , $n \in \mathbb{N}$ eintreten, falls $\sum_{n \geq 1} P(A_n) < \infty$.

Beweis. Wir definieren die Folge $B_n := \bigcup_{i \geq n} A_i$ von Ereignissen aus \mathcal{A} . Die Folge ist monoton fallend, denn für alle n gilt:

$$B_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i = A_n \cup \left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i \right) = A_n \cup B_{n+1},$$

also $B_{n+1} \subset B_n$. Aus dem Satz A.1 (ii) erhält man:

$$P(A) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) \stackrel{A.1(ii)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n),$$

und aus Satz A.2 folgt

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{i \geq n} A_i\right) \stackrel{A.2}{\leq} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n}^{\infty} P(A_i).$$

Da die Summe $\sum_{n \geq 1} P(A_n)$ nach Voraussetzung konvergiert, folgt

$$P(A) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n}^{\infty} P(A_i) = 0,$$

und das vervollständigt den Beweis. □

Satz A.5 (Markov-Ungleichung). Seien $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable, a eine reelle Konstante und ferner $h: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ eine monoton wachsende Funktion. Dann gilt:

$$h(a) \cdot P(X \geq a) \leq E[h(X)],$$

welche man für $h(a) > 0$ zu

$$P(X \geq a) \leq \frac{E[h(X)]}{h(a)},$$

umschreiben kann.

Beweis. Wir können schreiben

$$h(a) \cdot 1_{X \geq a} \leq h(X)1_{X \geq a} \leq h(X).$$

Durch Integration folgt:

$$\begin{aligned} h(a) \cdot P(X \geq a) &= h(a) \cdot E[1_{X \geq a}] \\ &= \int h(a)1_{X \geq a} dP \\ &\leq \int h(X)1_{X \geq a} dP \\ &\leq \int h(X) dP = E[h(X)]. \end{aligned}$$

□

Bemerkung A.6 (Spezialfall der Markov-Ungleichung). Setzt man $h(x) = x$ für $x \geq 0$ und betrachtet die reelle Zufallsvariable $|X|$, so erhält man aus Satz A.5 für $a > 0$ den folgenden Spezialfall:

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{E[|X|]}{a}.$$

Literaturverzeichnis

- [1] Beffara, V., Sidoravicius, V.: Percolation Theory, Encyclopedia of Mathematical Physics 2006.
<https://arxiv.org/pdf/math/0507220.pdf>.
- [2] Grimmett, G.: Percolation, Springer 1999.
- [3] Hesse, C., Meister, A.: Übungsbuch zur angewandten Wahrscheinlichkeitstheorie, Wiesbaden 2005.
- [4] Kennedy, T.: Lecture Notes on Introduction to Mathematical Physics, University of Arizona 2008.
<https://www.math.arizona.edu/~tgk/541/chap2.pdf>.
- [5] Kesten, H.: Percolation Theory for Mathematicians, Boston 1982.
- [6] Stauffer, D., Aharony, A.: Perkolationstheorie. Eine Einführung, Weinheim 1995.
- [7] Steif, J. E.: A mini course on percolation theory, Göteborg University 2009.
- [8] Sznitman, A.: Lecture Notes on Probability Theory, ETH Zürich 2017.
- [9] Tassion, V.: Lecture Notes on Percolation, ETH Zürich 2018.
<https://metaphor.ethz.ch/x/2018/fs/401-4607-59L/>.
- [10] Tassion, V.: Slides “What is Percolation?”, ETH Zürich 2018.
<https://metaphor.ethz.ch/x/2018/fs/401-4607-59L/sc/slidesIntro.pdf>.
- [11] Thurner, H.: Perkolationstheorie.
<https://homepage.univie.ac.at/bernhard.kroen/Thurner.pdf>.

Eigenständigkeitserklärung

Die unterzeichnete Eigenständigkeitserklärung ist Bestandteil jeder während des Studiums verfassten Semester-, Bachelor- und Master-Arbeit oder anderen Abschlussarbeit (auch der jeweils elektronischen Version).

Die Dozentinnen und Dozenten können auch für andere bei ihnen verfasste schriftliche Arbeiten eine Eigenständigkeitserklärung verlangen.

Ich bestätige, die vorliegende Arbeit selbständig und in eigenen Worten verfasst zu haben. Davon ausgenommen sind sprachliche und inhaltliche Korrekturvorschläge durch die Betreuer und Betreuerinnen der Arbeit.

Titel der Arbeit (in Druckschrift):

EINFÜHRUNG IN DIE PERKOLATIONSTHEORIE

Verfasst von (in Druckschrift):

Bei Gruppenarbeiten sind die Namen aller Verfasserinnen und Verfasser erforderlich.

Name(n):

PICCOLI

Vorname(n):

VANESSA

Ich bestätige mit meiner Unterschrift:

- Ich habe keine im Merkblatt „Zitier-Knigge“ beschriebene Form des Plagiats begangen.
- Ich habe alle Methoden, Daten und Arbeitsabläufe wahrheitsgetreu dokumentiert.
- Ich habe keine Daten manipuliert.
- Ich habe alle Personen erwähnt, welche die Arbeit wesentlich unterstützt haben.

Ich nehme zur Kenntnis, dass die Arbeit mit elektronischen Hilfsmitteln auf Plagiate überprüft werden kann.

Ort, Datum

Zürich, 29.01.2020

Unterschrift(en)



Bei Gruppenarbeiten sind die Namen aller Verfasserinnen und Verfasser erforderlich. Durch die Unterschriften bürgen sie gemeinsam für den gesamten Inhalt dieser schriftlichen Arbeit.