Einführung in die Perkolationstheorie

32. Schweizerischer Tag über Mathematik und Unterricht

VANESSA PICCOLO

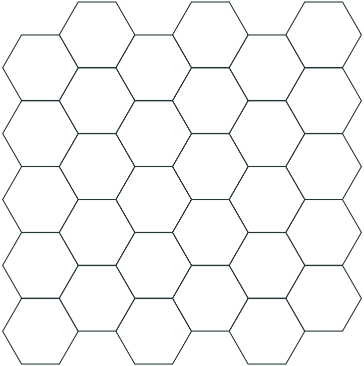
14. September 2022

ENS de Lyon

Mentorierte Arbeit während des Lehrdiploms (Betreuung: Prof. Dr. Akveld)

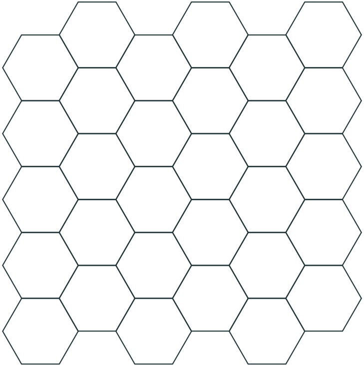
Ein erstes Beispiel

Problem: Wir wollen den Raum mit roten und blauen sechseckigen Fliesen auslegen.



Ein erstes Beispiel

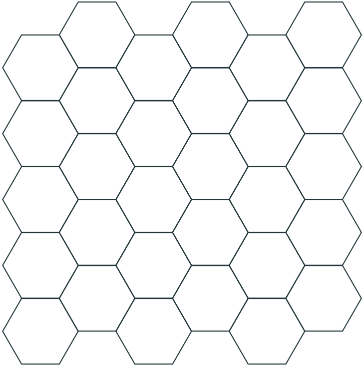
Problem: Wir wollen den Raum mit roten und blauen sechseckigen Fliesen auslegen.



Zufällige Färbung von Sechsecken:

Ein erstes Beispiel

Problem: Wir wollen den Raum mit roten und blauen sechseckigen Fliesen auslegen.

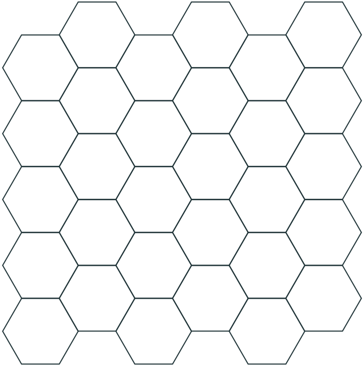


Zufällige Färbung von Sechsecken:

Parameter: $0 \leq p \leq 1$.

Ein erstes Beispiel

Problem: Wir wollen den Raum mit roten und blauen sechseckigen Fliesen auslegen.



$p = \frac{1}{2}$

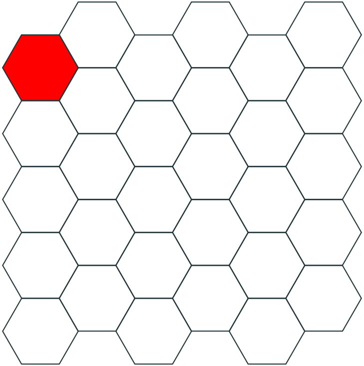
Zufällige Färbung von Sechsecken:

Parameter: $0 \leq p \leq 1$.
Ein gegebenes Sechseck wird wie folgt gefärbt:

- rot mit Wahrscheinlichkeit p,
- blau mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$.

Ein erstes Beispiel

Problem: Wir wollen den Raum mit roten und blauen sechseckigen Fliesen auslegen.



$p = \frac{1}{2}$

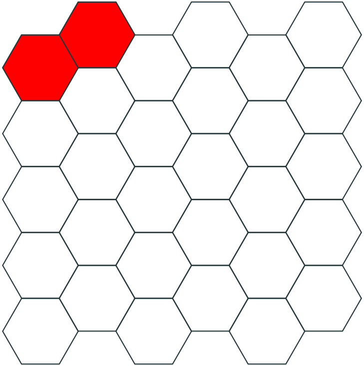
Zufällige Färbung von Sechsecken:

Parameter: $0 \leq p \leq 1$.
Ein gegebenes Sechseck wird wie folgt gefärbt:

* rot mit Wahrscheinlichkeit p,
* blau mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$.

Ein erstes Beispiel

Problem: Wir wollen den Raum mit roten und blauen sechseckigen Fliesen auslegen.



$p = \frac{1}{2}$

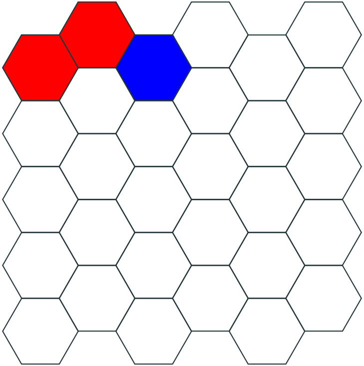
Zufällige Färbung von Sechsecken:

Parameter: $0 \leq p \leq 1$.
Ein gegebenes Sechseck wird wie folgt gefärbt:

* rot mit Wahrscheinlichkeit p,
* blau mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$.

Ein erstes Beispiel

Problem: Wir wollen den Raum mit roten und blauen sechseckigen Fliesen auslegen.



$p = \frac{1}{2}$

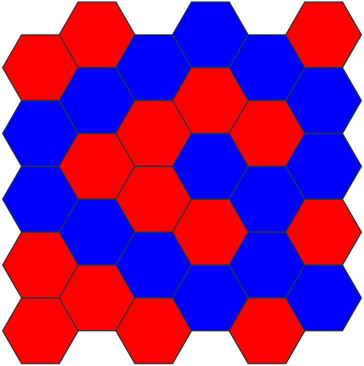
Zufällige Färbung von Sechsecken:

Parameter: $0 \leq p \leq 1$.
Ein gegebenes Sechseck wird wie folgt gefärbt:

* rot mit Wahrscheinlichkeit p,
* blau mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$.

Ein erstes Beispiel

Problem: Wir wollen den Raum mit roten und blauen sechseckigen Fliesen auslegen.



$p = \frac{1}{2}$

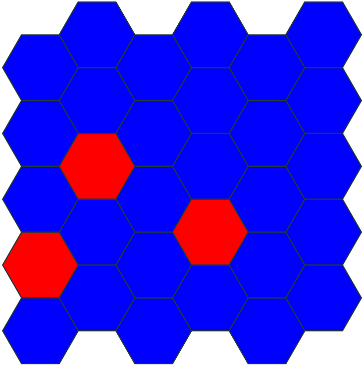
Zufällige Färbung von Sechsecken:

Parameter: $0 \leq p \leq 1$.
Ein gegebenes Sechseck wird wie folgt gefärbt:

* rot mit Wahrscheinlichkeit p,
* blau mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$.

Ein erstes Beispiel

Problem: Wir wollen den Raum mit roten und blauen sechseckigen Fliesen auslegen.



