Didattica

Scuola Cantonale di commercio di Bellinzona

Opzione complementare e/o lavoro di maturità a tema matematica attuariale

PPCmetrics AG
Giorgio Barozzi
Attuario ASA, Perito in materia di previdenza professionale, MSc ETH Math
Senior Actuarial Consultant

Bellinzona, 14. settembre 2022

Il mestiere di attuario

- Il profilo professionale del mestiere di attuario si è **evoluto** dal 18° secolo fino ad oggi.
  - Il «primo tipo» di attuario è l'attuario di assicurazione vita **deterministico** (18° secolo)
  - Come attuario del «secondo tipo» viene indicato l'attuario di assicurazione non-vita **stocastico** (inizio 20° secolo)
  - Un ulteriore step, l'attuario del «terzo tipo», si è avuto con l'applicazione di tecniche attuariali anche nella **parte attiva** dei bilanci – asset-liability management (anni 80)
  - L'attuario del «quarto tipo» viene detto Enterprise-Risk-Manager e si occupa della visione integrale di **risk management** (inizio 2000)
  - Un attuario del «quinto tipo» si svilupperà nei prossimi anni nell'ambito delle nuove tecnologie **big-data** e **machine learning**

Assaggio di un possibile programma

Matematica attuariale nel medio-superiore

- La matematica attuariale dell'attuario del «primo tipo» si basa su uno **sviluppo di matematica finanziaria classica**, materia peraltro già insegnata nella SCC.
  - È dunque perfettamente **insegnabile** a questo livello anche a livello «quantitativo»
- La matematica per i tipi di attuari successivi è invece più **sofisticata** e insegnabile a un livello qualitativo/interpretativo
  - Il motivo principale è la necessità di sviluppare modelli più complicati a causa della **concomitanza di diverse variabili casuali** (ad esempio la doppia incertezza sul momento e l'importo della prestazione nell'assicurazione non-vita)

Assaggio di un possibile programma (1)

- Parte <u>quantitativa</u>: **Matematica assicurazione vita** (individuale e collettiva)
  - Ricapitolazione di matematica finanziaria
  - Misurazione della mortalità e costruzione delle basi tecniche
  - Principio individuale di equivalenza
  - Sviluppo delle formule legate ai più importanti prodotti (rischio morte) dell'assicurazione vita - premi e accantonamenti
  - Sviluppo delle formule legate ai più importanti prodotti (rischio invalidità) dell'assicurazione vita - premi e accantonamenti
  - Fonti di guadagno per un'assicuratore vita
  - Analisi del guadagno

Assaggio di un possibile programma (2)

- Parte <u>qualitativa</u>: **Comprensione del mondo assicurativo** (situazione attuale del mercato, interpretazione delle teorie,…)
  - Storia della assicurazione
  - I diversi tipi di rischi assicurati al giorno d’oggi
    - Assicurazioni sociali vs. Assicurazioni private
    - Nuove tecnologie, nuovi rischi e nuovi prodotti assicurativi?
  - I diversi tipi di finanziamento e vantaggi nel combinarli
  - Perché ci si assicura? Tre teorie fondamentali
    - La legge dei grandi numeri
    - Teoria della rovina
    - Teoria dell’utilità attesa
  - Il mestiere dell’attuario: i diversi «tipi» e applicazione di questi profili professionali nel mondo del lavoro

Sviluppo del programma in classe

- Questo programma avvicinerebbe gli studenti a un tema molto presente nel **«mondo reale»**, nonché pure il mondo attuariale a dei maturandi
  - La società svizzera degli attuari (ASA) è interessata ad attirare maturandi verso lo studio attuariale – **potenziale di sinergie**
- Si potrebbe pensare di sviluppare la prima parte qualitativa come un seminario universitario, con **presentazioni** da parte degli studenti
  - Questa soluzione può essere interessante anche per studenti non troppo dotati nel calcolo in senso stretto e **attirare** non solo persone dotate in matematica
  - La matematica non è solo calcolo, ma ha un lato preponderante filosofico ed **intuitivo** nel suo sviluppo (relativamente trascurata nella scuola medio-superiore)

