

Datum und Wochentag

Ein Stück Kalendermathematik

Claudia Albertini

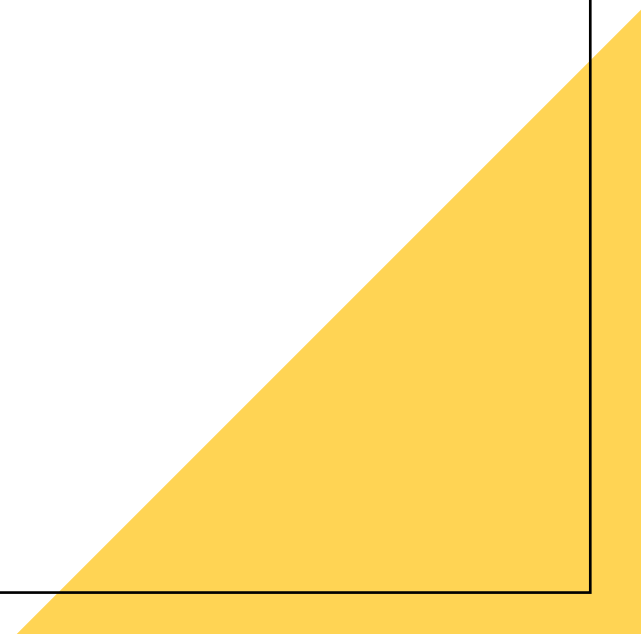
Martin Huber

Inhalt

- Grundlagen
- Der ISO-Wochenkalender
- Kalender mit fixer Wochentagszuordnung

Grundlagen

- Der Gregorianische Sonnenkalender
- Definition Wochenkalender



Der Gregorianische Sonnenkalender

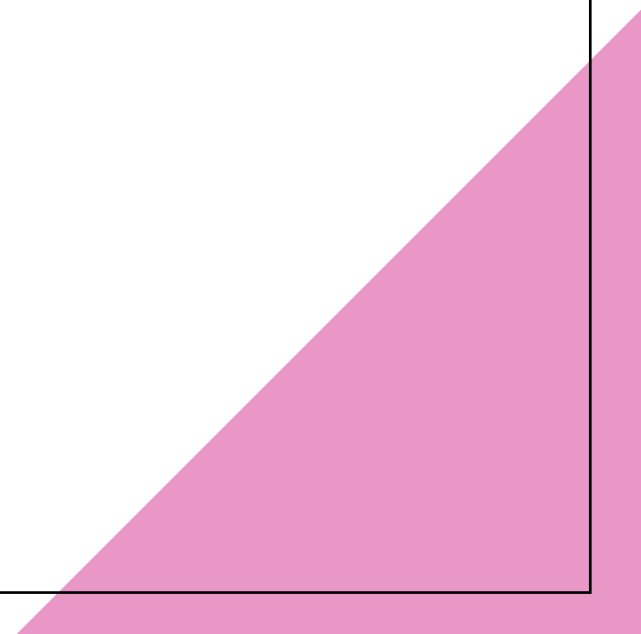
- Im Gregorianischen Kalender ist jedes vierte Jahr ein Schaltjahr, mit Ausnahme der Jahre, deren Jahreszahl ohne Rest durch 100 aber nicht durch 400 teilbar ist. Die Jahre 1700, 1800, 1900, 2100, 2200,... sind somit keine Schaltjahre; hingegen wird in den Jahren 1600, 2000, 2400,... geschaltet.
- Ein Gregorianischer Schaltzyklus dauert 400 Jahre und enthält $100 - 3 = 97$ Schaltjahre.
- Das Gregorianische Jahr dauert im Mittel $\left(365 + \frac{97}{400}\right)d = 365.2425d$.