$p = \frac{1}{10}$

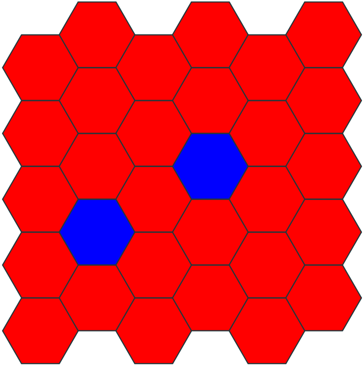
Zufällige Färbung von Sechsecken:

Parameter: $0 \leq p \leq 1$.
Ein gegebenes Sechseck wird wie folgt gefärbt:

* rot mit Wahrscheinlichkeit p,
* blau mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$.

Ein erstes Beispiel

Problem: Wir wollen den Raum mit roten und blauen sechseckigen Fliesen auslegen.



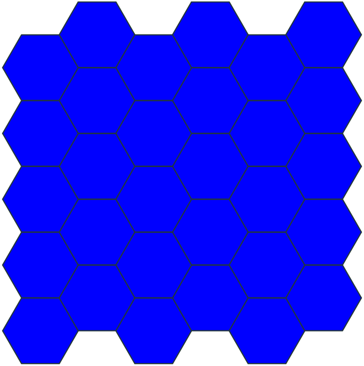
$p = \frac{9}{10}$

Zufällige Färbung von Sechsecken:

Parameter: $0 \leq p \leq 1$.
Ein gegebenes Sechseck wird wie folgt gefärbt:

- rot mit Wahrscheinlichkeit p,
- blau mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$.

Problem: Wir wollen den Raum mit roten und blauen sechseckigen Fliesen auslegen.



$p = 0$

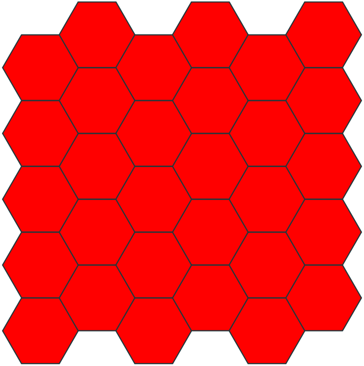
Zufällige Färbung von Sechsecken:

Parameter: $0 \leq p \leq 1$.
Ein gegebenes Sechseck wird wie folgt gefärbt:

* rot mit Wahrscheinlichkeit p,
* blau mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$.

Ein erstes Beispiel

Problem: Wir wollen den Raum mit roten und blauen sechseckigen Fliesen auslegen.



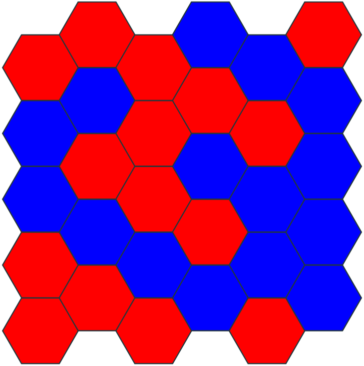
$p = 1$

Zufällige Färbung von Sechsecken:

Parameter: $0 \leq p \leq 1$.
Ein gegebenes Sechseck wird wie folgt gefärbt:

- rot mit Wahrscheinlichkeit p,
- blau mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$.

Problem: Wir wollen den Raum mit roten und blauen sechseckigen Fliesen auslegen.

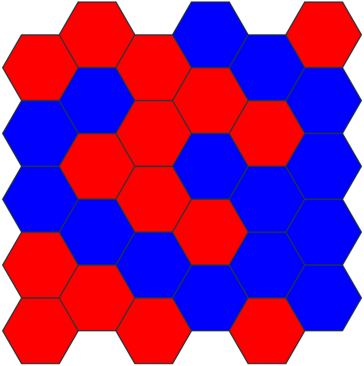


Zufällige Färbung von Sechsecken:

Parameter: $0 \leq p \leq 1$.
Ein gegebenes Sechseck wird wie folgt gefärbt:

* rot mit Wahrscheinlichkeit p,
* blau mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$.

Problem: Wir wollen den Raum mit roten und blauen sechseckigen Fliesen auslegen.



Zufällige Färbung von Sechsecken:

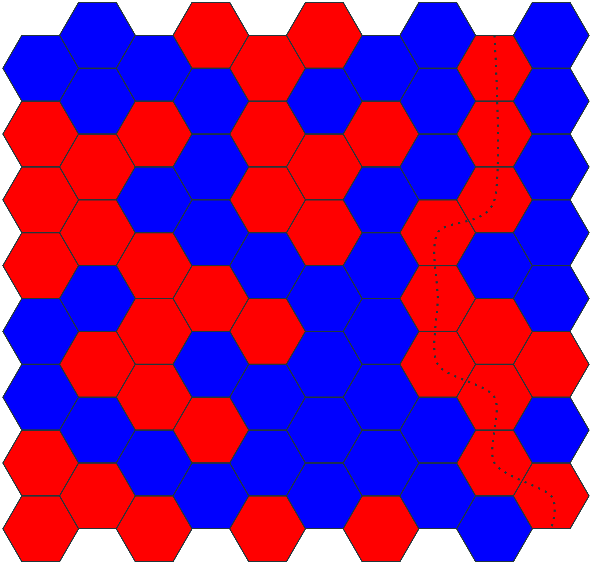
Parameter: $0 \leq p \leq 1$.
Ein gegebenes Sechseck wird wie folgt gefärbt:

- rot mit Wahrscheinlichkeit p,
- blau mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$.

Rotes Pfad: Ein Pfad aus roten Sechsecken.
Rotes Cluster: Rote "Insel", eine verbundene rote Komponente.

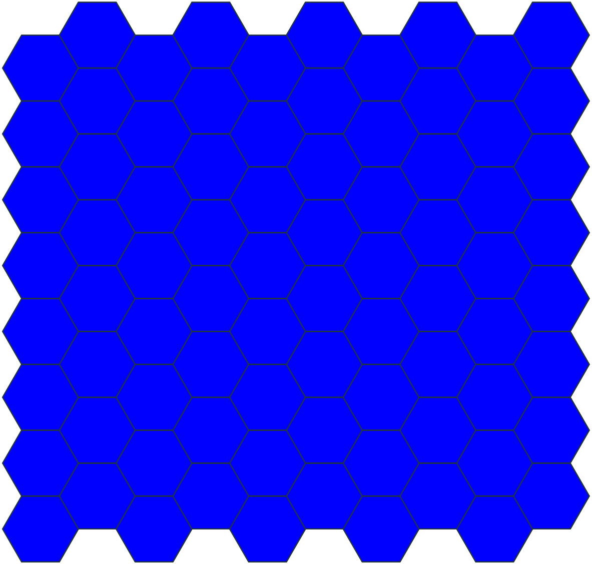
Ein erstes Beispiel

Frage: Gibt es einen roten Pfad von oben nach unten?