1. Parte quantitativa

Introduzione: Misurazione della mortalità

Ricapitolo di matematica finanziaria

Il principio di equivalenza

Calcolo dei valori attuali di alcuni prodotti assicurativi

Calcolo dei premi annuali

Introduzione: La riserva matematica

Introduzione: Misurazione della mortalità

Approcci alla misurazione

- I modelli classici di mortalità/invalidità differiscono leggermente tra assicuratori vita e casse pensioni
  - Sviluppano le proprie basi tecniche in modo indipendente
  - Le notazioni sono però le stesse
- Le **tabelle di mortalità delle «casse pensioni»** compaiono ogni 5 anni e sono sviluppate tramite le più grandi casse pensioni pubbliche (VZ) e le più grandi private (BVG)
- Le **tabelle di mortalità degli assicuratori vita** (E/G K/R M/F, es. GKM) sono sviluppate tramite le società associate alla ASA (associazione svizzera assicuratori) che inoltrano le proprie osservazioni ogni anno
  - A partire dal 1995 ogni assicuratore utilizza le proprie tabelle, fino al 1995 le tabelle erano uguali per tutti

Ricapitolo matematica finanziaria

Ricapitolo di matematica finanziaria (1)

- Nella matematica finanziaria classica si suppone un **tasso d'interesse costante** per **valutare** (scontare) pagamenti futuri certi nel presente
- Supponiamo come nelle tabelle GKM 95 i=3.5% (e così un fattore di sconto $v = 1.035^{-1} = 0.966$)
- Il valore attuale di un pagamento di CHF 100 effettuato tra 20 anni è dato dalla formula CHF $100 \cdot v^{20}$= CHF 50.25.
  - L'effetto di interesse (il cosiddetto terzo contribuente nel 2° pilastro) è intuitivamente **enorme**.
- Considerando un tasso i=2%, per i nostri tempi ancora un tasso senza rischi molto alto, il valore attuale sale a CHF 67.30.
  - Un **aumento del 33.9%** rispetto al valore precedente!

Ricapitolo di matematica finanziaria (2)

- Passiamo ora al valore attuale di una **rendita certa temporanea** di 20 anni, dell'importo di CHF 5 p.a. (quindi CHF 100 totali): $5 \cdot \ddot{a}_{n=20} = 5 \cdot (1+v+\ldots+v^{19}) = 5 \cdot (1-v^{20})/(1-v) = 5 \cdot 14.71 =$ CHF 73.55
- Con $i=2\%$, $\ddot{a}_{n=20}=16.68$ e il valore attuale della rendita è CHF 83.40.
  - Corrisponde a un **aumento del 13.4%** (perché minore di prima?)
  - La durata media di 9.17, mentre con $i=3.5\%$ 8.93.
- Il cambiamento del tasso tecnico per la valutazione dei beneficiari di rendita è un **tema centrale** in questi anni a tassi di interesse senza rischi molto bassi
  - Anche un piccolo abbassamento del tasso tecnico può mandare in sottocopertura tecnica la cassa (generando dei meccanismi di risanamento).

Il principio di equivalenza

Il principio di equivalenza

- Il **principio di equivalenza** dice che i premi incassati e le prestazioni versate (e i costi sostenuti) devono combaciare:

  valore atteso dei premi = valore atteso delle prestazioni (e costi)

- Ma se in media entrate e uscite si equivalgono, **come si riesce a fare utili**?
  - Margini di sicurezza sulle probabilità (**sovrastima dei rischi**)
  - Utili sugli **investimenti** maggiori che gli interessi corrisposti
  - **Costi** fatturati maggiori rispetto a quelli effettivi
  - In caso di **storno** valori di riscatto più bassi o decadimento delle eccedenze

