# Introduzione alla teoria della percolazione

32. Schweizerischer Tag über Mathematik und Unterricht

VANESSA PICCOLO

14 settembre 2022

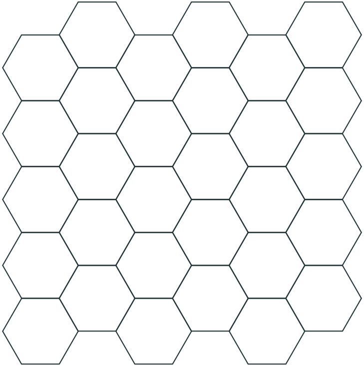
ENS de Lyon

Lavoro svolto durante il diploma di insegnamento all'ETH (supervisione: Prof. Dr. Akveld).

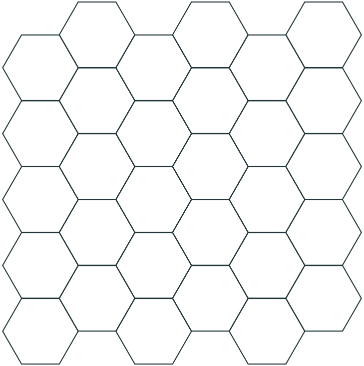
# Un primo esempio

# Un primo esempio

**Problema:** Vogliamo rivestire la stanza con piastrelle esagonali rosse e blu.



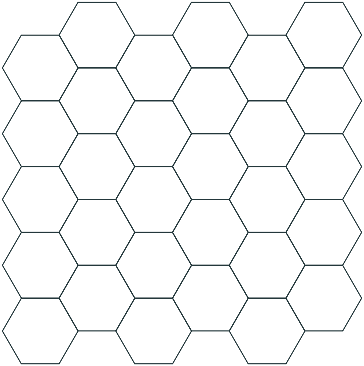
**Problema:** Vogliamo rivestire la stanza con piastrelle esagonali rosse e blu.



**Coloriamo gli esagoni in modo casuale:**

# Un primo esempio

**Problema:** Vogliamo rivestire la stanza con piastrelle esagonali rosse e blu.

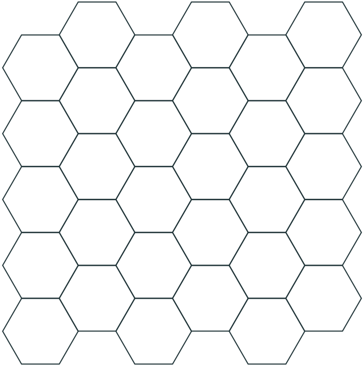


**Coloriamo gli esagoni in modo casuale:**

Parametro: $0 \leq p \leq 1$.

# Un primo esempio

**Problema:** Vogliamo rivestire la stanza con piastrelle esagonali rosse e blu.



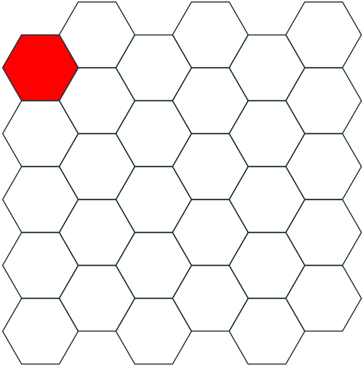
$p = \frac{1}{2}$

**Coloriamo gli esagoni in modo casuale:**

Parametro: $0 \leq p \leq 1$.
Ogni esagono è colorato in:

* rosso con probabilità $p$,
* blu con probabilità $1 - p$.

**Problema:** Vogliamo rivestire la stanza con piastrelle esagonali rosse e blu.



$p = \frac{1}{2}$

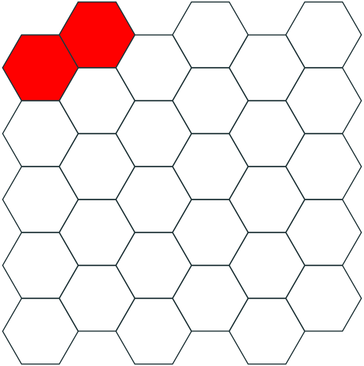
**Coloriamo gli esagoni in modo casuale:**

Parametro: $0 \leq p \leq 1$.
Ogni esagono è colorato in:

- rosso con probabilità $p$,
- blu con probabilità $1 - p$.

# Un primo esempio

**Problema:** Vogliamo rivestire la stanza con piastrelle esagonali rosse e blu.



$p = \frac{1}{2}$

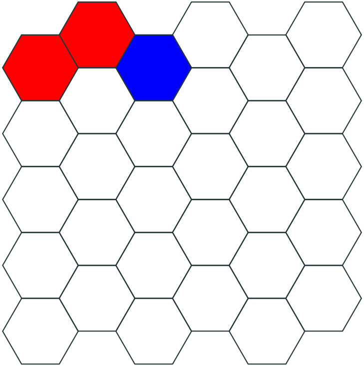
**Coloriamo gli esagoni in modo casuale:**

Parametro: $0 \leq p \leq 1$.
Ogni esagono è colorato in:

* rosso con probabilità $p$,
* blu con probabilità $1 - p$.

# Un primo esempio

**Problema:** Vogliamo rivestire la stanza con piastrelle esagonali rosse e blu.



$p = \frac{1}{2}$

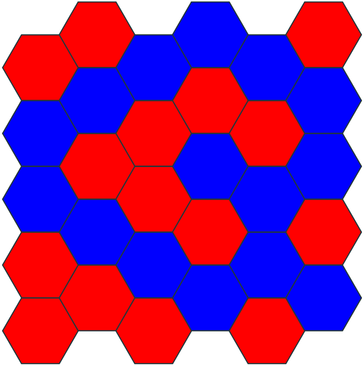
**Coloriamo gli esagoni in modo casuale:**

Parametro: $0 \leq p \leq 1$.
Ogni esagono è colorato in:

- rosso con probabilità $p$,
- blu con probabilità $1 - p$.

# Un primo esempio

**Problema:** Vogliamo rivestire la stanza con piastrelle esagonali rosse e blu.



$p = \frac{1}{2}$

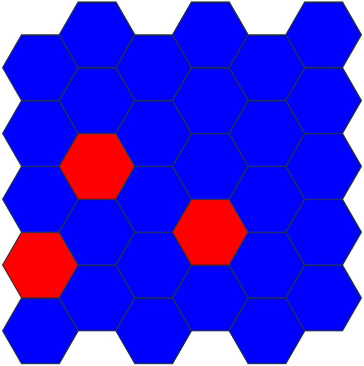
**Coloriamo gli esagoni in modo casuale:**

Parametro: $0 \leq p \leq 1$.
Ogni esagono è colorato in:

* rosso con probabilità $p$,
* blu con probabilità $1 - p$.