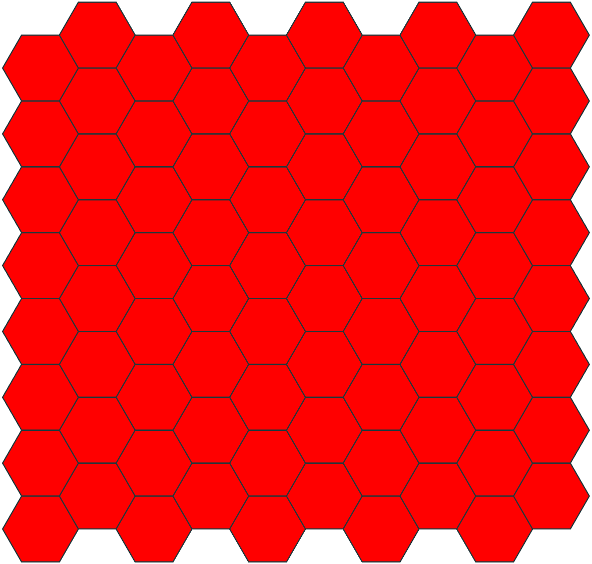
Ein erstes Beispiel

Frage: Gibt es einen roten Pfad von oben nach unten?



$p = 0$

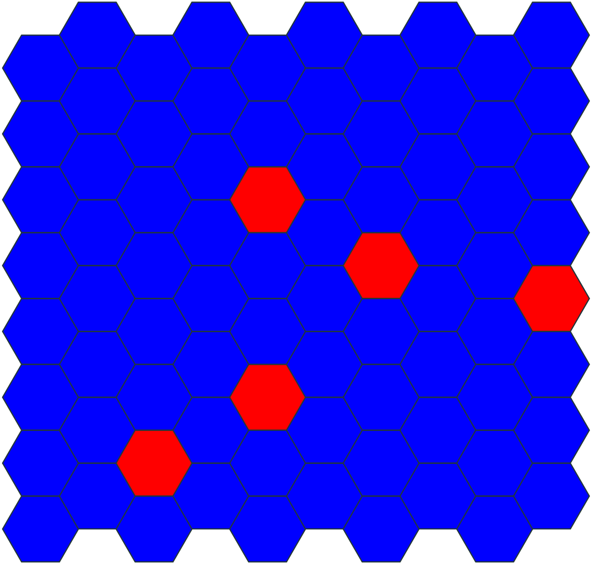
Frage: Gibt es einen roten Pfad von oben nach unten?



$p = 1$

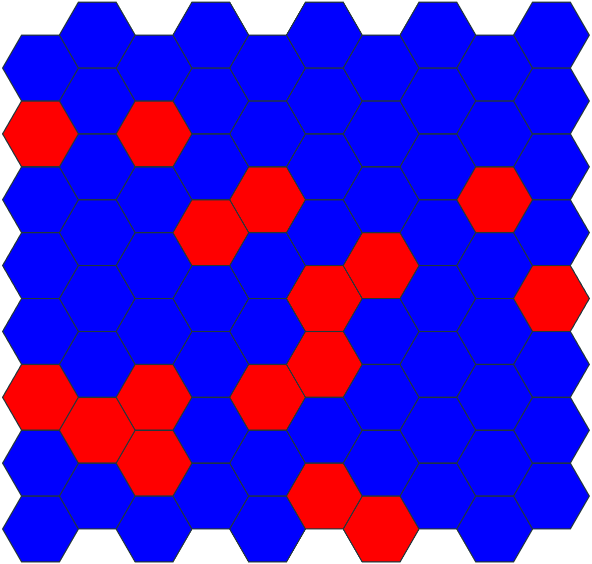
Ein erstes Beispiel

Frage: Gibt es einen roten Pfad von oben nach unten?



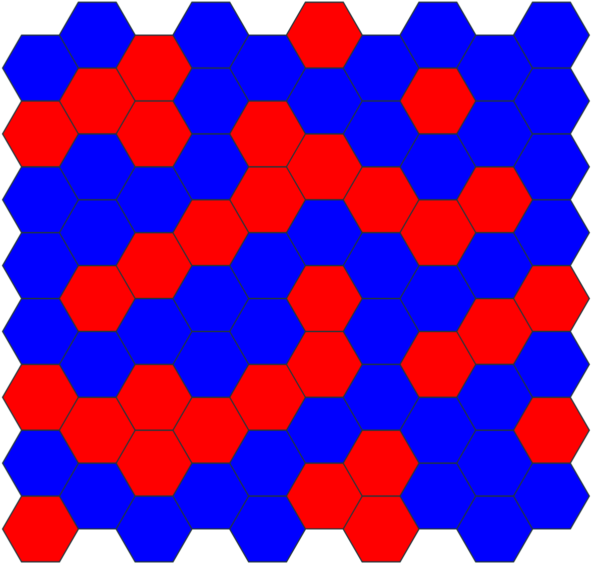
$p = 0.1$

Frage: Gibt es einen roten Pfad von oben nach unten?



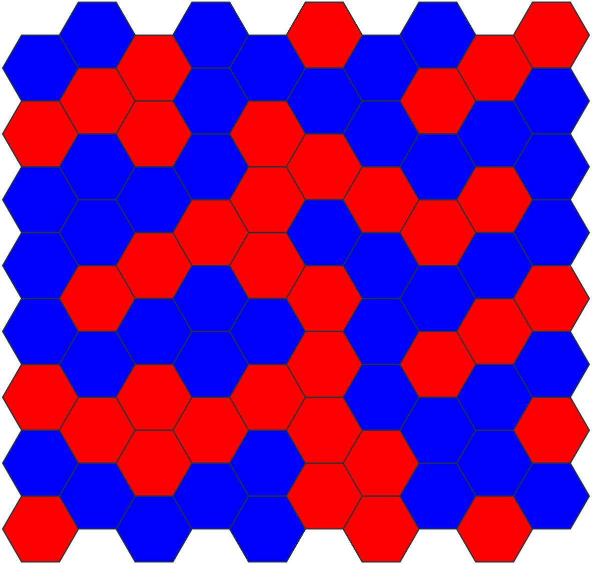
$p = 0.2$

Frage: Gibt es einen roten Pfad von oben nach unten?



$p = 0.4$

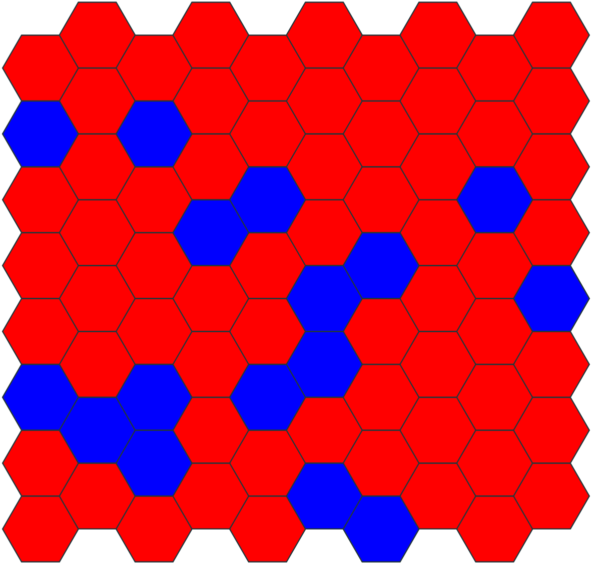
Frage: Gibt es einen roten Pfad von oben nach unten?