Notazioni

- x, y x è l'età di un uomo, y l'età di una donna
- l_x ordine dei vivi (per definizione l_{15}=100'000 e $l_{\omega+1}$=0)
- d_x numero di morti all'età x
- $p_x = l_{x+1} / l_x$ probabilità di sopravvivenza all'età x
- $q_x = d_x / l_x$ probabilità di morte all'età x
- $v=1 / (1+i)$ fattore di sconto
- $D_x=v^x \cdot l_x$ numero di commutazione dei vivi
- $C_x=v^{x+1} \cdot d_x$ numero di commutazione dei morti
- $N_x= D_x + D_{x+1} + \ldots + D_\omega$
- $M_x= C_x + C_{x+1} + \ldots + C_\omega$

Calcolo dei valori attuali di alcuni prodotti assicurativi

Il valore atteso di una rendita vitalizia

- Supponiamo che un 65enne voglia sapere quanto **capitale** (premio unico) sia necessario per tramutarlo in una rendita vitalizia di CHF 12’000 all’anno.
- Ci affidiamo al principio di equivalenza, che afferma che entrate e uscite devono equivalersi (da un punto di vista netto):

$$l_{65}\ddot{a}_{65} = l_{65} \cdot 1 + l_{66} \cdot v + l_{67} \cdot v^2 + \ldots + l_{\omega} \cdot v^{\omega-65}$$

$$D_{65}\ddot{a}_{65} = D_{65} + D_{66} + \ldots + D_{\omega} = N_{65}$$

$$\ddot{a}_{65} = N_{65} / D_{65} = 127'296.34 / 8'935.97 = 14.245$$

- Il premio unico netto sarà di 14.245 * CHF 12’000 = CHF 170’945

Il valore atteso di una assicurazione morte

- Supponiamo che un 30enne voglia sapere quanto capitale sia necessario per essere coperto contro il **rischio di morte fino al pensionamento** (65 anni) con una prestazione di CHF 100’000.
- Ci affidiamo al principio di equivalenza, che afferma che entrate e uscite devono equivalersi (da un punto di vista netto):

$$l_{30} \cdot {}_{35}A_{30} = d_{30} \cdot v + d_{31} \cdot v^2 + \ldots + d_{64} \cdot v^{64-30+1}$$

$$D_{30} \cdot {}_{35}A_{30} = C_{30} + C_{31} + \ldots + C_{64} = M_{30} - M_{65}$$

$${}_{35}A_{30} = (M_{30} - M_{65}) / D_{30} = (7'737.41-5'184.58)/34'856.01 =$$
$$= 0.07324$$

Versamento unico di 0.07324 * CHF 100’000 = CHF 7’323.95

Calcolo dei premi annuali

Il premio annuale per una polizza morte

- Al posto di pagare il premio in un versamento unico alla conclusione del contratto, l'assicurato desidera pagare un premio annuale durante la durata della copertura.
- In questo caso il premio unico è da viene versato dall'assicurato come una rendita vitalizia (temporanea di 35 anni) all'assicurazione:

$PA \cdot \ddot{a}_{30:35} = {}_{35}A_{30}$

$\mathbf{PA = {}_{35}A_{30} / \ddot{a}_{30:35}} = ((M_{30} - M_{65}) / D_{30}) / ((N_{30} - N_{65}) / D_{30})$
$= (M_{30} - M_{65})/(N_{30} - N_{65}) = 2'552.83/697'667.43 = 0.003659$

Premio annuale di 0.003659 * CHF 100'000 = CHF 365.90

Introduzione: La riserva matematica

La riserva matematica

- La riserva matematica è il valore attuale dei flussi di cassa futuri (riserva matematica prospettica) o passati (riserva matematica retrospettiva).
- A seguito del **principio di equivalenza** la riserva matematica prospettica e retrospettiva corrispondono.
- Ovviamente all’inizio e alla fine della durata di un’assicurazione la riserva matematica è 0.
- La riserva matematica può essere calcolata anche **ricorsivamente**.
- La riserva matematica corrisponde anche alla **somma dei premi di risparmio** con interessi finora accumulati.