# Un primo esempio

**Problema:** Vogliamo rivestire la stanza con piastrelle esagonali rosse e blu.



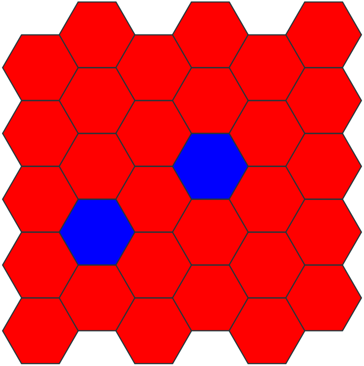
$p = \frac{1}{10}$

**Coloriamo gli esagoni in modo casuale:**

Parametro: $0 \leq p \leq 1$.
Ogni esagono è colorato in:

- rosso con probabilità $p$,
- blu con probabilità $1 - p$.

**Problema:** Vogliamo rivestire la stanza con piastrelle esagonali rosse e blu.



$p = \frac{9}{10}$

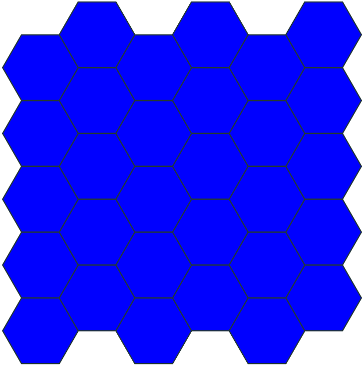
**Coloriamo gli esagoni in modo casuale:**

Parametro: $0 \leq p \leq 1$.
Ogni esagono è colorato in:

- rosso con probabilità $p$,
- blu con probabilità $1 - p$.

# Un primo esempio

**Problema:** Vogliamo rivestire la stanza con piastrelle esagonali rosse e blu.



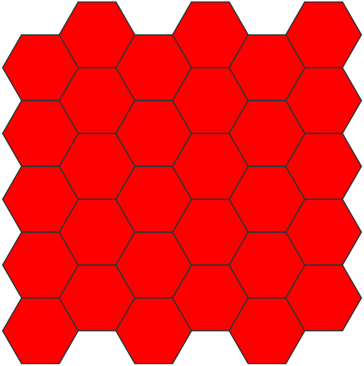
$p = 0$

**Coloriamo gli esagoni in modo casuale:**

Parametro: $0 \leq p \leq 1$.
Ogni esagono è colorato in:

* rosso con probabilità $p$,
* blu con probabilità $1 - p$.

**Problema:** Vogliamo rivestire la stanza con piastrelle esagonali rosse e blu.



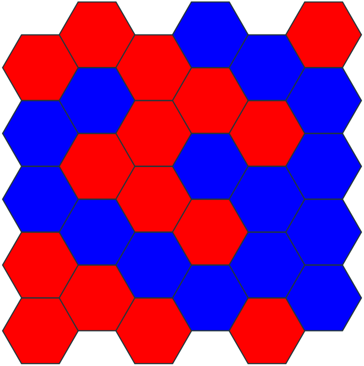
$p = 1$

**Coloriamo gli esagoni in modo casuale:**

Parametro: $0 \leq p \leq 1$.
Ogni esagono è colorato in:

- rosso con probabilità $p$,
- blu con probabilità $1 - p$.

**Problema:** Vogliamo rivestire la stanza con piastrelle esagonali rosse e blu.



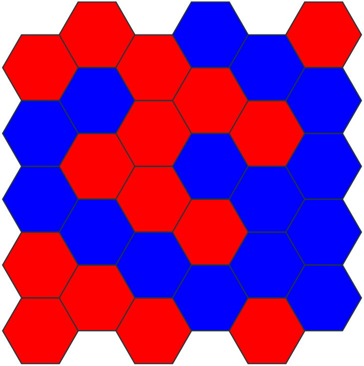
**Coloriamo gli esagoni in modo casuale:**

Parametro: $0 \leq p \leq 1$.
Ogni esagono è colorato in:

- rosso con probabilità $p$,
- blu con probabilità $1 - p$.

# Un primo esempio

**Problema:** Vogliamo rivestire la stanza con piastrelle esagonali rosse e blu.



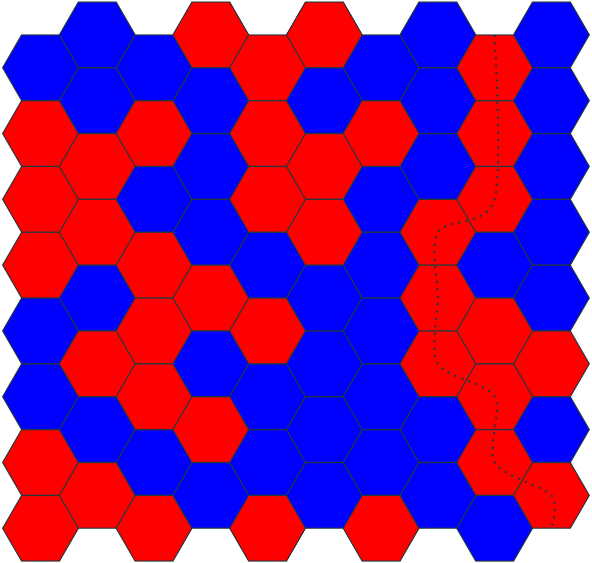
**Coloriamo gli esagoni in modo casuale:**

Parametro: $0 \leq p \leq 1$.
Ogni esagono è colorato in:

- rosso con probabilità $p$,
- blu con probabilità $1 - p$.

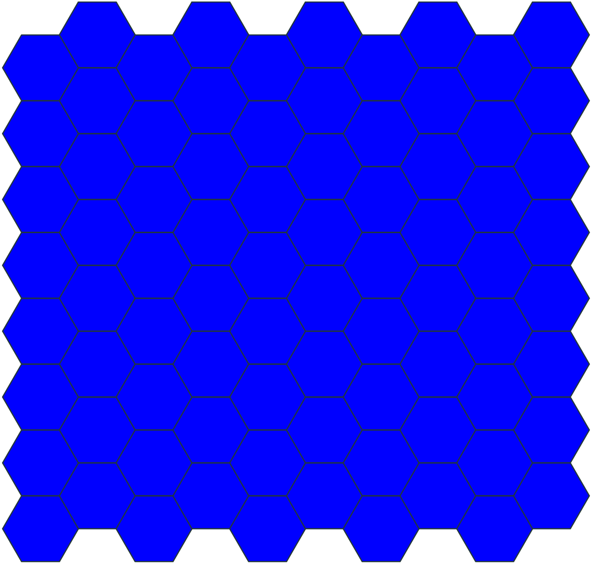
Cammino rosso: cammino su esagoni rossi.
Cluster rosso: "isola" rossa, componente rossa collegata.