Definition Wochenkalender

- *Wochenkalender* sind Sonnenkalender, in denen das Kalenderjahr aus einer ganzen Anzahl von Wochen besteht.
- *Wochenkalender mit fixer Wochentagszuordnung* sind Kalender, in denen jedem Datum des Sonnenjahrs immer derselbe Wochentag zugeordnet ist.

Der ISO-Wochenkalender

- Definition
- Datum, Wochentag und Kalenderwoche



Der ISO-Wochenkalender

- Der *ISO-Wochenkalender* besteht darin, dass die Wochen des Gregorianischen Kalenders (die *Kalenderwochen*) von 1 bis 52 bzw. 53 fortlaufend durchnummeriert werden.
- Nach ISO 8601 wird die *Kalenderwoche* (abgekürzt KW) wie folgt definiert:
 - Jede Kalenderwoche enthält 7 Tage und beginnt an einem Montag.
 - Die Kalenderwoche 1 enthält den ersten Donnerstag des Gregorianischen Jahres.
- Enthält ein ISO-Jahr 52 Kalenderwochen, so nennen wir es *ISO-Gemeinjahr*, enthält es 53 Kalenderwochen, so ist es ein *ISO-Schaltjahr*.

Unsere Ziele

1. Für ein beliebiges Jahr j bestimmen wir, an welchem Gregorianischen Datum d_j das ISO-Jahr, d.h. die erste ISO-Kalenderwoche beginnt.
2. Aus dem Gregorianischen Datum bestimmen wir den Wochentag und die Nummer der Kalenderwoche.
3. Aus dem Wochentag und der Nummer der Kalenderwoche bestimmen wir das Gregorianische Datum.

1. Für ein beliebiges Jahr j bestimmen wir, an welchem Gregorianischen Datum d_j das ISO-Jahr beginnt.

Vorbereitung:

Das Gregorianische Jahre j beginnt an einem	Wochentagsnummer	Datum des ISO-Jahresbeginns
Montag	1	1.1. j
Dienstag	2	31.12.($j - 1$)
Mittwoch	3	30.12.($j - 1$)
Donnerstag	4	29.12.($j - 1$)
Freitag	5	4.1. j
Samstag	6	3.1. j
Sonntag	0	2.1. j

Zur Erinnerung:
Die Kalenderwoche 1 enthält den ersten Donnerstag des Gregorianischen Jahres.

1. Für ein beliebiges Jahr j bestimmen wir, an welchem Gregorianischen Datum d_j das ISO-Jahr beginnt.

Wir nehmen den ISO-Jahresbeginn 4.1.2021 als Referenz für die weiteren Berechnungen.

Gregorianisches Jahr j	ISO-Jahresbeginn
2021	4.1.2021
2022	3.1.2022
2023	2.1.2023
2024	1.1.2024
2025	30.12.2024
2032	29.12.2031

1. Für ein beliebiges Jahr j bestimmen wir, an welchem Gregorianischen Datum d_j das ISO-Jahr beginnt: Allgemeiner Fall

– Das ISO-Jahr 2021 begann am Montag 4.1.2021 (Referenz).

– Für das beliebige Jahr j setzen wir:

$\delta(j) := j - 2021$ die Jahresdifferenz gegenüber dem Referenzjahr 2021

$\delta_s(j) := \left\lfloor \frac{j-2021}{4} \right\rfloor$ die Anzahl Schaltjahre im Intervall $[2021, j [$

$$d_j = 4.1.j - (\delta(j) + \delta_s(j)) \bmod 7$$

2. Aus dem Gregorianischen Datum bestimmen wir den Wochentag und die Nummer der Kalenderwoche.

Gegeben ist ein Gregorianisches Datum d des Jahres j , z.B. der 15.3.2024.