Le formule per la riserva matematica

- La riserva matematica rappresenta dunque quanto vale il contratto assicurativo in un determinato momento ed è il valore da accantonare in bilancio.
- In generale il calcolo della riserva prospettiva è più semplice della retrospettiva, visto che si calcola «scontando»
- Ad esempio, la riserva matematica per una **rendita vitalizia** quando l'assicurato ha 75 anni è di:

$^{pro}V_{75}$=val. att. prestazioni future – val. att. premi futuri
=$\ddot{a}_{75}$ – 0 = 10.7387   (riserva matematica di CHF 107'387)

2. Parte qualitativa

Legge dei grandi numeri

Teoria della rovina

Teoria dell'utilità attesa

Legge dei grandi numeri

La legge in modo formale

Satz (Ausgleich im Kollektiv, Version I)

Es sei $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit $\mu = \mathbb{E}[Y_i] < \infty$ für $i \in \mathbb{N}$. Für alle $\varepsilon > 0$ folgt dann

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i - \mu \right| > \varepsilon \right) = 0.}$$

- Nel mondo reale purtroppo però i rischi non sono né indipendenti, né distribuiti uniformemente (ad esempio rischi come inondazioni oppure la mortalità tra coniugi)
- Per fortuna esiste una **variante più generica** della legge:

Satz (Ausgleich im Kollektiv, Version II)

Es sei $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit $\mathrm{Var}(Y_i) < \sigma^2$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und

$$\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = 0 \quad \text{für alle } i, j \in \mathbb{N} \text{ mit } |i - j| > n_0 \tag{1}$$

und eine Konstante $n_0 \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[Y_i] \right| \geq \varepsilon \right) = 0.} \tag{2}$$

Interpretazione nella pratica

- La legge dice sostanzialmente che esiste una **convergenza** della media delle realizzazioni di una variabile casuale con la media della distribuzione della stessa – **su più fronti (rispetto al tempo e al numero di rischi)**
- Osservando la legge da un punto di vista economico possiamo dunque dire che il **pooling** di molti rischi **in un'unica azienda assicurativa** ha molto senso, poiché con un numero maggiore di rischi:
  - **diminuiscono le oscillazioni** dei risultati (su più fronti)
  - si ha una convergenza (su più fronti) al valor medio consentendo lo sviluppo di **pianificazione finanziaria** all'azienda

Teoria della rovina

La teoria della rovina

- Supponiamo che un'assicurazione assicuri diversi rischi e che per finanziare i sinistri chieda un **premio corrispondente al valor medio** della distribuzione.
- La teoria della rovina (quale conseguenza diretta della legge dei grandi numeri) dice sostanzialmente che con questo approccio e **indipendente-mente dal capitale di sicurezza iniziale**, la rovina avverrà sicuramente in un qualche momento del futuro.
- Intuitivamente questa legge è molto chiara, poiché si mettono a confronto un valore deterministico con un valore aleatorio che prima o poi supererà la somma di qualsiasi capitale proprio con i premi raccolti.
- La condizione minima dunque per un assicuratore di sopravvivere è di richiedere un premio superiore al valore medio del rischio assicurato:

$$\pi > \mathbb{E}[X]$$

- Questa teoria si può definire la base per l'**esistenza di un risk management** all'interno di un'impresa assicurativa.