**Domanda:** Esiste un cammino rosso dall'alto verso il basso in una superficie quadrata?



## Un primo esempio

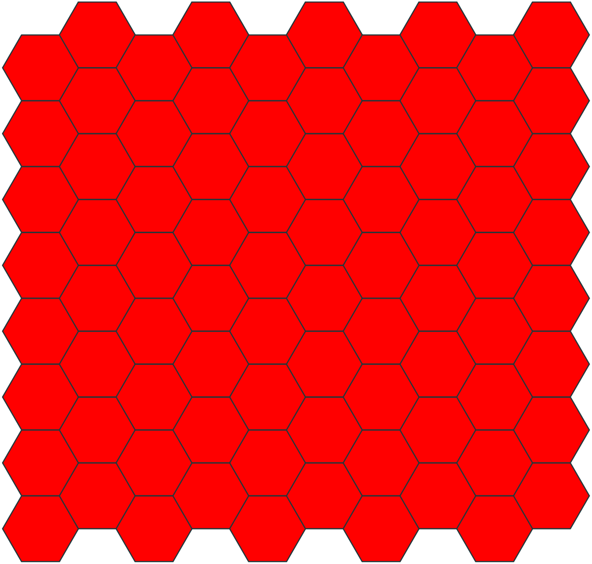
**Domanda:** Esiste un cammino rosso dall'alto verso il basso in una superficie quadrata?



$p = 0$

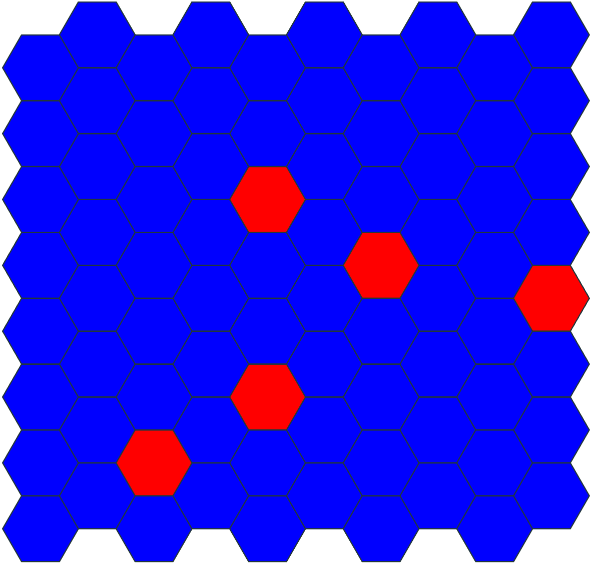
# Un primo esempio

**Domanda:** Esiste un cammino rosso dall'alto verso il basso in una superficie quadrata?



$p = 1$

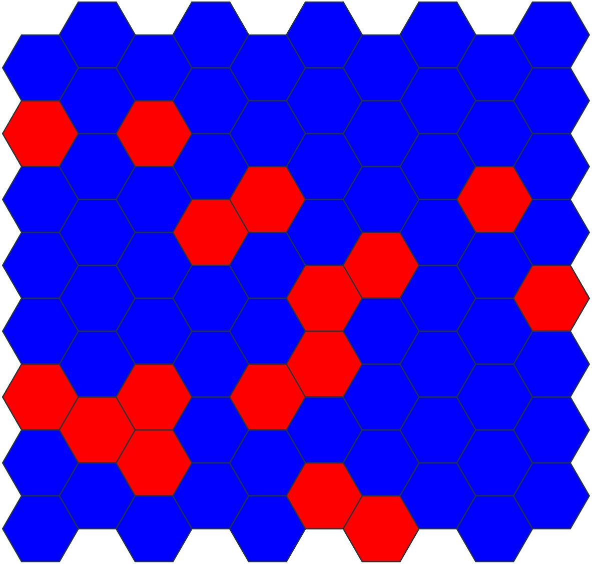
**Domanda:** Esiste un cammino rosso dall'alto verso il basso in una superficie quadrata?



$p = 0.1$

# Un primo esempio

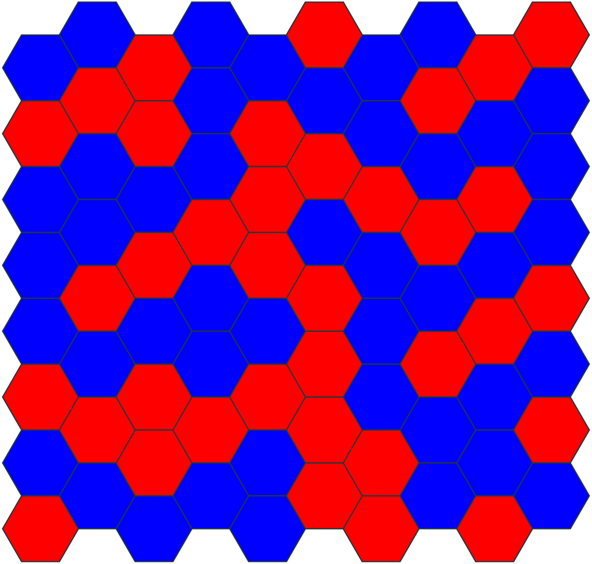
**Domanda:** Esiste un cammino rosso dall'alto verso il basso in una superficie quadrata?



$p = 0.2$

# Un primo esempio

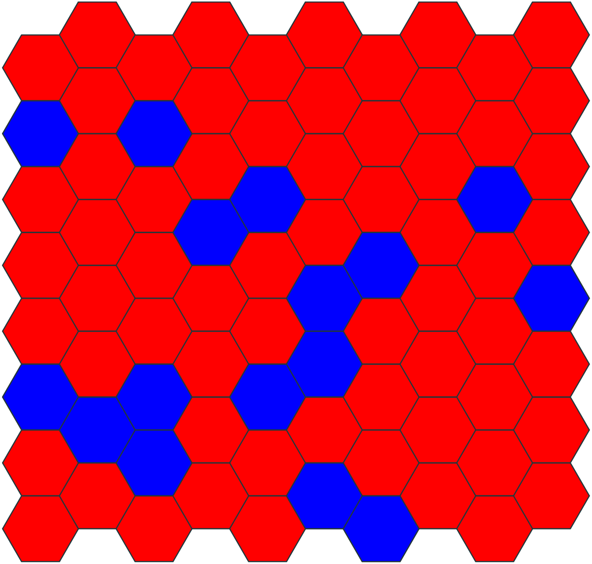
**Domanda:** Esiste un cammino rosso dall'alto verso il basso in una superficie quadrata?