$p = 0.5$

Ein erstes Beispiel

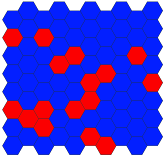
Frage: Gibt es einen roten Pfad von oben nach unten?



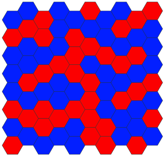
$p = 0.8$

Ein erstes Beispiel

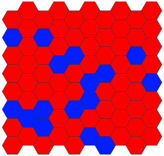
Frage: Gibt es einen roten Pfad von oben nach unten?



(a) $p < \frac{1}{2}$



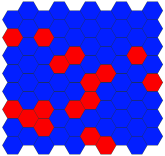
(b) $p = \frac{1}{2}$



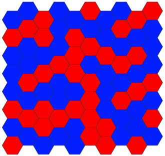
(c) $p > \frac{1}{2}$

Ein erstes Beispiel

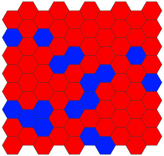
Frage: Gibt es einen roten Pfad von oben nach unten?



(a) $p < \frac{1}{2}$



(b) $p = \frac{1}{2}$



(c) $p > \frac{1}{2}$

Antwort:

Theorem (Kesten, 1980)

Für die Perkolation mit dem Parameter $p \in [0, 1]$ gilt Folgendes:

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}_p \left[\text{es gibt einen roten Pfad von oben nach unten in einem Quadrat der Seitenlänge } n\right]$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{if } p < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{if } p = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{if } p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Definition

Definition

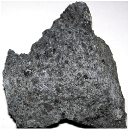
Der Name Perkolation (vom lateinischen Verb *percolare*, ”filtern” oder ”durchdringen”) bezieht sich auf den Durchgang einer Flüssigkeit durch ein durchlässiges Medium.

In der Physik und Mathematik beschreibt die Perkolation ein kritisches Phänomen, das einen Phasenübergang zeigt. Das bedeutet, dass es einen natürlichen Parameter im Modell gibt, bei dessen Erreichen eine drastiche Veränderung des System eintritt.

Motivation

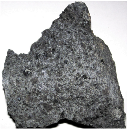
Motivation

- Wie fliesst das Wasser im Gestein?



Motivation

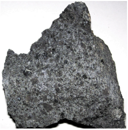
* Wie fliesst das Wasser im Gestein?



* Wie breiten sich Waldbrände aus?

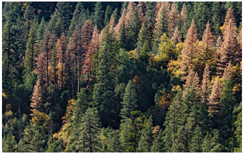
Motivation

* Wie fliesst das Wasser im Gestein?



* Wie breiten sich Waldbrände aus?

* Wie verbreiten sich Epidemien im Wald?



Ein mathematisches Modell

Was brauchen wir für eine einfache, schematische Darstellung?

- Knoten: Wo stehen die Bäume?
- Kanten, die Knoten verbinden: Welche Wege sind möglich?
- Zusammenhang: Wenn ein Baum krank ist, welche Bäume sind der Infektion direkt ausgesetzt?

Ein mathematisches Modell

Was brauchen wir für eine einfache, schematische Darstellung?

* Knoten: Wo stehen die Bäume?
* Kanten, die Knoten verbinden: Welche Wege sind möglich?
* Zusammenhang: Wenn ein Baum krank ist, welche Bäume sind der Infektion direkt ausgesetzt?

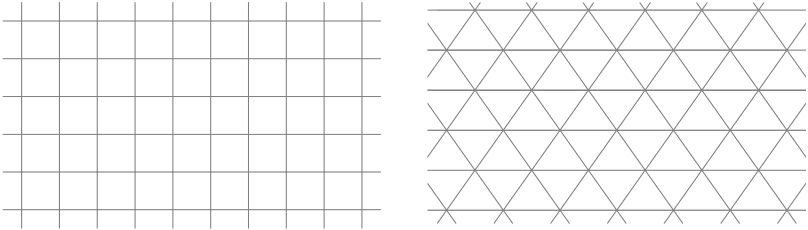


Figure 2: Das quadratische (links) und dreieckige (rechts) Gitter.

Was brauchen wir für eine einfache, schematische Darstellung?

* Knoten: Wo stehen die Bäume?
* Kanten, die Knoten verbinden: Welche Wege sind möglich?
* Zusammenhang: Wenn ein Baum krank ist, welche Bäume sind der Infektion direkt ausgesetzt?

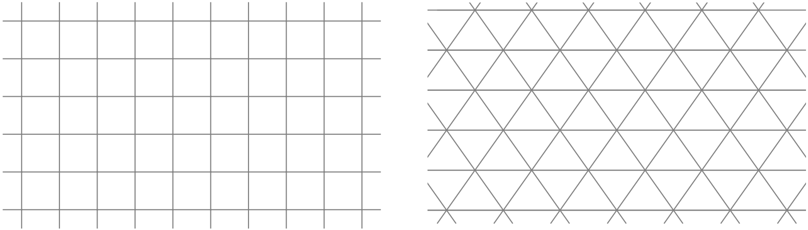
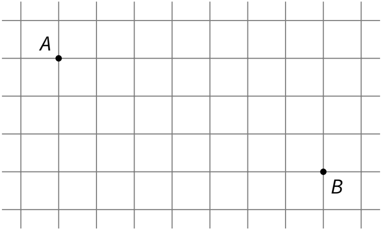
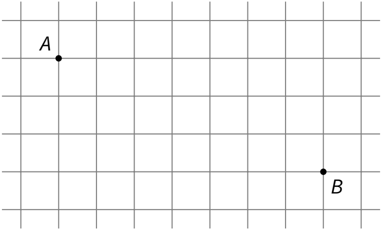


Figure 2: Das quadratische (links) und dreieckige (rechts) Gitter.

Es wird ein Graph erstellt, in dem jeder Baum ein Knoten ist und zwei Bäume durch eine Kante verbunden sind, wenn sie nahe genug beieinander liegen, um sich gegenseitig anzustecken.


A
B

Ein mathematisches Modell

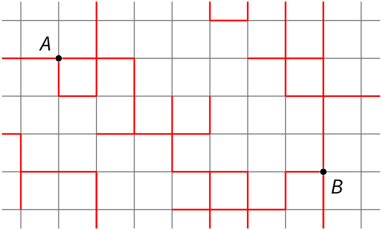


Zufällige Färbung der Kanten:

Parameter: $0 \leq p \leq 1$.

Je eine Kante wird unabhängig mit Wahrscheinlichkeit p rot gefärbt. D.h. mit Wahrscheinlichkeit p wird ein gesunder Baum von einem benachbarten erkrankten Baum angesteckt. Ungefärbte Kanten entsprechen Baumpaaren, zwischen denen die Infektion nicht übertragen wurde.