Vorgehen:

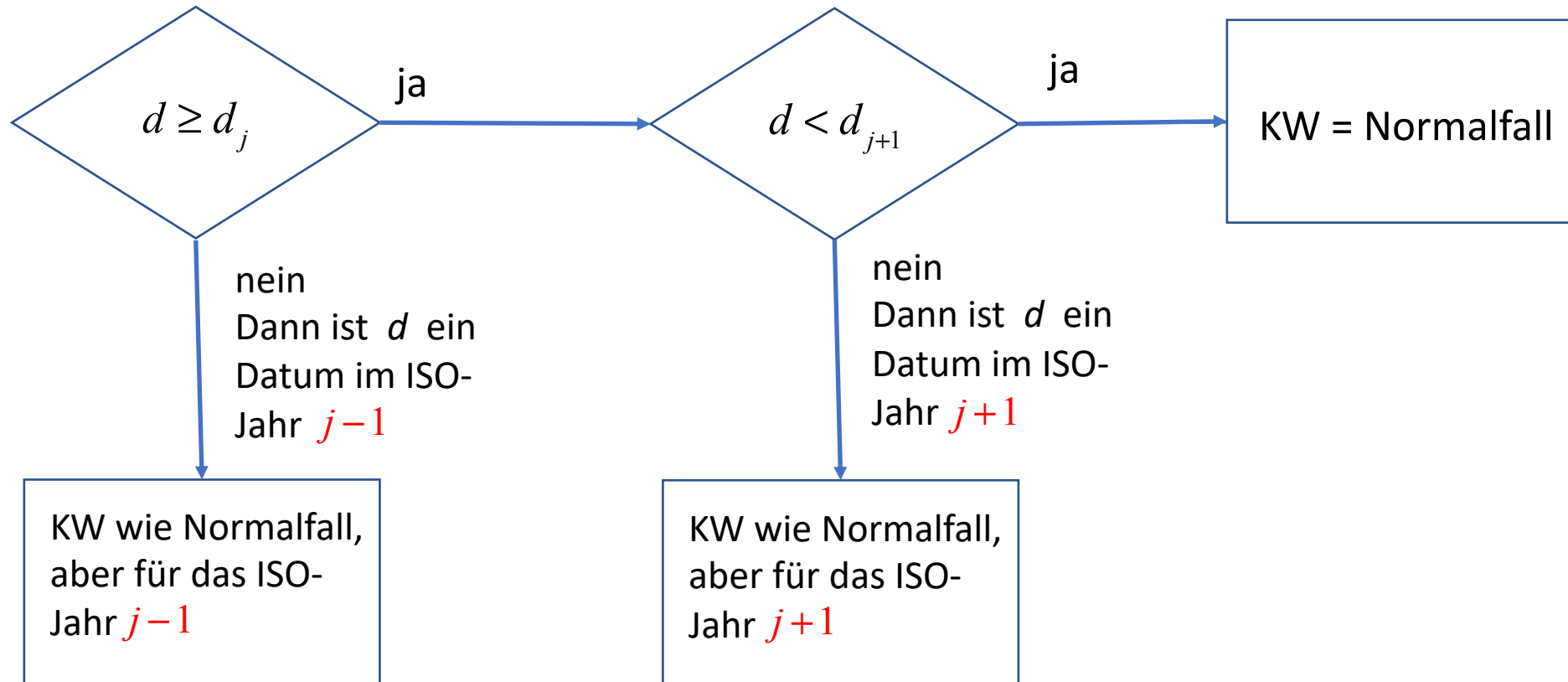
- d_{2024} bestimmen: Wie im ersten Auftrag berechnet, ist $d_{2024} = 1.1.2024$
- Tagesdifferenz bestimmen: $d - d_{2024} = 74$
- Nummer des Wochentags: $w = (1 + 74) \bmod 7 = 5$
- Nummer der Kalenderwoche: $n = 1 + \left\lfloor \frac{74}{7} \right\rfloor = 11$
- Der 15.3.2024 ist also der Freitag der Kalenderwoche 11.