$p = 0.5$

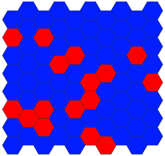
# Un primo esempio

**Domanda:** Esiste un cammino rosso dall'alto verso il basso in una superficie quadrata?

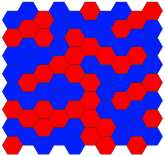


$p = 0.8$

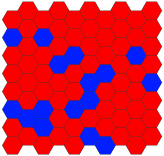
**Domanda:** Esiste un cammino rosso dall'alto verso il basso in una superficie quadrata?



(a) $p < \frac{1}{2}$



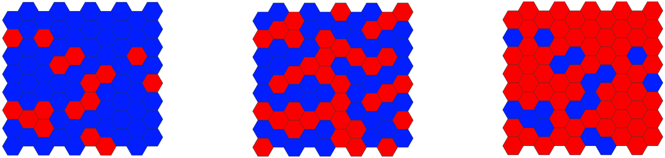
(b) $p = \frac{1}{2}$



(c) $p > \frac{1}{2}$

# Un primo esempio

**Domanda:** Esiste un cammino rosso dall'alto verso il basso in una superficie quadrata?



(a) $p < \frac{1}{2}$ (b) $p = \frac{1}{2}$ (c) $p > \frac{1}{2}$

**Risposta:**

**Teorema (Kesten, 1980)**

Per la percolazione con parametro $p \in [0, 1]$, si ha che

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}_p \left[\text{esiste un cammino rosso dall'altro verso il basso in un quadrato di lunghezza } n\right]$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{if } p < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{if } p = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{if } p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

# Definizione

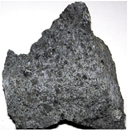
# Definizione

Il termine percolazione (dal latino *percolare*, “filtrare” o “passare attraverso”) si riferisce al passaggio di un fluido attraverso un mezzo più o meno permeabile.
In fisica e matematica, il termine percolazione descrive un fenomeno fisico critico che presenta una transizione da uno stato all’altro di un sistema. Questo significa che c’è un parametro naturale nel modello, al cui raggiungimento si verifica un cambiamento del sistema.

# Motivazione

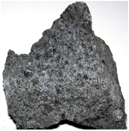
# Motivazione

- Come scorre l'acqua nelle rocce?

# Motivazione

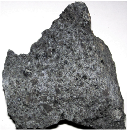
- Come scorre l'acqua nelle rocce?

- Come si propagano gli incendi nelle foreste?

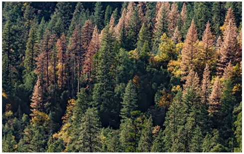
# Motivazione

* Come scorre l’acqua nelle rocce?



* Come si propagano gli incendi nelle foreste?

* Come si propagano le malattie nelle foreste?



# Un modello matematico

Di cosa abbiamo bisogno per una rappresentazione semplice e schematica?

* Siti: Dove si trovano gli alberi?
* Legami che connettono i siti: quali percorsi sono accessibili?
* Struttura geometrica per definire la connessione: se un albero è malato, quali alberi sono direttamente esposti al contagio?

# Un modello matematico

Di cosa abbiamo bisogno per una rappresentazione semplice e schematica?

* Siti: Dove si trovano gli alberi?
* Legami che connettono i siti: quali percorsi sono accessibili?
* Struttura geometrica per definire la connessione: se un albero è malato, quali alberi sono direttamente esposti al contagio?

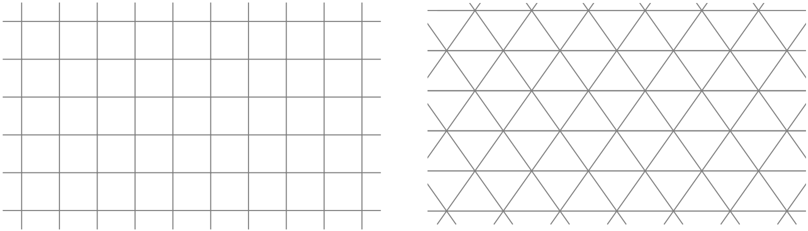
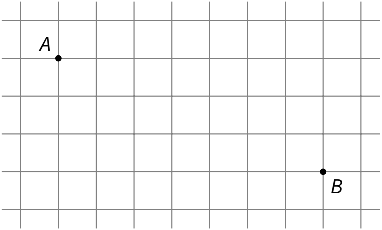


**Figure 2:** Il reticolo quadrato (a sinistra) e il reticolo triangolare (a destra).

Si forma un grafo in cui ogni albero è un vertice (sito) e due alberi sono collegati da uno spigolo (legame) se sono abbastanza vicini da contagiarsi a vicenda.

# Un modello matematico

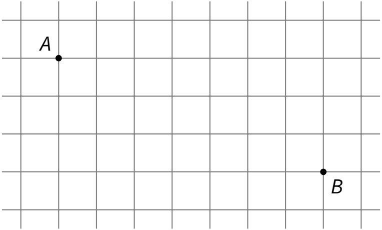



Coloriamo i legami in modo casuale:

Parametro: $0 \leq p \leq 1$.

Ogni legame è colorato in rosso, indipendentemente l'uno dall'altro, con probabilità $p$. Un legame colorato significa che il contagio tra due alberi vicini si è verificata. I legami non colorati corrispondono alle coppie di alberi tra cui la malattia non viene trasmessa.

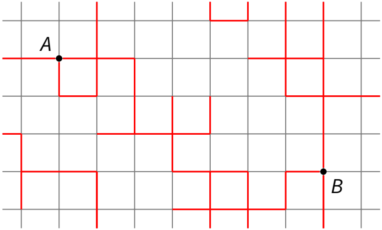
# Un modello matematico




Coloriamo i legami in modo casuale:

Parametro: $0 \leq p \leq 1$.

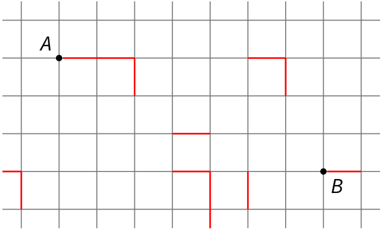
Ogni legame è colorato in rosso, indipendentemente l'uno dall'altro, con probabilità $p$. Un legame colorato significa che il contagio tra due alberi vicini si è verificata. I legami non colorati corrispondono alle coppie di alberi tra cui la malattia non viene trasmessa.