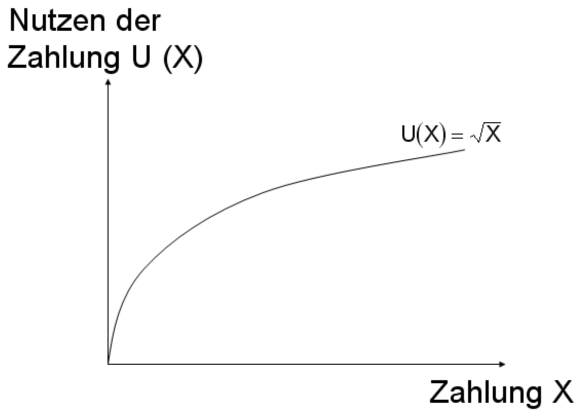
Digressione
Solvenza e risk-management

- La definizione classica di rovina corrisponde all'**insolvibilità** di un'impresa (incapacità di poter pagare le prestazioni per mancanza di liquidità).
- Con gli accordi di Basilea (I, II e III) si è introdotto il concetto di **insolvenza**, che insorge ben prima di un'insolvibilità.
- Un'assicurazione viene detta solvente se il **capitale proprio** (da un punto di vista economico) supera una certa **misura di rischio** della distribuzione del risultato del conto economico della azienda su di un certo orizzonte temporale (cioè la perdita massima che l'impresa deve essere in grado di sostenere)
- Richiedere il valore atteso come premio non basta per evitare la rovina. Ecco alcuni approcci per rendere la **rovina meno probabile**:
  - **Limitare la distribuzione dei sinistri (riassicurazione, esclusione rischi estremi, prodotti con meno garanzie/rischi sopportati dai clienti)**
  - Richiedere **premi maggiorati** (sovrastima dei rischi, margini di sicurezza)
  - **Aumento del capitale proprio** / ricapitalizzazione

Teoria dell'utilità attesa

Intuizione

- Abbiamo come situazione iniziale un insieme di alternative possibili in relazione a una variabile casuale. Come selezionare l'alternativa?
- Bernoulli ebbe l'idea di considerare non solo il valore atteso dato dalle probabilità matematiche ma anche una **funzione dell'utilità soggettiva del decisore** u(x) nella scelta dell'alternativa
- Usando le parole di Bernoulli: «La determinazione del **valore** di qualcosa non si dovrebbe basare sul suo prezzo ma sull'**utilità** che porta […] Sicuramente è più **significativo** un guadagno di 1000 ducati per un mendicante che per un ricco, malgrado ottengano lo stesso importo»
- Per un decisore avverso al rischio, la funzione di utilità è sempre **concava** ($u'>0$ e $u''<0$): in questo modo un piccolo aumento con una x grande implica un'utilità minore che un aumento con una x piccola



Stima della propria funzione di utilità

Definition (Bernoulli-Prinzip)

Das Entscheidungsprinzip mit der Zielfunktion

$$\boxed{\max_{i=1,\ldots,n} \mathbb{E}[u(X_i)]}$$

heißt Bernoulli-Prinzip. Dabei bezeichnet $\mathbb{E}[u(X_i)]$ den erwarteten Nutzen der zur Alternative $a_i \in A$ gehörenden Zufallsvariablen X_i.

- Il decisore sceglierà l'alternativa che massimizzerà la propria utilità attesa.
- La funzione di utilità è **veramente soggettiva** e dipende dal proprio patrimonio, dalla somma in gioco e dalle esperienze passate…

Esistenza delle assicurazioni

- Combinando queste 3 teorie, è possibile affermare (e quantificare) **in quali situazioni è può avvenire un contratto di assicurazione**:
- Per evitare una rovina sicura, l'assicuratore ha bisogno di un premio π con la proprietà

$$\pi > \mathbb{E}[X]$$

- L'assicurato (avverso al rischio) invece accetterà al massimo un premio π per cui

$$\mathbb{E}[u(v_0 - X)] < u(v_0 - \pi)$$

- Il contratto di assicurazione viene concluso per un premio π compreso tra

$$J = \left(\mathbb{E}[X], v_0 - u^{-1}\left(\mathbb{E}[u(v_0 - X)]\right)\right)$$

- **Maggiore è l'avversione al rischio** dell'assicurato (concavità di u(x)), tanto maggiore potrà essere l'aumento (**margine** di sicurezza/utile dell'azienda) rispetto al valor medio.