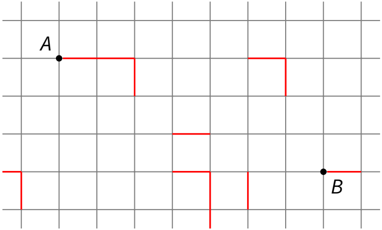
Ein mathematisches Modell



Zufällige Färbung der Kanten:

Parameter: $0 \leq p \leq 1$.

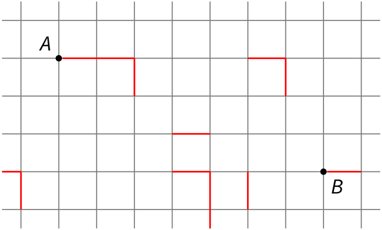
Je eine Kante wird unabhängig mit Wahrscheinlichkeit p rot gefärbt. D.h. mit Wahrscheinlichkeit p wird ein gesunder Baum von einem benachbarten erkrankten Baum angesteckt. Ungefärbte Kanten entsprechen Baumpaaren, zwischen denen die Infektion nicht übertragen wurde.



Zufällige Färbung der Kanten:

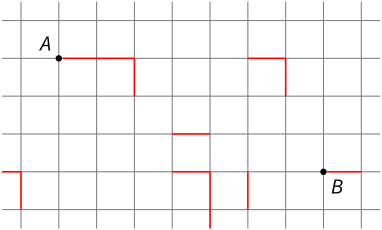
Parameter: $0 \leq p \leq 1$.

Je eine Kante wird unabhängig mit Wahrscheinlichkeit p rot gefärbt. D.h. mit Wahrscheinlichkeit p wird ein gesunder Baum von einem benachbarten erkrankten Baum angesteckt. Ungefärbte Kanten entsprechen Baumpaaren, zwischen denen die Infektion nicht übertragen wurde.



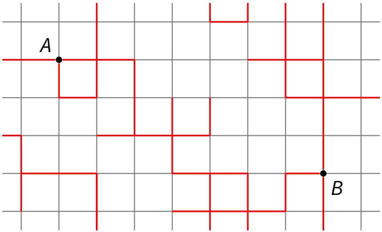
Bei diesem vereinfachenden Modell wird der zeitliche Aspekt der Ausbreitung der Epidemie nicht berücksichtigt: Alle Ansteckungen zwischen Nachbarn erfolgen gleichzeitig, instantan und unabhängig voneinander.

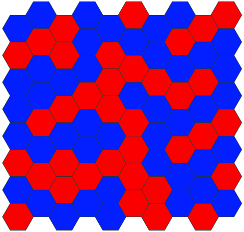
Ein mathematisches Modell



Bleibt die durch einen kranken Baum verursachte Epidemie begrenzt? Oder besteht die Gefahr, dass sie auch sehr weit entfernte Bäume infiziert?

Ein mathematisches Modell





Das Modell hängt von einem einzigen Parameter ab: der Ansteckungswahrscheinlichkeit, und es geht darum, anhand der Werte dieses Parameters den Phasenübergang, d. h. die kritische Schwelle, zu bestimmen, unterhalb derer die Ausbreitung der Epidemie lokal bleibt. In diesem Fall ist der Schwellenwert 0.5.

Kantenperkolation: Zentrale Begriffe

Terminologie über Graphen

Graph

Ein Graph $G = (V, E)$ besteht aus

* einer Menge von Knoten $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und
* einer Menge von Kanten $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$,

wobei eine Kante genau zwei Knoten miteinander verbindet.

Graph

Ein Graph $G = (V, E)$ besteht aus

- einer Menge von Knoten $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und
- einer Menge von Kanten $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$,

wobei eine Kante genau zwei Knoten miteinander verbindet.

Hier betrachten wir den Graphen $\mathbf{L}^d = (\mathbf{Z}^d, \mathbf{E}^d)$, wobei

$$\mathbf{Z}^d = \{x = (x_1, \ldots, x_d) \,|\, x_i \in \mathbf{Z}, \forall 1 \leq i \leq d\}$$

und

$$\mathbf{E}^d = \left\{ \langle x, y \rangle \,|\, x, y \in \mathbf{Z}^d \text{ sodass } \sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i| = 1 \right\}.$$

Pfad

Ein Pfad von einem Knoten x zu einem Knoten y der Länge n in $G = (V, E)$ ist eine Folge

$$\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)$$

bestehend aus verschiedenen Knoten $\gamma_i \in V$, sodass $\gamma_0 = x$, $\gamma_n = y$ und $\langle \gamma_{i-1}, \gamma_i \rangle \in E$ für alle $i \in [n]$.

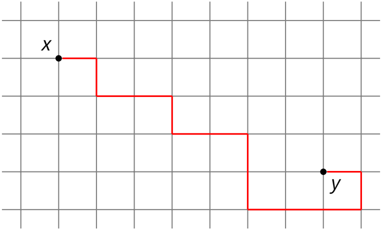
Terminologie über Graphen

Pfad

Ein Pfad von einem Knoten x zu einem Knoten y der Länge n in $G = (V, E)$ ist eine Folge

$$\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)$$

bestehend aus verschiedenen Knoten $\gamma_i \in V$, sodass $\gamma_0 = x$, $\gamma_n = y$ und $\langle \gamma_{i-1}, \gamma_i \rangle \in E$ für alle $i \in [n]$.



Kantenwahrscheinlichkeit

Je eine Kante $e \in E$ des Graphen $G = (V, E)$ ist "offen" (hier: rot gefärbt) mit Wahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$ oder "geschlossen" mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$.

Kantenperkolation

Kantenwahrscheinlichkeit

Je eine Kante $e \in E$ des Graphen $G = (V, E)$ ist "offen" (hier: rot gefärbt) mit Wahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$ oder "geschlossen" mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$.

Perkolationskonfiguration

Die Menge $E' \subseteq E$ aller offenen Kanten wird Perkolationskonfiguration genannt.

Cluster

Gegeben eine Konfiguration $E' \subseteq E$, wird ein Pfad $\gamma = (\gamma_0, \ldots, \gamma_n)$ als offen bezeichnet, wenn alle seine Kanten offen sind, d.h.

$$\langle \gamma_{i-1}, \gamma_i \rangle \in E', \quad \text{per tutte le } \; i \in [n].$$

In diesem Fall schreiben wir $\gamma_0 \leftrightarrow \gamma_n$.

Cluster

Gegeben eine Konfiguration $E' \subseteq E$, wird ein Pfad $\gamma = (\gamma_0, \ldots, \gamma_n)$ als offen bezeichnet, wenn alle seine Kanten offen sind, d.h.

$$\langle \gamma_{i-1}, \gamma_i \rangle \in E', \quad \text{per tutte le } \; i \in [n].$$

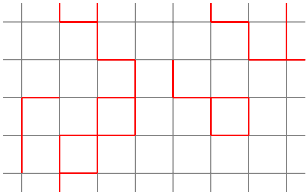
In diesem Fall schreiben wir $\gamma_0 \leftrightarrow \gamma_n$.