Coloriamo i legami in modo casuale:

Parametro: $0 \leq p \leq 1$.

Ogni legame è colorato in rosso, indipendentemente l'uno dall'altro, con probabilità $p$. Un legame colorato significa che il contagio tra due alberi vicini si è verificata. I legami non colorati corrispondono alle coppie di alberi tra cui la malattia non viene trasmessa.

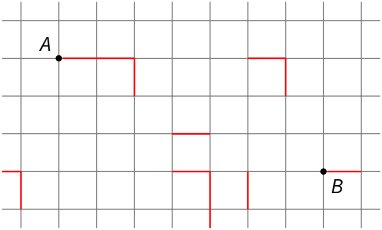



Coloriamo i legami in modo casuale:

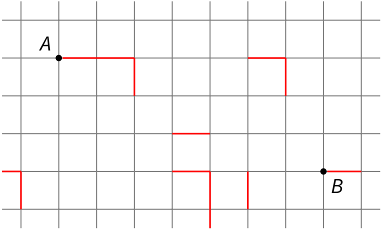
Parametro: $0 \leq p \leq 1$.

Ogni legame è colorato in rosso, indipendentemente l'uno dall'altro, con probabilità $p$. Un legame colorato significa che il contagio tra due alberi vicini si è verificata. I legami non colorati corrispondono alle coppie di alberi tra cui la malattia non viene trasmessa.

# Un modello matematico

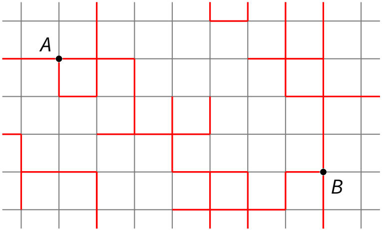


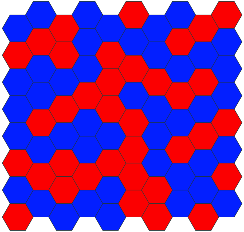

Questo modello semplificativo non tiene conto dell'aspetto temporale della diffusione della malattia: tutte le contaminazioni tra vicini avvengono contemporaneamente, istantaneamente e indipendentemente l'una dall'altra.




L'epidemia causata da un albero malato rimarrà circoscritta? O rischia di contagiare anche alberi molto distanti?

# Un modello matematico



Il modello dipende da un unico parametro: la probabilità di trasmissione, e si tratta di identificare, in base ai valori di questo parametro, la transizione di fase, ovvero la soglia critica, sotto la quale la trasmissione della malattia rimane locale. In questo caso sappiamo che la soglia vale 0.5.

# Percolazione del legame: concetti chiave

# Terminologia sui grafi

**Grafo**

Un grafo $G = (V, E)$ è costituito da

* un insieme di vertici $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e
* un insieme di spigoli (o archi) $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$,

dove uno spigolo collega due vertici.

# Terminologia sui grafi

**Grafo**

Un grafo $G = (V, E)$ è costituito da

- un insieme di vertici $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e
- un insieme di spigoli (o archi) $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$,

dove uno spigolo collega due vertici.

Si considera qui il grafo $\mathbf{L}^d = (\mathbf{Z}^d, \mathbf{E}^d)$, dove

$$\mathbf{Z}^d = \{x = (x_1, \ldots, x_d) \,|\, x_i \in \mathbf{Z}, \forall 1 \leq i \leq d\}$$

e

$$\mathbf{E}^d = \left\{ \langle x, y \rangle \,|\, x, y \in \mathbf{Z}^d \text{ tale che } \sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i| = 1 \right\}.$$

**Cammino**

Un cammino in $G = (V, E)$ dal sito $x$ al sito $y$ di lunghezza $n$ è una sequenza di siti distinti $\gamma_i \in V$

$$\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n),$$

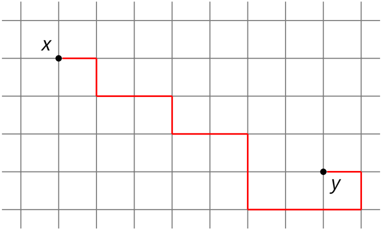
tale che $\gamma_0 = x$, $\gamma_n = y$ e $\langle \gamma_{i-1}, \gamma_i \rangle \in E$ per tutte le $i \in [n]$.

**Cammino**

Un cammino in $G = (V, E)$ dal sito $x$ al sito $y$ di lunghezza $n$ è una sequenza di siti distinti $\gamma_i \in V$

$$\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n),$$

tale che $\gamma_0 = x$, $\gamma_n = y$ e $\langle \gamma_{i-1}, \gamma_i \rangle \in E$ per tutte le $i \in [n]$.



# Percolazione del legame

### Probabilità del legame

Ciascun legame $e \in E$ di un grafo $G = (V, E)$ è "aperto" (qui: colorato in rosso) con probabilità $p \in [0, 1]$ o "chiuso" con probabilità $1 - p$, e si presume che siano indipendenti.

# Percolazione del legame

**Probabilità del legame**

Ciascun legame $e \in E$ di un grafo $G = (V, E)$ è "aperto" (qui: colorato in rosso) con probabilità $p \in [0, 1]$ o "chiuso" con probabilità $1 - p$, e si presume che siano indipendenti.

**Configurazione del grafo**

L'insieme $E' \subseteq E$ di tutti i legami aperti è chiamato configurazione di percolazione.

## Cluster

Data una configurazione $E' \subseteq E$, un cammino $\gamma = (\gamma_0, \ldots, \gamma_n)$ è detto aperto se tutti i suoi legami sono aperti, i.e.

$$\langle \gamma_{i-1}, \gamma_i \rangle \in E', \quad \text{per tutte le } \; i \in [n].$$

In questo caso, scriviamo $\gamma_0 \leftrightarrow \gamma_n$.

# Cluster

Data una configurazione $E' \subseteq E$, un cammino $\gamma = (\gamma_0, \ldots, \gamma_n)$ è detto aperto se tutti i suoi legami sono aperti, i.e.

$$\langle \gamma_{i-1}, \gamma_i \rangle \in E', \quad \text{per tutte le } i \in [n].$$

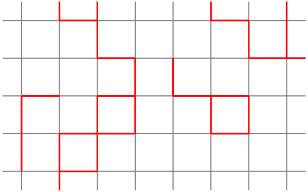
In questo caso, scriviamo $\gamma_0 \leftrightarrow \gamma_n$.