Allgemein

- Wochentagsnummer: $w = (1 + d - d_j) \bmod 7$
- Kalenderwochennummer: $n = 1 + \left\lfloor \frac{d - d_j}{7} \right\rfloor$

Bestimmung der Kalenderwoche aus dem Datum d des Greg. Jahres j

Spezialfälle



3. Aus der Nummer der Kalenderwoche und dem Wochentag bestimmen wir das Gregorianischen Datum.

Vom Gregorianischen Datum d des Jahres j seien der Wochentag und die Kalenderwoche gegeben, z.B. der Donnerstag der Kalenderwoche 14 im Jahr 2032.

Vorgehen:

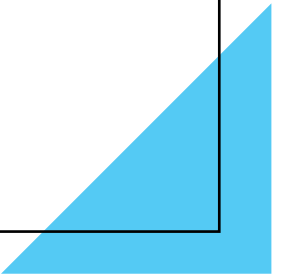
- Beginn ISO-Jahr 2032 gemäss erstes Ziel: $d_{2032} = 29.12.2031$
- Der Donnerstag hat die Tagesnummer 4. Die Tagesdifferenz $d - d_{2032}$ beträgt somit $(14 - 1) \cdot 7 + (4 - 1) = 94$ Tage.
- Das Gregorianische Datum ist der 1.4.2032.

Allgemein: Tagesdifferenz $d - d_j = (n - 1) \cdot 7 + (w - 1)$ Tage

Kalender mit fixer Wochentagszuordnung

- der Altjüdische Sonnenkalender
- 364-Tage-Kalender mit leeren Tagen
- 364-Tage-Kalender mit Schaltwochen

Altjüdischer Sonnenkalender



Das Jubiläenbuch

- Alle Zeitintervalle basieren auf der Zahl 7.
- Grundeinheit Woche: 7 Tage
- Jahrwoche, umfasst 7 Jahre..
- Jubiläum: 7 Jahrwochen = 49 Jahre
- Das 50. Jahr heisst Jubeljahr und ist heilig.
- Gesamte Chronologie: Zeitraum zwischen Schöpfung und Landnahme
Soll 50 Jubiläen gedauert haben. ($49 \cdot 49 = 2401$ Jahre)

Der Altjüdische Sonnenkalender

	I, IV, VII, X	II, V, VIII, XI	III, VI, IX, XII
Mittwoch	1 8 15 22 29	6 13 20 27	4 11 18 25
Donnerstag	2 9 16 23 30	7 14 21 28	5 12 19 26
Freitag	3 10 17 24	1 8 15 22 29	6 13 20 27
Samstag	4 11 18 25	2 9 16 23 30	7 14 21 28
Sonntag	5 12 19 26	3 10 17 24	1 8 15 22 29
Montag	6 13 20 27	4 11 18 25	2 9 16 23 30
Dienstag	7 14 21 28	5 12 19 26	3 10 17 24 31

Rekonstruktion des Qumrantextes (6Q12):

- Das Jahr wird in vier identische Quartale zu je 13 Wochen unterteilt.
- Jedes Quartal enthält 3 Monate, die ersten beiden enthalten 30, der dritte 31 Tage.

Der Altjüdische Sonnenkalender

	I, IV, VII, X	II, V, VIII, XI	III, VI, IX, XII
Mittwoch	1 8 15 22 29	6 13 20 27	4 11 18 25
Donnerstag	2 9 16 23 30	7 14 21 28	5 12 19 26
Freitag	3 10 17 24	1 8 15 22 29	6 13 20 27
Samstag	4 11 18 25	2 9 16 23 30	7 14 21 28
Sonntag	5 12 19 26	3 10 17 24	1 8 15 22 29
Montag	6 13 20 27	4 11 18 25	2 9 16 23 30
Dienstag	7 14 21 28	5 12 19 26	3 10 17 24 31

- Nach dem Jubiläenbuch bestimmt die Sonne den Kalender.
- Das Jahr beginnt am vierten Tag der Woche, weil Gott am vierten Schöpfungstag die Gestirne an den Himmel stellte.