Cluster

Ein Cluster ist eine maximale Menge von Knoten $C \subseteq V$, sodass es zwischen jedem Paar von Knoten in C einen offenen Pfad gibt, d.h. für $x \in V$

$$C(x) := \{y \in V \,|\, x \leftrightarrow y\}.$$

Wir schreiben C für das Cluster $C(0)$.



Beispiel

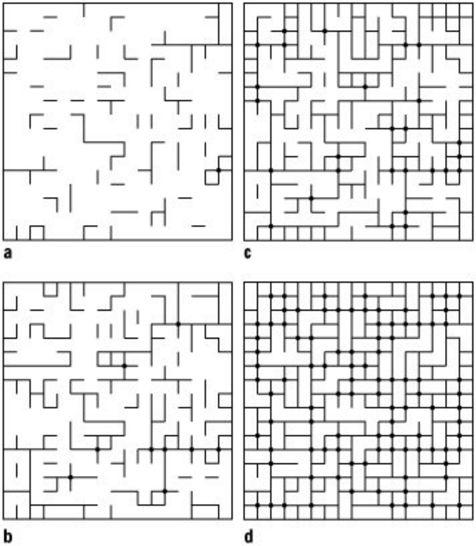


Figure 3: a) p = 0.2, b) p = 0.4, c) p = 0.6 und d) p = 0.8.

Phasenübergang

Frage: Ab welcher Wahrscheinlichkeit erhält man einen unendlichen Cluster?

Phasenübergang

Frage: Ab welcher Wahrscheinlichkeit erhält man einen unendlichen Cluster?

Perkolationswahrscheinlichkeit

Die Perkolationswahrscheinlichkeit ist

$$\theta(p) = \mathbf{P}_p(|C| = \infty).$$

Es gilt, dass $\theta(0) = 0$ und $\theta(1) = 1$ sind.

Phasenübergang

Frage: Ab welcher Wahrscheinlichkeit erhält man einen unendlichen Cluster?

Perkolationswahrscheinlichkeit

Die Perkolationswahrscheinlichkeit ist

$$\theta(p) = \mathbf{P}_p(|C| = \infty).$$

Es gilt, dass $\theta(0) = 0$ und $\theta(1) = 1$ sind.

Kritische Wahrscheinlichkeit

Die kritische Wahrscheinlichkeit wird folgendermassen definiert:

$$p_c = \sup\{p \ : \ \theta(p) = 0\}.$$

Phasenübergang

Frage: Ab welcher Wahrscheinlichkeit erhält man einen unendlichen Cluster?

Perkolationswahrscheinlichkeit

Die Perkolationswahrscheinlichkeit ist

$$\theta(p) = \mathbf{P}_p(|C| = \infty).$$

Es gilt, dass $\theta(0) = 0$ und $\theta(1) = 1$ sind.

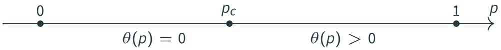
Kritische Wahrscheinlichkeit

Die kritische Wahrscheinlichkeit wird folgendermassen definiert:

$$p_c = \sup\{p \ : \ \theta(p) = 0\}.$$

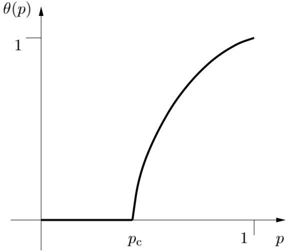
Es folgt, dass

$$\theta(p) \begin{cases} = 0 & \text{falls } p < p_c \\ > 0 & \text{falls } p > p_c \end{cases}$$



Wir betrachten die Perkolationsfunktion θ:

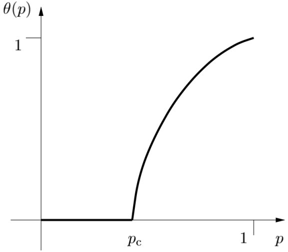
$$\begin{aligned}\theta \;:\; [0,1] &\to [0,1]\\ p &\mapsto \theta(p).\end{aligned}$$



Phasenübergang

Wir betrachten die Perkolationsfunktion θ:

$$\begin{aligned} \theta \;:\; [0,1] &\to [0,1] \\ p &\mapsto \theta(p). \end{aligned}$$



Die Veränderung der qualitativen Eigenschaften eines Systems, wenn ein kritischer Wert überschreitet wird, wird als Phasenübergang bezeichnet.

Perkolation in Z

Perkolation in $\mathbf{Z}$

Wir betrachten das eindimensionale Gitter $\mathbf{L} = (\mathbf{Z}, \mathbf{E})$.

Satz

Die kritische Wahrscheinlichkeit $p_c(1)$ für das eindimensionale Gitter $\mathbf{L}$ ist

$$p_c(1) = 1.$$

Beweis:

Perkolation in Z

Beweis:

- Wir zeigen zuerst, dass es 2^k Kanten zwischen den Knoten 2^k und 2^{k+1} gibt.

Beweis:

* Wir zeigen zuerst, dass es 2^k Kanten zwischen den Knoten 2^k und 2^{k+1} gibt.
* Wir definieren das Ereignis A_k durch

  $A_k = \{\text{Alle Kanten zwischen den Knoten } 2^k \text{ und } 2^{k+1} \text{ und zwischen den Knoten } -2^{k+1} \text{ und } -2^k \text{ sind offen}\}.$

  Die Ereignisse A_k^1 :={Alle Kanten zwischen den Knoten 2^k und 2^{k+1} sind offen} und A_k^2 :={Alle Kanten zwischen den Knoten -2^{k+1} und -2^k sind offen} sind unabhängig, und es gilt, dass $A_k = A_k^1 \cap A_k^2$.

Perkolation in Z

Beweis:

- Wir zeigen zuerst, dass es 2^k Kanten zwischen den Knoten 2^k und 2^{k+1} gibt.
- Wir definieren das Ereignis A_k durch
  $A_k = \{\text{Alle Kanten zwischen den Knoten } 2^k \text{ und } 2^{k+1} \text{ und zwischen den Knoten } -2^{k+1} \text{ und } -2^k \text{ sind offen}\}.$
  Die Ereignisse A_k^1 :={Alle Kanten zwischen den Knoten 2^k und 2^{k+1} sind offen} und A_k^2 :={Alle Kanten zwischen den Knoten -2^{k+1} und -2^k sind offen} sind unabhängig, und es gilt, dass $A_k = A_k^1 \cap A_k^2$.
- Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A_k wie folgt:

$$\mathbf{P}_p(A_k) = \mathbf{P}_p(A_k^1 \cap A_k^2) = \mathbf{P}_p(A_k^1) \cdot \mathbf{P}_p(A_k^2) = \overbrace{(p \cdot p \cdot p \cdot \dots \cdot p)}^{2^k \text{ Male}} \cdot \overbrace{(p \cdot p \cdot p \cdot \dots \cdot p)}^{2^k \text{ Male}} = p^{2^{k+1}}.$$

Beweis:

- Wir zeigen zuerst, dass es 2^k Kanten zwischen den Knoten 2^k und 2^{k+1} gibt.
- Wir definieren das Ereignis A_k durch
  $A_k = \{\text{Alle Kanten zwischen den Knoten } 2^k \text{ und } 2^{k+1} \text{ und zwischen den Knoten } -2^{k+1} \text{ und } -2^k \text{ sind offen}\}.$
  Die Ereignisse A_k^1 :={Alle Kanten zwischen den Knoten 2^k und 2^{k+1} sind offen} und A_k^2 :={Alle Kanten zwischen den Knoten -2^{k+1} und -2^k sind offen} sind unabhängig, und es gilt, dass $A_k = A_k^1 \cap A_k^2$.
- Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A_k wie folgt:

$$\mathbf{P}_p(A_k) = \mathbf{P}_p(A_k^1 \cap A_k^2) = \mathbf{P}_p(A_k^1) \cdot \mathbf{P}_p(A_k^2) = \overbrace{(p \cdot p \cdot p \cdot \cdots \cdot p)}^{2^k \text{ Male}} \cdot \overbrace{(p \cdot p \cdot p \cdot \cdots \cdot p)}^{2^k \text{ Male}} = p^{2^{k+1}}.$$

- Wir erhalten einen unendlichen Cluster, wenn das Ereignis A_k für unendlich viele k gilt, d.h. wenn $E := \limsup_{k\to\infty} A_k$ eintritt. Also folgt

$$\theta(p) = \mathbf{P}_p(|C| = \infty) = \mathbf{P}_p(E).$$

Beweis:

* Wir zeigen zuerst, dass es 2^k Kanten zwischen den Knoten 2^k und 2^{k+1} gibt.
* Wir definieren das Ereignis A_k durch
  $A_k = \{\text{Alle Kanten zwischen den Knoten } 2^k \text{ und } 2^{k+1} \text{ und zwischen den Knoten } -2^{k+1} \text{ und } -2^k \text{ sind offen}\}$.
  Die Ereignisse A_k^1 :={Alle Kanten zwischen den Knoten 2^k und 2^{k+1} sind offen} und A_k^2 :={Alle Kanten zwischen den Knoten -2^{k+1} und -2^k sind offen} sind unabhängig, und es gilt, dass $A_k = A_k^1 \cap A_k^2$.
* Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A_k wie folgt:

$$\mathbf{P}_p(A_k) = \mathbf{P}_p(A_k^1 \cap A_k^2) = \mathbf{P}_p(A_k^1) \cdot \mathbf{P}_p(A_k^2) = \overbrace{(p \cdot p \cdot p \cdot \cdots \cdot p)}^{2^k \text{ Male}} \cdot \overbrace{(p \cdot p \cdot p \cdot \cdots \cdot p)}^{2^k \text{ Male}} = p^{2^{k+1}}.$$

* Wir erhalten einen unendlichen Cluster, wenn das Ereignis A_k für unendlich viele k gilt, d.h. wenn $E := \limsup_{k \to \infty} A_k$ eintritt. Also folgt

$$\theta(p) = \mathbf{P}_p(|C| = \infty) = \mathbf{P}_p(E).$$

* Betrachte die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}_p(A_k) = \sum_{k=0}^{\infty} p^{2^{k+1}}$.

Beweis:

- Wir zeigen zuerst, dass es 2^k Kanten zwischen den Knoten 2^k und 2^{k+1} gibt.
- Wir definieren das Ereignis A_k durch

  $A_k = \{\text{Alle Kanten zwischen den Knoten } 2^k \text{ und } 2^{k+1} \text{ und zwischen den Knoten } -2^{k+1} \text{ und } -2^k \text{ sind offen}\}.$

  Die Ereignisse A_k^1 :={Alle Kanten zwischen den Knoten 2^k und 2^{k+1} sind offen} und A_k^2 :={Alle Kanten zwischen den Knoten -2^{k+1} und -2^k sind offen} sind unabhängig, und es gilt, dass $A_k = A_k^1 \cap A_k^2$.
- Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A_k wie folgt:

$$\mathbf{P}_p(A_k) = \mathbf{P}_p(A_k^1 \cap A_k^2) = \mathbf{P}_p(A_k^1) \cdot \mathbf{P}_p(A_k^2) = \overbrace{(p \cdot p \cdot p \cdot \dots \cdot p)}^{2^k \text{ Male}} \cdot \overbrace{(p \cdot p \cdot p \cdot \dots \cdot p)}^{2^k \text{ Male}} = p^{2^{k+1}}.$$

- Wir erhalten einen unendlichen Cluster, wenn das Ereignis A_k für unendlich viele k gilt, d.h. wenn $E := \limsup_{k \to \infty} A_k$ eintritt. Also folgt

$$\theta(p) = \mathbf{P}_p(|C| = \infty) = \mathbf{P}_p(E).$$

- Betrachte die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}_p(A_k) = \sum_{k=0}^{\infty} p^{2^{k+1}}$. Ist $p < 1$, so konvergiert die Reihe. Aus dem Lemma von Borel-Cantelli folgt dann, dass $\theta(p) = 0$. Ist $p = 1$, dann sind alle Kanten offen und damit $\theta(p) = 1$. Als ist $p_c(1) = 1$.

Perkolation in Z^2

Perkolation in $\mathbf{Z}^2$

Theorem

Für das d-dimensionale Gitter $\mathbf{L}^d = (\mathbf{Z}^d, \mathbf{E}^d)$ existiert ein kritischer Wert $p_c(d) \in [0, 1]$.

Perkolation in $\mathbf{Z}^2$

Theorem

Für das d-dimensionale Gitter $\mathbf{L}^d = (\mathbf{Z}^d, \mathbf{E}^d)$ existiert ein kritischer Wert $p_c(d) \in [0, 1]$.

Theorem [Kesten, 1982]

Die kritische Wahrscheinlichkeit $p_c(2)$ für das quadratische Gitter $\mathbf{L}^2$ ist $p_c(2) = \frac{1}{2}$.

Perkolation in $\mathbf{Z}^2$

Theorem

Für das d-dimensionale Gitter $\mathbf{L}^d = (\mathbf{Z}^d, \mathbf{E}^d)$ existiert ein kritischer Wert $p_c(d) \in [0, 1]$.

Theorem [Kesten, 1982]

Die kritische Wahrscheinlichkeit $p_c(2)$ für das quadratische Gitter $\mathbf{L}^2$ ist $p_c(2) = \frac{1}{2}$.

Satz 1

Wenn $p < \frac{1}{3}$, dann gillt $\theta(p) = 0$. Also ist $p_c(2) \geq \frac{1}{3}$

Satz 2

Wenn $p > \frac{2}{3}$, dann gilt $\theta(p) > 0$. Also ist $p_c(2) \leq \frac{2}{3}$.