**Cluster**

Un cluster è un insieme massimale di siti $C \subseteq V$ tali che c'è un cammino aperto fra ogni coppia di siti in $C$, ovvero per $x \in V$

$$C(x) := \{y \in V \,|\, x \leftrightarrow y\}.$$

Scriviamo $C$ per il cluster $C(0)$.



# Esempio

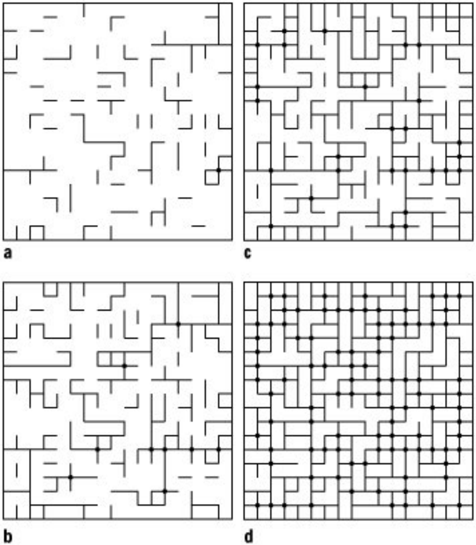



**Figure 3:** a) p = 0.2, b) p = 0.4, c) p = 0.6 und d) p = 0.8.

## Transizione di fase

**Domanda:** A partire da quale probabilità si ottiene un cluster infinito?

## Transizione di fase

**Domanda:** A partire da quale probabilità si ottiene un cluster infinito?

### Probabilità di percolazione

La probabilità di percolazione è definita:

$$\theta(p) = \mathbf{P}_p(|C| = \infty).$$

Vale che $\theta(0) = 0$ e $\theta(1) = 1$.

# Transizione di fase

**Domanda:** A partire da quale probabilità si ottiene un cluster infinito?

### Probabilità di percolazione

La probabilità di percolazione è definita:

$$\theta(p) = \mathbf{P}_p(|C| = \infty).$$

Vale che $\theta(0) = 0$ e $\theta(1) = 1$.

### Probabilità critica

La probabilità critica è definita:

$$p_c = \sup\{p \ : \ \theta(p) = 0\}.$$

**Domanda:** A partire da quale probabilità si ottiene un cluster infinito?

### Probabilità di percolazione

La probabilità di percolazione è definita:

$$\theta(p) = \mathbf{P}_p(|C| = \infty).$$

Vale che $\theta(0) = 0$ e $\theta(1) = 1$.

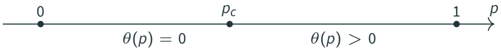
### Probabilità critica

La probabilità critica è definita:

$$p_c = \sup\{p \, : \, \theta(p) = 0\}.$$

Segue che:

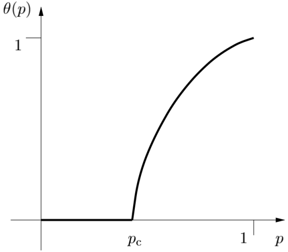
$$\theta(p) \begin{cases} = 0 & \text{se } \; p < p_c \\ > 0 & \text{se } \; p > p_c \end{cases}$$



# Transizione di fase

Considera la funzione di percolazione $\theta$:

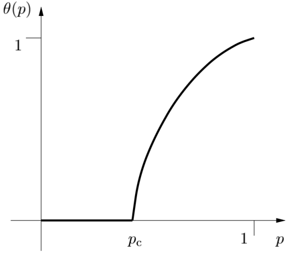
$$\begin{aligned} \theta \ : \ [0,1] &\to [0,1] \\ p &\mapsto \theta(p). \end{aligned}$$



# Transizione di fase

Considera la funzione di percolazione $\theta$:

$$\begin{aligned} \theta \ : \ [0,1] &\to [0,1] \\ p &\mapsto \theta(p). \end{aligned}$$




Il cambiamento delle proprietà qualitative di un sistema quando viene superato un valore critico è chiamato transizione di fase.

# Percolazione in Z

# Percolazione in Z

Si considera il grafo $\mathbf{L} = (\mathbf{Z}, \mathbf{E})$.

**Teorema**

La probabilità critica $p_c(1)$ per il reticolo $\mathbf{L}$ è

$$p_c(1) = 1.$$

**Dimostrazione:**

# Percolazione in Z

**Dimostrazione:**

* Dimostriamo che esistono $2^k$ legami tra i siti $2^k$ e $2^{k+1}$.

**Dimostrazione:**

* Dimostriamo che esistono $2^k$ legami tra i siti $2^k$ e $2^{k+1}$.
* Si definisce l'evento $A_k$ come

$$A_k = \{\text{Tutti i legami tra i siti } 2^k \text{ e } 2^{k+1} \text{ e tra i siti } -2^{k+1} \text{ e } -2^k \text{ sono aperti}\}.$$

Gli eventi $A_k^1$ :={tutti i legami tra i siti $2^k$ e $2^{k+1}$ sono aperti} e $A_k^2$ :={tutti i legami tra i siti $-2^{k+1}$ e $-2^k$ sono aperti} sono indipendenti, e vale che $A_k = A_k^1 \cap A_k^2$.

# Percolazione in Z

**Dimostrazione:**

- Dimostriamo che esistono $2^k$ legami tra i siti $2^k$ e $2^{k+1}$.
- Si definisce l'evento $A_k$ come

$$A_k = \{\text{Tutti i legami tra i siti } 2^k \text{ e } 2^{k+1} \text{ e tra i siti } -2^{k+1} \text{ e } -2^k \text{ sono aperti}\}.$$

  Gli eventi $A_k^1$ :={tutti i legami tra i siti $2^k$ e $2^{k+1}$ sono aperti} e $A_k^2$ :={tutti i legami tra i siti $-2^{k+1}$ e $-2^k$ sono aperti} sono indipendenti, e vale che $A_k = A_k^1 \cap A_k^2$.
- Calcoliamo la probabilità dell'evento $A_k$ come segue:

$$\mathbf{P}_p(A_k) = \mathbf{P}_p(A_k^1 \cap A_k^2) = \mathbf{P}_p(A_k^1) \cdot \mathbf{P}_p(A_k^2) = \overbrace{(p \cdot p \cdot p \cdot \cdots \cdot p)}^{2^k \text{ volte}} \cdot \overbrace{(p \cdot p \cdot p \cdot \cdots \cdot p)}^{2^k \text{ volte}} = p^{2^{k+1}}.$$

**Dimostrazione:**

* Dimostriamo che esistono $2^k$ legami tra i siti $2^k$ e $2^{k+1}$.
* Si definisce l'evento $A_k$ come

$$A_k = \{\text{Tutti i legami tra i siti } 2^k \text{ e } 2^{k+1} \text{ e tra i siti } -2^{k+1} \text{ e } -2^k \text{ sono aperti}\}.$$

Gli eventi $A_k^1$ :={tutti i legami tra i siti $2^k$ e $2^{k+1}$ sono aperti} e $A_k^2$ :={tutti i legami tra i siti $-2^{k+1}$ e $-2^k$ sono aperti} sono indipendenti, e vale che $A_k = A_k^1 \cap A_k^2$.