Der Altjüdische Sonnenkalender

	I, IV, VII, X	II, V, VIII, XI	III, VI, IX, XII
Mittwoch	1 8 15 22 29	6 13 20 27	4 11 18 25
Donnerstag	2 9 16 23 30	7 14 21 28	5 12 19 26
Freitag	3 10 17 24	1 8 15 22 29	6 13 20 27
Samstag	4 11 18 25	2 9 16 23 30	7 14 21 28
Sonntag	5 12 19 26	3 10 17 24	1 8 15 22 29
Montag	6 13 20 27	4 11 18 25	2 9 16 23 30
Dienstag	7 14 21 28	5 12 19 26	3 10 17 24 31

Vorteile gegenüber dem Jüdischen Lunisolarkalender:

- Religiöse Festtage fallen stets auf denselben Wochentag;
- keine Kollision mit dem Sabbat;
- keine Vertagungen des Jahresbeginns notwendig.

364-Tage-Kalender mit leeren Tagen

- der *Weltkalender* (1834/1930)
- der *Internationale Ewige Kalender* (1922)

Der Weltkalender

	Januar April Juli Oktober	Februar Mai August November	März Juni September Dezember
Sonntag	1 8 15 22 29	5 12 19 26	3 10 17 24
Montag	2 9 16 23 30	6 13 20 27	4 11 18 25
Dienstag	3 10 17 24 31	7 14 21 28	5 12 19 26
Mittwoch	4 11 18 25	1 8 15 22 29	6 13 20 27
Donnerstag	5 12 19 26	2 9 16 23 30	7 14 21 28
Freitag	6 13 20 27	3 10 17 24	1 8 15 22 29
Samstag	7 14 21 28	4 11 18 25	2 9 16 23 30

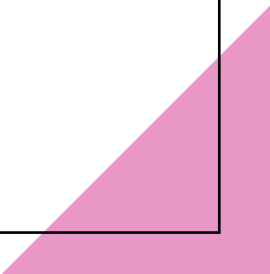
- Wie beim Altjüdischen Sonnenkalender enthält das Kalenderjahr vier identische Quartale zu je 13 Wochen (91 Tagen). Es beginnt jedoch an einem Sonntag.
- Leere Tage:
Weltfeiertag (zwischen 30. Dezember und 1. Januar), Schalttag (zwischen 30. Juni und 1. Juli)

Der Internationale Ewige Kalender

- 13 Monate zu 4 Wochen: $13 \cdot 28 = 364$
- Der 13. Monat heisst *Sol* und wird zwischen Juni und Juli eingefügt.
- Der *leere Tag* wird am Jahresende, der *Schalntag* zwischen Juni und Sol eingereicht.

	Januar Februar ... Juni	Sol	Juli August ... Dezember	
Sonntag	1	8	15	22
Montag	2	9	16	23
Dienstag	3	10	17	24
Mittwoch	4	11	18	25
Donnerstag	5	12	19	26
Freitag	6	13	20	27
Samstag	7	14	21	28

364-Tage-Kalender mit Schaltwochen

- der ISO-Wochenkalender
 - der Ewige Kalender nach Hanke-Henry (2004/2011)
 - die symmetrischen Kalender nach Bromberg (seit 2004)
- 

Der Ewige Kalender nach Hanke-Henry

	Januar April Juli Oktober	Februar Mai August November	März Juni September Dezember
Sonntag	1 8 15 22 29	6 13 20 27	4 11 18 25
Montag	2 9 16 23 30	7 14 21 28	5 12 19 26
Dienstag	3 10 17 24	1 8 15 22 29	6 13 20 27
Mittwoch	4 11 18 25	2 9 16 23 30	7 14 21 28
Donnerstag	5 12 19 26	3 10 17 24	1 8 15 22 29
Freitag	6 13 20 27	4 11 18 25	2 9 16 23 30
Samstag	7 14 21 28	5 12 19 26	3 10 17 24 31

- Das Kalenderjahr beginnt stets an einem Sonntag.
- Das Gemeinjahr wird in vier identische Quartale zu je 13 Wochen (91 Tage) unterteilt.
- Eine Schaltwoche, genannt „Xtr“, wird am Jahresende eingefügt, falls das entsprechende ISO-Jahr 53 Wochen enthält.