Beweis vom *Satz 1*:

Beweis vom *Satz 1*:

- Wir definieren das Ereignis

$$F_n := \{\text{es gibt mindestens einen offenen Pfad vom Ursprung der Länge } n, \\ \text{der jeden Gitterpunkt höchstens einmal besucht.}\}.$$

Man erkennt, dass $\{|C| = \infty\} \subseteq F_n \; \forall n$ ist.

Beweis vom *Satz 1*:

* Wir definieren das Ereignis

$$F_n := \{\text{es gibt mindestens einen offenen Pfad vom Ursprung der Länge } n, \\ \text{der jeden Gitterpunkt höchstens einmal besucht.}\}.$$

  Man erkennt, dass $\{|C| = \infty\} \subseteq F_n \; \forall n$ ist.

* Sei $\sigma(n)$ die Anzahl der im Ursprung startenden Pfade der Länge n, der jeden Gitterpunkt höchstens einmal besucht, und sei $N(n)$ die Anzahl solcher Pfaden, die offen sind. Es folgt, dass $F_n = \{N(n) \geq 1\}$.

Beweis vom *Satz 1*:

* Wir definieren das Ereignis

$$F_n := \{\text{es gibt mindestens einen offenen Pfad vom Ursprung der Länge } n, \\ \text{der jeden Gitterpunkt höchstens einmal besucht.}\}.$$

  Man erkennt, dass $\{|C| = \infty\} \subseteq F_n \; \forall n$ ist.
* Sei $\sigma(n)$ die Anzahl der im Ursprung startenden Pfade der Länge n, der jeden Gitterpunkt höchstens einmal besucht, und sei $N(n)$ die Anzahl solcher Pfaden, die offen sind. Es folgt, dass $F_n = \{N(n) \geq 1\}$.
* Es gilt, dass $\mathbf{E}_p[N(n)] = \sigma(n) \cdot p^n$. Man merkt, dass $\sigma(n) \leq 4 \cdot 3^{n-1}$. Also ist $\mathbf{E}_p[N(n)] \leq 4 \cdot 3^{n-1} \cdot p^n$.

Beweis vom *Satz 1*:

* Wir definieren das Ereignis

$$F_n := \{\text{es gibt mindestens einen offenen Pfad vom Ursprung der Länge } n,$$
$$\text{der jeden Gitterpunkt höchstens einmal besucht.}\}.$$

Man erkennt, dass $\{|C| = \infty\} \subseteq F_n \ \forall n$ ist.

* Sei $\sigma(n)$ die Anzahl der im Ursprung startenden Pfade der Länge n, der jeden Gitterpunkt höchstens einmal besucht, und sei $N(n)$ die Anzahl solcher Pfaden, die offen sind. Es folgt, dass $F_n = \{N(n) \geq 1\}$.
* Es gilt, dass $\mathbf{E}_p[N(n)] = \sigma(n) \cdot p^n$. Man merkt, dass $\sigma(n) \leq 4 \cdot 3^{n-1}$. Also ist $\mathbf{E}_p[N(n)] \leq 4 \cdot 3^{n-1} \cdot p^n$.
* Aus der Markov-Ungleichung erhalten wir

$$\mathbf{P}_p(F_n) = \mathbf{P}_p(N(n) \geq 1) \leq \mathbf{E}_p[N(n)] \leq 4 \cdot 3^{n-1} \cdot p^n.$$

Da $p < \frac{1}{3}$, gilt, dass $\lim_{n\to\infty} 4 \cdot 3^{n-1} \cdot p^n = 0$.

Beweis vom *Satz 1*:

* Wir definieren das Ereignis

$$F_n := \{\text{es gibt mindestens einen offenen Pfad vom Ursprung der Länge } n,$$
$$\text{der jeden Gitterpunkt höchstens einmal besucht.}\}.$$

Man erkennt, dass $\{|C| = \infty\} \subseteq F_n \; \forall n$ ist.

* Sei $\sigma(n)$ die Anzahl der im Ursprung startenden Pfade der Länge n, der jeden Gitterpunkt höchstens einmal besucht, und sei $N(n)$ die Anzahl solcher Pfaden, die offen sind. Es folgt, dass $F_n = \{N(n) \geq 1\}$.
* Es gilt, dass $\mathbf{E}_p[N(n)] = \sigma(n) \cdot p^n$. Man merkt, dass $\sigma(n) \leq 4 \cdot 3^{n-1}$. Also ist $\mathbf{E}_p[N(n)] \leq 4 \cdot 3^{n-1} \cdot p^n$.
* Aus der Markov-Ungleichung erhalten wir

$$\mathbf{P}_p(F_n) = \mathbf{P}_p(N(n) \geq 1) \leq \mathbf{E}_p[N(n)] \leq 4 \cdot 3^{n-1} \cdot p^n.$$

Da $p < \frac{1}{3}$, gilt, dass $\lim_{n\to\infty} 4 \cdot 3^{n-1} \cdot p^n = 0$.

* Es folgt, dass

$$\theta(p) = \mathbf{P}_p(|C| = \infty) \leq \mathbf{P}_p(F_n) \leq 4 \cdot 3^{n-1} \cdot p^n, \quad \forall n.$$

So schliesst man, dass $\theta(p) = 0$ für $p < \frac{1}{3}$ ist.

Einsatz für den Unterricht

Einige Ideen

* Es zielt hauptsächlich auf die spezifische Option (PAM) oder die Maturarbeit ab.
* Die Perkolationstheorie ermöglicht es uns, einige Begriffe der Graphen- und der Wahrscheinlichkeitstheorie einzuführen.
* Simulationen
* Die Perkolationstheorie ist durch reale Situationen motiviert. Aus diesem Grund kann die Erläuterung auch nur einiger Unterthemen der Perkolationstheorie den Gymnasiasten aufzeigen, wie ein Problem modelliert und dann mit Werkzeugen der Mathematik studiert werden kann.

Literaturverzeichnis

Literaturverzeichnis

- Beffara, V., Sidoravicius, V.: Percolation Theory, Encyclopedia of Mathematical Physics, 2006. https://arxiv.org/pdf/math/0507220.pdf
- Duminil-Copin, H.: La percolation, jeu de pavages aléatoires, 2012. http://images.math.cnrs.fr/La-percolation-jeu-de-pavages-aleatoires?lang=fr
- Duminil-Copin, H.: Introduction to Bernoulli percolation, 2018. https://www.ihes.fr/~/duminil/publi/2017percolation.pdf
- Grimmett, G.: Percolation, Springer 1999.
- Kennedy, T.: Lecture Notes on Introduction to Mathematical Physics, University of Arizona 2008. https://www.math.arizona.edu/~tgk/541/chap2.pdf
- Stauffer, D., Aharony, A.: Perkolationstheorie. Eine Einführung. Weinheim 1995.
- Tassion, V.: Lecture Notes on Percolation, ETH Autumn 2020. https://metaphor.ethz.ch/x/2020/hs/401-4607-59L/
- Théret, M.: Internet, feux de forêt et porosité: trouvez le point commun, SMF 2013. https://smf.emath.fr/sites/smf.emath.fr/files/57-62.pdf

VIELEN DANK FÜR IHRE AUFMERKSAMKEIT!