* Calcoliamo la probabilità dell'evento $A_k$ come segue:

$$\mathbf{P}_p(A_k) = \mathbf{P}_p(A_k^1 \cap A_k^2) = \mathbf{P}_p(A_k^1) \cdot \mathbf{P}_p(A_k^2) = \overbrace{(p \cdot p \cdot p \cdot \cdots \cdot p)}^{2^k \text{ volte}} \cdot \overbrace{(p \cdot p \cdot p \cdot \cdots \cdot p)}^{2^k \text{ volte}} = p^{2^{k+1}}.$$

* Si ottiene un cluster infinito se l'evento $A_k$ vale per un numero infinito di $k$. Definiamo $E := \limsup_{k \to \infty} A_k$. Segue che

$$\theta(p) = \mathbf{P}_p(|C| = \infty) = \mathbf{P}_p(E).$$

**Dimostrazione:**

* Dimostriamo che esistono $2^k$ legami tra i siti $2^k$ e $2^{k+1}$.
* Si definisce l'evento $A_k$ come
$$A_k = \{\text{Tutti i legami tra i siti } 2^k \text{ e } 2^{k+1} \text{ e tra i siti } -2^{k+1} \text{ e } -2^k \text{ sono aperti}\}.$$
Gli eventi $A_k^1$ :={tutti i legami tra i siti $2^k$ e $2^{k+1}$ sono aperti} e $A_k^2$ :={tutti i legami tra i siti $-2^{k+1}$ e $-2^k$ sono aperti} sono indipendenti, e vale che $A_k = A_k^1 \cap A_k^2$.
* Calcoliamo la probabilità dell'evento $A_k$ come segue:
$$\mathbf{P}_p(A_k) = \mathbf{P}_p(A_k^1 \cap A_k^2) = \mathbf{P}_p(A_k^1) \cdot \mathbf{P}_p(A_k^2) = \overbrace{(p \cdot p \cdot p \cdot \cdots \cdot p)}^{2^k \text{ volte}} \cdot \overbrace{(p \cdot p \cdot p \cdot \cdots \cdot p)}^{2^k \text{ volte}} = p^{2^{k+1}}.$$
* Si ottiene un cluster infinito se l'evento $A_k$ vale per un numero infinito di $k$. Definiamo $E := \limsup_{k \to \infty} A_k$. Segue che
$$\theta(p) = \mathbf{P}_p(|C| = \infty) = \mathbf{P}_p(E).$$
* Consideriamo la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}_p(A_k) = \sum_{k=0}^{\infty} p^{2^{k+1}}$.

**Dimostrazione:**

* Dimostriamo che esistono $2^k$ legami tra i siti $2^k$ e $2^{k+1}$.
* Si definisce l'evento $A_k$ come

$$A_k = \{\text{Tutti i legami tra i siti } 2^k \text{ e } 2^{k+1} \text{ e tra i siti } -2^{k+1} \text{ e } -2^k \text{ sono aperti}\}.$$

Gli eventi $A_k^1$ :={tutti i legami tra i siti $2^k$ e $2^{k+1}$ sono aperti} e $A_k^2$ :={tutti i legami tra i siti $-2^{k+1}$ e $-2^k$ sono aperti} sono indipendenti, e vale che $A_k = A_k^1 \cap A_k^2$.

* Calcoliamo la probabilità dell'evento $A_k$ come segue:

$$\mathbf{P}_p(A_k) = \mathbf{P}_p(A_k^1 \cap A_k^2) = \mathbf{P}_p(A_k^1) \cdot \mathbf{P}_p(A_k^2) = \overbrace{(p \cdot p \cdot p \cdot \cdots \cdot p)}^{2^k \text{ volte}} \cdot \overbrace{(p \cdot p \cdot p \cdot \cdots \cdot p)}^{2^k \text{ volte}} = p^{2^{k+1}}.$$

* Si ottiene un cluster infinito se l'evento $A_k$ vale per un numero infinito di $k$. Definiamo $E := \limsup_{k\to\infty} A_k$. Segue che

$$\theta(p) = \mathbf{P}_p(|C| = \infty) = \mathbf{P}_p(E).$$

* Consideriamo la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}_p(A_k) = \sum_{k=0}^{\infty} p^{2^{k+1}}$. Se $p < 1$, allora la serie converge e dal Lemma di Borel-Cantelli vale che $\theta(p) = 0$. Se $p = 1$, abbiamo che $\theta(p) = 1$. Si conclude che $p_c(1) = 1$.

# Percolazione in $Z^2$

**Teorema**

Per il reticolo $d$-dimensionale $\mathbf{L}^d = (\mathbf{Z}^d, \mathbf{E}^d)$ esiste un valore critico $p_c(d) \in [0, 1]$.

# Percolazione in $\mathbf{Z}^2$

**Teorema**

Per il reticolo $d$-dimensionale $\mathbf{L}^d = (\mathbf{Z}^d, \mathbf{E}^d)$ esiste un valore critico $p_c(d) \in [0, 1]$.

**Teorema [Kesten, 1982]**

La probabilità critica $p_c(2)$ per il reticolo quadratco $\mathbf{L}^2$ è $p_c(2) = \frac{1}{2}$.

# Percolazione in $\mathbf{Z}^2$

**Teorema**

Per il reticolo $d$-dimensionale $\mathbf{L}^d = (\mathbf{Z}^d, \mathbf{E}^d)$ esiste un valore critico $p_c(d) \in [0, 1]$.

**Teorema [Kesten, 1982]**

La probabilità critica $p_c(2)$ per il reticolo quadratco $\mathbf{L}^2$ è $p_c(2) = \frac{1}{2}$.

**Proposizione 1**

Se $p < \frac{1}{3}$, allora $\theta(p) = 0$. Quindi abbiamo che $p_c(2) \geq \frac{1}{3}$.

**Proposizione 2**

Se $p > \frac{2}{3}$, allora $\theta(p) > 0$. Quindi abbiamo che $p_c(2) \leq \frac{2}{3}$.