Die symmetrischen Kalender nach Bromberg

- Das Gemeinjahr wird in vier identische Quartale zu je 13 Wochen (91 Tage) eingeteilt.
- Das Jahr beginnt stets an einem Montag.
- *Symmetry010*: Das Quartal wird symmetrisch in Monate zu 30, 31 und 30 Tagen unterteilt. Jedes Quartal hat einen „Mid-Quarter-Day“, den 16. des entsprechenden 31-tägigen Monats.

	Januar April Juli Oktober	Februar Mai August November	März Juni September Dezember
Montag	1 8 15 22 29	6 13 20 27	3 10 17 24
Dienstag	2 9 16 23 30	7 14 21 28	4 11 18 25
Mittwoch	3 10 17 24	1 8 15 22 29	5 12 19 26
Donnerstag	4 11 18 25	2 9 16 23 30	6 13 20 27
Freitag	5 12 19 26	3 10 17 24 31	7 14 21 28
Samstag	6 13 20 27	4 11 18 25	1 8 15 22 29
Sonntag	7 14 21 28	5 12 19 26	2 9 16 23 30

Die symmetrischen Kalender nach Bromberg

- Das Gemeinjahr wird in vier identische Quartale zu je 13 Wochen (91 Tage) eingeteilt.
- Das Jahr beginnt stets an einem Montag.
- *Symmetry454*: Jeder Monat enthält eine ganze Anzahl Wochen:
Das Quartal wird symmetrisch in Monate mit 28, 35 und 28 Tagen eingeteilt.
Der 18. des entsprechenden 35-tägigen Monats ist zentraler Quartalstag.

	Januar April Juli Oktober				Februar Mai August November					März Juni September Dezember			
Montag	1	8	15	22	1	8	15	22	29	1	8	15	22
Dienstag	2	9	16	23	2	9	16	23	30	2	9	16	23
Mittwoch	3	10	17	24	3	10	17	24	31	3	10	17	24
Donnerstag	4	11	18	25	4	11	18	25	32	4	11	18	25
Freitag	5	12	19	26	5	12	19	26	33	5	12	19	26
Samstag	6	13	20	27	6	13	20	27	34	6	13	20	27
Sonntag	7	14	21	28	7	14	21	28	35	7	14	21	28

Der Schaltzyklus der symmetrischen Kalender

Der Brombergsche Schaltzyklus besteht aus 293 Kalenderjahren.

Davon sind

- 241 Gemeinjahre mit 52 Wochen und
- 52 Schaltjahre mit 53 Wochen.

Die Schaltwoche wird jeweils an den Monat Dezember angehängt.

Der Schaltzyklus der symmetrischen Kalender

– Mittlere Länge des Äquinoktialjahrs: 365.242363 d

– Differenz pro 364-Tage-Jahr: 1.242363 d

– In $\frac{7}{1.242363}$ Jahren beträgt die Differenz eine Woche

– Kettenbruchentwicklung von $\frac{7}{1.242363} = [5, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 1, \dots]$

– Näherungsbrüche

Ordnung	0	2	4	6	7	5	3	1
Näherungsbruch	$\frac{5}{1}$	$< \frac{11}{2}$	$< \frac{45}{8}$	$< \frac{231}{41}$	$< \frac{293}{52}$	$< \frac{62}{11}$	$< \frac{17}{3}$	$< \frac{6}{1}$

– $\frac{293}{52}$ ist der 7. Näherungsbruch: $\left(364 + \frac{52 \cdot 7}{293}\right) \text{d} \approx 365.242321 \text{d} < 365.242363 \text{d}$

– Differenz zur Länge des mittleren Äquinoktialjahrs: 3.6 s

Der Schaltzyklus der symmetrischen Kalender

- Der n -te Näherungsbruch eines Kettenbruchs lässt sich stets als „Kombination“ des $(n-1)$ -ten und $(n-2)$ -ten Näherungsbruchs berechnen.
- Kombination bedeutet: Zähler = Linearkombination der Zähler und Nenner = dieselbe Linearkombination der Nenner
- Beispiel: $\frac{45}{8}$ als „Kombination“ von $\frac{17}{3}$ und $\frac{11}{2}$: $\frac{45}{8} = \frac{2 \cdot 17 + 1 \cdot 11}{2 \cdot 3 + 1 \cdot 2}$
 - $\frac{45}{8}$ ist der 4. Näherungsbruch der Kettenbruchentwicklung von 365.242363
 - **Der rote Faktor** erscheint in der Kettenbruchentwicklung als 4. Teilnenner.
 - **Der blaue Faktor** ist immer = 1.

$$\frac{7}{1.242363} = [5, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 1, \dots]$$

Ordnung	0	2	4	6	7	5	3	1
Näherungsbruch	$\frac{5}{1}$	$< \frac{11}{2}$	$< \frac{45}{8}$	$< \frac{231}{41}$	$< \frac{293}{52}$	$< \frac{62}{11}$	$< \frac{17}{3}$	$< \frac{6}{1}$

Fragen

- Gibt es weitere Eigenschaften, die ein Sonnenkalender haben könnte oder sollte?
- Wer von Euch favorisiert den Gregorianischen Kalender gegenüber allen Alternativvorschlägen?
- Falls Du Dich für einen dieser Wochenkalender entscheiden musst, welcher bekommt Deine Stimme?

Kalender mit fixer Wochentagszuordnung

Der Altjüdische Sonnenkalender

	I, IV, VII, X	II, V, VIII, XI	III, VI, IX, XII
Mittwoch	1 8 15 22 29	6 13 20 27	4 11 18 25
Donnerstag	2 9 16 23 30	7 14 21 28	5 12 19 26
Freitag	3 10 17 24	1 8 15 22 29	6 13 20 27
Samstag	4 11 18 25	2 9 16 23 30	7 14 21 28
Sonntag	5 12 19 26	3 10 17 24	1 8 15 22 29
Montag	6 13 20 27	4 11 18 25	2 9 16 23 30
Dienstag	7 14 21 28	5 12 19 26	3 10 17 24 31

- Nach dem Jubiläenbuch bestimmt die Sonne den Kalender.
- Das Jahr beginnt am vierten Tag der Woche, weil Gott am vierten Schöpfungstag die Gestirne an den Himmel stellte.

1.

Der Weltkalender

	Januar April Juli Oktober	Februar Mai August November	März Juni September Dezember
Sonntag	1 8 15 22 29	5 12 19 26	3 10 17 24
Montag	2 9 16 23 30	6 13 20 27	4 11 18 25
Dienstag	3 10 17 24 31	7 14 21 28	5 12 19 26
Mittwoch	4 11 18 25	1 8 15 22 29	6 13 20 27
Donnerstag	5 12 19 26	2 9 16 23 30	7 14 21 28
Freitag	6 13 20 27	3 10 17 24	1 8 15 22 29
Samstag	7 14 21 28	4 11 18 25	2 9 16 23 30

Vier identische Quartale zu je 13 Wochen (91 Tagen), wie beim Altjüdischen Sonnenkalender
 Leere Tage:
 Weltfeiertag (zwischen 30. Dezember und 1. Januar), Schalttag (zwischen 30. Juni und 1. Juli)

2.