**Dimostrazione *Proposizione 1*:**

**Dimostrazione *Proposizione 1*:**

* Definiamo l'evento

$$F_n := \{\text{esiste almeno un cammino aperto di lunghezza } n \text{ che passa dall'origine e che visita ogni punto del reticolo al massimo una volta}\}.$$

Si nota che $\{|C| = \infty\} \subseteq F_n \; \forall n$.

**Dimostrazione *Proposizione 1*:**

* Definiamo l'evento

$$F_n := \{\text{esiste almeno un cammino aperto di lunghezza } n \text{ che passa dall'origine e che visita ogni punto del reticolo al massimo una volta}\}.$$

  Si nota che $\{|C| = \infty\} \subseteq F_n \; \forall n$.

* Denotiamo con $\sigma(n)$ il numero di cammini di lunghezza $n$ che visitano ogni punto del reticolo al massimo una volta e che partono nell'origine. Denotiamo con $N(n)$ il numero di questi cammini che sono aperti. Si nota che $F_n = \{N(n) \geq 1\}$.

**Dimostrazione *Proposizione 1*:**

- Definiamo l'evento

$$F_n := \{\text{esiste almeno un cammino aperto di lunghezza } n \text{ che passa dall'origine e che visita ogni punto del reticolo al massimo una volta}\}.$$

  Si nota che $\{|C| = \infty\} \subseteq F_n \ \forall n$.
- Denotiamo con $\sigma(n)$ il numero di cammini di lunghezza $n$ che visitano ogni punto del reticolo al massimo una volta e che partono nell'origine. Denotiamo con $N(n)$ il numero di questi cammini che sono aperti. Si nota che $F_n = \{N(n) \geq 1\}$.
- Vale che $\mathbf{E}_p[N(n)] = \sigma(n) \cdot p^n$. Si nota che $\sigma(n) \leq 4 \cdot 3^{n-1}$. Quindi segue che $\mathbf{E}_p[N(n)] \leq 4 \cdot 3^{n-1} \cdot p^n$.

**Dimostrazione *Proposizione 1*:**

* Definiamo l'evento

$$F_n := \{\text{esiste almeno un cammino aperto di lunghezza } n \text{ che passa dall'origine e che visita ogni punto del reticolo al massimo una volta}\}.$$

Si nota che $\{|C| = \infty\} \subseteq F_n \; \forall n$.

* Denotiamo con $\sigma(n)$ il numero di cammini di lunghezza $n$ che visitano ogni punto del reticolo al massimo una volta e che partono nell'origine. Denotiamo con $N(n)$ il numero di questi cammini che sono aperti. Si nota che $F_n = \{N(n) \geq 1\}$.
* Vale che $\mathbf{E}_p[N(n)] = \sigma(n) \cdot p^n$. Si nota che $\sigma(n) \leq 4 \cdot 3^{n-1}$. Quindi segue che $\mathbf{E}_p[N(n)] \leq 4 \cdot 3^{n-1} \cdot p^n$.
* La diseguaglianza di Markov implica che

$$\mathbf{P}_p(F_n) = \mathbf{P}_p(N(n) \geq 1) \leq \mathbf{E}_p[N(n)] \leq 4 \cdot 3^{n-1} \cdot p^n.$$

Visto che $p < \frac{1}{3}$, vale che $\lim_{n \to \infty} 4 \cdot 3^{n-1} \cdot p^n = 0$.

**Dimostrazione *Proposizione 1*:**

* Definiamo l'evento

$$F_n := \{\text{esiste almeno un cammino aperto di lunghezza } n \text{ che passa dall'origine e che visita ogni punto del reticolo al massimo una volta}\}.$$

Si nota che $\{|C| = \infty\} \subseteq F_n \; \forall n$.

* Denotiamo con $\sigma(n)$ il numero di cammini di lunghezza $n$ che visitano ogni punto del reticolo al massimo una volta e che partono nell'origine. Denotiamo con $N(n)$ il numero di questi cammini che sono aperti. Si nota che $F_n = \{N(n) \geq 1\}$.
* Vale che $\mathbf{E}_p[N(n)] = \sigma(n) \cdot p^n$. Si nota che $\sigma(n) \leq 4 \cdot 3^{n-1}$. Quindi segue che $\mathbf{E}_p[N(n)] \leq 4 \cdot 3^{n-1} \cdot p^n$.
* La diseguaglianza di Markov implica che

$$\mathbf{P}_p(F_n) = \mathbf{P}_p(N(n) \geq 1) \leq \mathbf{E}_p[N(n)] \leq 4 \cdot 3^{n-1} \cdot p^n.$$

Visto che $p < \frac{1}{3}$, vale che $\lim_{n\to\infty} 4 \cdot 3^{n-1} \cdot p^n = 0$.

* Di conseguenza,

$$\theta(p) = \mathbf{P}_p(|C| = \infty) \leq \mathbf{P}_p(F_n) \leq 4 \cdot 3^{n-1} \cdot p^n, \quad \forall n.$$

Concludiamo che $\theta(p) = 0$ se $p < \frac{1}{3}$.

# Utilizzo nelle lezioni di matematica

# Alcune idee

- Rivolto principalmente al LaM, opzione specifica FAM o complementare
- La teoria della percolazione permette di introdurre alcuni concetti di teoria dei grafi e di teoria della probabilità
- Simulazioni con il computer
- Si può mostrare come una situazione reale possa essere modellata e successivamente studiata utilizzando strumenti matematici.

# Bibliografia

# Bibliografia


- Beffara, V., Sidoravicius, V.: Percolation Theory, Encyclopedia of Mathematical Physics, 2006. https://arxiv.org/pdf/math/0507220.pdf
- Duminil-Copin, H.: La percolation, jeu de pavages aléatoires, 2012. http://images.math.cnrs.fr/La-percolation-jeu-de-pavages-aleatoires?lang=fr
- Duminil-Copin, H.: Introduction to Bernoulli percolation, 2018. https://www.ihes.fr/~/duminil/publi/2017percolation.pdf
- Grimmett, G.: Percolation, Springer 1999.
- Kennedy, T.: Lecture Notes on Introduction to Mathematical Physics, University of Arizona 2008. https://www.math.arizona.edu/~tgk/541/chap2.pdf
- Stauffer, D., Aharony, A.: Perkolationstheorie. Eine Einführung. Weinheim 1995.
- Tassion, V.: Lecture Notes on Percolation, ETH Autumn 2020. https://metaphor.ethz.ch/x/2020/hs/401-4607-59L/
- Théret, M.: Internet, feux de forêt et porosité: trouvez le point commun, SMF 2013. https://smf.emath.fr/sites/smf.emath.fr/files/57-62.pdf

GRAZIE PER LA VOSTRA ATTENZIONE !