Der Internationale Ewige Kalender

- 13 Monate zu 4 Wochen: $13 \cdot 28 = 364$
- Der 13. Monat heisst *Sol* und wird zwischen Juni und Juli eingefügt.
- Der *leere Tag* wird am Jahresende, der *Schalttag* zwischen Juni und Sol eingereicht.

	Januar Februar Juni	Sol	Juli August Dezember
Sonntag	1 8 15 22		4 11 18 25
Montag	2 9 16 23		5 12 19 26
Dienstag	3 10 17 24		6 13 20 27
Mittwoch	4 11 18 25		7 14 21 28
Donnerstag	5 12 19 26		
Freitag	6 13 20 27		
Samstag	7 14 21 28		

3.

Der Ewige Kalender nach Hanke-Henry

	Januar April Juli Oktober	Februar Mai August November	März Juni September Dezember
Sonntag	1 8 15 22 29	6 13 20 27	4 11 18 25
Montag	2 9 16 23 30	7 14 21 28	5 12 19 26
Dienstag	3 10 17 24	1 8 15 22 29	6 13 20 27
Mittwoch	4 11 18 25	2 9 16 23 30	7 14 21 28
Donnerstag	5 12 19 26	3 10 17 24	1 8 15 22 29
Freitag	6 13 20 27	4 11 18 25	2 9 16 23 30
Samstag	7 14 21 28	5 12 19 26	3 10 17 24 31

- Jedes Jahr beginnt mit einem Sonntag.
- Das Kalenderjahr wird in vier identische Quartale zu je 13 Wochen (91 Tage) unterteilt.
- Eine Schaltwoche, genannt „Xtr“, wird am Jahresende eingefügt, falls das entsprechende ISO-Jahr 53 Wochen enthält.

4.

Die symmetrischen Kalender nach Bromberg

Das Kalenderjahr wird in vier identische Quartale zu je 13 Wochen (91 Tage) eingeteilt.
 – *Symmetry010*:
 Das Quartal wird symmetrisch in Monate zu 30, 31 und 30 Tagen unterteilt.
 Jedes Quartal hat einen „Mid-Quarter-Day“, den 16. des zugehörigen 31-tägigen Monats.

	Januar April Juli Oktober	Februar Mai August November	März Juni September Dezember
Montag	1 8 15 22 29	6 13 20 27	3 10 17 24
Dienstag	2 9 16 23 30	7 14 21 28	4 11 18 25
Mittwoch	3 10 17 24	1 8 15 22 29	5 12 19 26
Donnerstag	4 11 18 25	2 9 16 23 30	6 13 20 27
Freitag	5 12 19 26	3 10 17 24 31	7 14 21 28
Samstag	6 13 20 27	4 11 18 25	1 8 15 22 29
Sonntag	7 14 21 28	5 12 19 26	2 9 16 23 30

5.

Die symmetrischen Kalender nach Bromberg

Das Kalenderjahr wird in vier identische Quartale zu je 13 Wochen (91 Tage) eingeteilt.
 – *Symmetry454*: Jeder Monat enthält eine ganze Anzahl Wochen:
 Das Quartal wird in Monate mit 28, 35 und 28 Tage eingeteilt.
 Der 18. des zugehörigen 35-tägigen Monats ist zentraler Quartalstag.

	Januar April Juli Oktober	Februar Mai August November	März Juni September Dezember
Montag	1 8 15 22	1 8 15 22 29	1 8 15 22
Dienstag	2 9 16 23	2 9 16 23 30	2 9 16 23
Mittwoch	3 10 17 24	3 10 17 24 31	3 10 17 24
Donnerstag	4 11 18 25	4 11 18 25 32	4 11 18 25
Freitag	5 12 19 26	5 12 19 26 33	5 12 19 26
Samstag	6 13 20 27	6 13 20 27 34	6 13 20 27
Sonntag	7 14 21 28	7 14 21 28 35	7 14 21 28

Wir danken für Eure Aufmerksamkeit.

